УДК 517 95

В. Н. Павленко, канд. физ.–мат. наук (Челябин. ун–т)

УПРАВЛЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

The statement of a control problem is given for singular distributed systems of parabolic type with discontinuous nonlinearities. The Sufficient conditions for the existence of an optimal pair "control-state" are obtained under the assumption that the set of admissible pairs "control-state" is nonempty. The problem of existence is studied for semiregular solutions of the equation of state of a distributed system. It is not assumed that the nonlinearity in the equation of state of a system has sublinear growth in the phase variable or a bounded variation on any segment of the straight line.

Наведена постановка задач керування сингулярними розподіленими системами параболічного типу з розривними нелінійностями. Одержані достатні умови існування оптимальної пари „керування-стан" у припущенні, що множина припустимих пар „керування-стан" системи не є порожньою. Досліджується питання про існування напівправильних розв'язків рівняння стану розподіленої системи. При цьому не передбачається, що нелінійність у рівнянні стану системи має по фазовій змінній підлінійне зростання або обмежену варіацію на будь-якому відрізку прямої.

Решение ряда прикладных задач сводится к исследованию полулинейных уравнений параболического типа с нелинейностью, разрывной по фазовой переменной [1, 2] . В настоящей работе ставятся задачи управления такими системами, причем допускается сингулярный случай [3]. Приводятся достаточные условия существования оптимальной пары „управление-состояние" в предположении о непустоте множества допустимых пар „управление-состояние" системы. Изучается проблема непустоты множества допустимых пар „управление-состояние" системы. Дополнительно рассмотрен вопрос о существовании полуправильных решений [4, 5] первой краевой задачи. Установленные результаты о полуправильных решениях отличны от полученных в [5, 6]. Доказательство теорем о распределенных системах базируется на общих теоремах о системах в банаховом пространстве, полученных в работе. Наиболее сложным является вопрос о непустоте множества допустимых пар „управление-состояние" системы. Здесь плодотворным оказалось применение теории степени Ма [7] для многозначных компактных полей в линейных топологических векторных пространствах.

1. Общие результаты. Управляемая система в банаховом пространстве Y описывается уравнением

$$Lx + Tx = Bu, \tag{1}$$

где L — линейный оператор с областью определения $D(L) \subset Y$ со значениями в банаховом пространстве Y_1, оператор $T: Y \to Y_1$ локально ограниченный (возможно, разрывный), $B: U \to Y_1$ — линейный непрерывный оператор, U — банахово пространство управлений. Решением уравнения (1) при фиксированном управлении $u \in U$ назовем $x \in D(L)$, удовлетворяющее включению

$$Bu - Lx \in STx, \tag{2}$$

в котором ST — секвенциальное замыкание оператора T [5, с.521]. Обозначим через U_{ad} множество всех допустимых управлений ($U_{ad} \subset U$). Пара $(\tilde{u}, \tilde{x})$ называется допустимой парой „управление-состояние" для системы (1), если $\tilde{x}$ — решение уравнения (1) с $u = \tilde{u} \in U_{ad}$. На множестве D всех допустимых пар „управление-состояние" для системы (1) рассмотрим функцию стоимости

$$J(u, x) = \|x - x_0\|_Z^l + A\|u\|_U^k, \tag{3}$$

где банахово пространство $Z \supset D(L)$ непрерывно вложено в Y, $x_0 \in Z$, $\| \|_E$ — норма в пространстве E, постоянные l, k, A положительные. Ставится задача об отыскании пары $(u_0, x_0) \in D$ такой, что

$$J(u_0, x_0) = \inf_D J(u, x). \tag{4}$$

Лемма. *Пусть* Y, Y_1 *— вещественные банаховы пространства и* Y_1 *рефлексивное, оператор* $T: Y \to Y_1$ *локально ограниченный. Тогда* 1) $ST = T^{\square}$, *где* $T^{\square}$ *— овыпукливание оператора* T [8, с.173], *а* ST *— секвенциальное замыкание* T; 2) *отображение* ST *— слабо-сильно замкнуто* [6], *т.е. из* $x_n \to x$ *в* Y, $y_n \in STx_n$ *и* $y_n \rightharpoonup y$ *в* Y_1 *следует, что* $y \in STx$.

Доказательство. Пусть $x \in Y$. Из определений секвенциального замыкания и овыпукливания оператора следует, что $STx \subset T^{\square}x$. Поэтому для доказательства равенства $STx = T^{\square}x$ достаточно установить справедливость включения $STx \supset T^{\square}x$. Допустим, что оно неверно. Тогда найдется $y \in T^{\square}x \setminus STx$. Поскольку STx — замкнутое выпуклое множество, то по теореме о строгой отделимости существуют $\varphi \in Y_1^*$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\varphi(z) \geq \varphi(y) + \alpha \quad \forall z \in STx. \tag{5}$$

Полупространство $H = \{w \in Y_1 | \varphi(w) < \varphi(y) + \alpha/2\}$ открытое, выпуклое и содержит y. Отсюда с учетом принадлежности y к $T^{\square}x$ следует, что для любого натурального n найдется x_n с $\|x_n - x\| < 1/n$, для которого $Tx_n \in H$. Действительно, в противном случае для некоторого натурального n множество $\{z = Tw | \|w - x\| < 1/n\}$ целиком содержится в $Y_1 \setminus H$, а значит, в силу выпуклости и замкнутости $Y_1 \setminus H$ и множество $\overline{\mathrm{co}}\ \{z = Tw | \|w - x\| < 1/n\}$ содержится в $Y_1 \setminus H$, что противоречит непустоте $H \cap T^{\square}(x)$. По условию T — локально ограниченное отображение, поэтому последовательность (Tx_n) ограничена и, поскольку пространство Y_1 рефлексивно, существует подпоследовательность (Tx_{n_k}) последовательности (Tx_n), которая слабо сходится в Y_1 к некоторому $z \in Y_1$. По определению STx элемент $z \in STx$. С другой стороны, для любого натурального k имеем $\varphi(T(x_{n_k})) < \varphi(y) + \alpha/2$. Отсюда в пределе при $k \to \infty$ получаем $\varphi(z) \leq \varphi(y) + \alpha/2$, что противоречит (5). Таким образом, утверждение 1 леммы доказано. Предположим, что $x_n \to x$ в Y, $y_n \in ST(x_n)$ и $y_n \rightharpoonup y$. Если $y \notin STx$, то согласно теореме о строгой отделимости существуют $\varphi \in Y_1^*$ и $\alpha > 0$, удовлетворяющие (5). Множество STx содержится в дополнении к полупространству $H = \{w \in Y_1 | \varphi(w) < \varphi(y) + \alpha/2\}$. Так как $y_n \rightharpoonup y$ в Y_1, то $\varphi(y_n) \to \varphi(y)$ и, значит, найдется натуральное число n_0 такое, что для любого $n > n_0$ элемент y_n принадлежит множеству $H \cap ST(x_n)$. Как показано выше, $STx_n = T^{\square}(x_n)$. Из непустоты множества $H \cap T^{\square}(x_n)$ при $n > n_0$, как и при доказательстве утверждения 1 леммы, следует существование для каждого $n > n_0$ элемента $\tilde{x}_n$ с $\|\tilde{x}_n - x_n\| < 1/n$, для которого $T\tilde{x}_n \in H$. Последовательность $(T\tilde{x}_n)$ ограничена в Y_1 (поскольку T локально ограничено) и, значит, в силу рефлексивности Y_1 найдется подпоследовательность $(T\tilde{x}_{n_k})$, слабо сходящаяся к некоторому $z \in Y_1$. С одной стороны, $z \in STx$, а с другой, — при $n_k > n_0$ элемент $T\tilde{x}_{n_k} \in H$, т. е. $\varphi(T(x_{n_k})) < \varphi(y) + \alpha/2$, поэтому при $k \to \infty$ имеем $\varphi(z) \leq \varphi(y) + \alpha/2$. На основании этого с учетом (5) заключаем, что $z \notin STx$. Полученное противоречие доказывает утверждение 2 леммы. Лемма доказана.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) *вещественные банаховы пространства* Y_1, U *рефлексивные, множество* $U_{ad} \subset U$ *слабо замкнуто и* $B : U \to Y_1$ — *линейный ограниченный оператор;*

2) *оператор* L *линейный с областью определения* $D(L)$ *в вещественном банаховом пространстве* Y *и со значениями в* Y_1, *причем на* $D(L)$ *можно определить норму* $\| \|_1$ *так, что* $X = (D(L), \| \|_1)$ — *банахово пространство, компактно вложенное в* Y, *и* L *как оператор из* X *в* Y_1 *имеет ограниченный обратный* L^{-1} *и* X *непрерывно вложено в* Z, *где* Z — *пространство в формуле* (3);

3) *отображение* $T : Y \to Y_1$ *ограниченное и множество* D *всех допустимых пар „управление-состояние" для системы* (1) *непусто.*

Тогда задача (4), *где* J — *функция стоимости, определенная равенством* (3), *имеет решение.*

Доказательство. Пусть $d = \inf_D J(u, x)$ и $((u_n, x_n)) \subset D$ — минимизирующая для J последовательность, т.е. $J(u_n, x_n) \to d$ при $n \to \infty$. Из определения J заключаем об ограниченности (u_n) в U и (x_n) в Z, а так как Z непрерывно вложено в Y, то последовательность (x_n) ограничена в Y. Согласно определению допустимой пары „управление-состояние" для системы (1) для любого натурального n элемент $u_n \in U_{ad}$, $x_n \in D(L)$ и $Bu_n - Lx_n = y_n \in STx_n$. Из ограниченности отображения T следует ограниченность последовательности (y_n). Поскольку пространства U, Y_1 рефлексивны, найдется возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $u_{n_k} \longrightarrow \tilde{u}$ в U, а $y_{n_k} \longrightarrow y$ в Y_1, причем в силу слабой замкнутости U_{ad} элемент $\tilde{u} \in U_{ad}$. Так как, по условию, L^{-1} — линейный ограниченный оператор из Y_1 в X, то $x_{n_k} = L^{-1}(Bu_{n_k} - y_{n_k}) \longrightarrow \tilde{x} = L^{-1}(B\tilde{u} - y)$ в X. Отсюда с учетом компактности вложения X в Y следует, что $x_{n_k} \to \tilde{x}$ в Y. Отображение ST слабо-сильно замкнуто (по лемме) и, значит, $y \in ST\tilde{x}$. Таким образом, имеем $B\tilde{u} - L\tilde{x} \in ST\tilde{x}$, из чего заключаем о принадлежности пары $(\tilde{u}, \tilde{x})$ множеству D. Поскольку функция стоимости J слабо полунепрерывна снизу на D [9], то $d = \lim_{k \to \infty} J(u_{n_k}, x_{n_k}) \geq J(\tilde{u}, \tilde{x})$. Последнее вместе с принадлежностью $(\tilde{u}, \tilde{x})$ множеству D влечет $J(\tilde{u}, \tilde{x}) = d = \inf_D J(u, x)$. Теорема доказана.

Приведем достаточные условия непустоты множества D всех допустимых пар „управление-состояние" для системы (1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) Y, Y_1 — *вещественные банаховы пространства, причем* Y_1 *рефлексивное;*

2) *оператор* L *линейный с областью определения* $D(L) \subset Y$ *со значениями в* Y_1 *и на* $D(L)$ *можно определить норму* $\| \|_1$ *так, что* $X = (D(L), \| \|_1)$ — *банахово пространство, компактно вложенное в* Y, *а* L, *как оператор из* X *в* Y_1, *имеет ограниченный обратный;*

3) *оператор* $T : Y \to Y_1$ *ограниченный;*

4) *для некоторого* $f \in Y_1$ *множество* $\Lambda_f = \{x \in D(L) |$ *существует*

$\lambda \in (0, 1)$ *такое, что* $\lambda f - Lx \in \lambda STx\}$ *ограничено в* Y (ST — *секвенциальное замыкание оператора* T).

Тогда найдется $x \in D(L)$, *удовлетворяющее включению*

$$f - Lx \in STx. \tag{6}$$

Доказательство. В силу условий 2 и 3 теоремы 2 значения отображения $\Phi(x) = L^{-1}(f - STx)$ являются компактными множествами в Y, поскольку для любого $x \in Y$ множество STx ограниченное выпуклое и замкнутое в Y_1, а оператор L^{-1}, обратный к L, переводит ограниченные множества из Y_1 в предкомпактные в Y. Покажем, что отображение Φ полунепрерывно сверху [7, с.6] на Y. Допустим противное, тогда найдутся $x \in Y$ и открытое множество $W \supset L^{-1}STx$ такие, что для произвольного натурального n существуют y_n с $\|y_n - x\| < 1/n$ и $z_n \in L^{-1}STy_n \backslash W$. Имеем $z_n = L^{-1}u_n$, $u_n \in STy_n$. Из ограниченности последовательности (y_n) и отображения ST следует ограниченность последовательности (u_n) в Y_1. Отсюда с учетом рефлексивности Y_1 следует существование подпоследовательности (u_{n_k}), слабо сходящейся к u в Y_1. В силу леммы элемент $u \in STx$. Так как $L^{-1}: Y_1 \to Y$ — линейный вполне непрерывный оператор, то $z_{n_k} = L^{-1}u_{n_k} \to L^{-1}u \in L^{-1}STx \subset W$ в Y. Из этого и открытости W заключаем, что для достаточно больших k элемент $z_{n_k} \in W$. Полученное противоречие позволяет заключить о полунепрерывности сверху отображения Φ на Y. По условию множество Λ_f ограничено. Следовательно, найдется открытый шар B_R радиуса R с центром в нуле пространства Y, содержащий Λ_f. В случае, когда на границе ∂B_R шара B_R найдется x такое, что $x \in \Phi(x)$, теорема 2 справедлива. В противном случае $I - \Phi$ — компактное поле из $C(\partial B_R, \overline{B}_R, 0)$ [7, с.10] (I — тождественный оператор в Y) и $H(x, t) = (1-t)(Ix - \Phi(x)) + tIx$ — гомотопия в $C(\partial B_R, \overline{B}_R, 0)$, связывающая $I - \Phi$ с $I (0 \le t \le 1)$. Действительно, если для некоторого $t \in (0, 1)$ существует $x \in \in \partial B_R$, для которого $H(x, t) = 0$, то $x \in \Lambda_f$, но это противоречит тому, что $\Lambda_f \subset B_R$. Поскольку компактное поле $I - \Phi$ гомотопно в $C(\partial B_R, \overline{B}_R, 0)$ тождественному полю I, то степень отображения $d(B_R, 0, I - \Phi) = d(B_R, 0, I) = = 1 \ne 0$ [7, с. 20]. Из этого заключаем о существовании $x \in B_R$, удовлетворяющего включению $x \in \Phi(x)$ [7, с.25], равносильному (6). Теорема 2 доказана.

2. Приложения. Управляемый процесс в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ (Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$ класса O^2 [10]) описывается уравнением

$$\tilde{L}w \equiv w_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)w_{x_i})_{x_j} = g(x, t, w) + Bu, \quad (x, t) \in Q_T \tag{7}$$

и граничным условием

$$w|_{\Gamma_T} = 0, \tag{8}$$

где $\Gamma_T = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup \{(x, t) | x \in \Omega, t = 0\}$ — параболическая граница цилиндра Q_T, коэффициенты a_{ij} и их производные $(a_{ij})_{x_j}$ непрерывны по Гельдеру в $\overline{Q}_T$ (замыкании Q_T) и для некоторого $\alpha > 0$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

и любого $(x,t) \in \overline{Q}_T$, функция $g : Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и для почти всех $(x,t) \in Q_T$ сечение $g(x,t,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода и $g(x,t,u)$ принадлежит отрезку с концами $g(x,t,u-)$, $g(x,t,u+)$, B — линейный ограниченный оператор, действующий из банахова пространства управлений U в пространство $L_q(Q_T)$, $q > 1$.

Определение 1. *Решением задачи* (7), (8) *при фиксированном управлении* $u \in U$ *будем называть функцию* $w \in W_q^{2,1}(Q_T)$, *след которой на* Γ_T *равен нулю, удовлетворяющую включению*

$$\tilde{L}w - Bu \in [g_-(x,t,w(x,t)), \ g_+(x,t,w(x,t))] \tag{9}$$

для почти всех $(x,t) \in Q_T$. *Здесь и далее* $g_-(x,t,w(x,t)) = \min\{g(x,t, w(x,t)-), g(x,t,w(x,t)+)\}$, $g_+(x,t,w(x,t)) = \max\{g(x,t,w(x,t)-), g(x,t, w(x,t)+)\}$.

Обозначим через U_{ad} множество допустимых управлений, $U_{ad} \subset U$.

Определение 2. *Пара* $(\tilde{u}, \tilde{w})$ *называется допустимой парой „управление-состояние" для системы* (7), (8), *если* $\tilde{u} \in U_{ad}$, *а* $\tilde{w}$ — *решение задачи* (7), (8) *с* $u = \tilde{u}$.

На множестве D всех допустимых пар „управление-состояние" для задачи (7), (8) определим функцию стоимости равенством

$$J(u,w) = \|w - w_0\|_z^l + A\|u\|_U^k \quad \forall (u,w) \in D, \tag{10}$$

где Z — функциональное банахово пространство на Q_T, содержащее множество $V = \{w \in W_q^{2,1}(Q_T) | w|_{\Gamma_T} = 0\}$, $w_0 \in Z$, постоянные l, k, A положительные. Рассмотрим задачу об отыскании пары $(u,z) \in D$, для которой

$$J(u,z) = \inf_D J(u,w). \tag{11}$$

Теорема 3. *Предположим, что*

1) *банахово пространство управлений* U *рефлексивно, множество допустимых управлений* $U_{ad} \subset U$ *слабо замкнуто и* $B : U \to L_q(Q_T)$ — *линейный ограниченный оператор,* $q > 1$;

2) *функция* $g : Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *борелева* (mod 0) [8, с.166] *и для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *сечение* $g(x,t,\cdot)$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *разрывы только первого рода, причем если* $q \leq n+1$, *то* $|g(x,t,w)| \leq a|w|^\gamma + b(x,t)$ $\forall w \in \mathbb{R}$ *и почти всех* $(x,t) \in Q_T$, *где* $a > 0$, $b \in L_q(Q_T)$, $\gamma = p/q$ *с* $1 \leq p < (n+2)q/(n+2-2q)$ *при* $q < (n+2)/2$ *и* $\gamma \geq 1$ *при* $(n+2)/2 \leq q \leq n+1$; *если* $q > n+1$, *то для любого* $d > 0$ *существует* $b_d \in L_q(Q_T)$ *такая, что для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *верна оценка* $|g(x,t,w)| \leq b_d(x,t)$ $\forall w \in [-d,d]$;

3) *множество* D *всех допустимых пар „управление-состояние" для системы* (7), (8) *непусто, функция стоимости* J *определяется формулой* (10), *банахово пространство* Z, *фигурирующее в определении* J, *непрерывно вложено в* $L_q(Q_T)$ (p *из условия* 2 *теоремы* 3), *если* $q \leq n+1$, *а в случае* $q > n+1$ — *в пространство* $C(\overline{Q}_T)$, *и пространство* V *непрерывно вло-*

жено в Z.

Тогда найдется пара $(u, z) \in D$, *удовлетворяющая* (11).

Доказательство. Положим $Y_1 = L_q(Q_T)$, $Y = C(\overline{Q}_T)$, если $q > n+1$, и $Y = L_q(Q_T)$ в случае, когда $q \le n+1$ (q и p из условий 1, 2 теоремы 3), $V = \{ w \in W_q^{2,1}(Q_T) \mid w|_{\Gamma_T} = 0 \}$. Определим линейный оператор L на $D(L) = V$ со значениями в Y_1 равенством $Lw = \tilde{L} w(x,t)$. Линейное пространство V с нормой пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$ обозначим через X. Нормированное пространство X полное и, согласно результатам Лионса [3, с.39] и Соболева, компактно вкладывается в Y. Как показано в [10, с.389], L, как оператор из X в Y_1, имеет ограниченный обратный. В силу условия 2 теоремы 3 оператор Немыцкого $Tw = g(x, t, w(x,t))$ действует из Y в Y_1 и ограниченный. Из леммы следует совпадение секвенциального замыкания ST оператора T с его овыпукливанием $T^{\square}$. С другой стороны, $T^{\square} = g_w^{\square}$, где для произвольной $w \in Y$ значение $g_w^{\square}(w(x,t)) = \{ z : Q_T \to \mathbb{R} \mid z$ — измерима на Q_T и $z(x,t) \in [g_-(x,t,w(x,t)),$ $g_+(x,t,w(x,t))]$ почти всюду на Q_T [8, с.174]. Отсюда с учетом теоремы 1 следует заключение теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Приведем достаточные условия непустоты множества допустимых пар „управление-состояние" для системы (7), (8).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) *функция* $g : Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *борелева* $(\mathrm{mod}\, 0)$ *и для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *сечение* $g(x,t,\cdot)$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *разрывы только первого рода, причем*

$$|g(x,t,w)| \le a|w|^{p-1} + b(x,t) \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

и почти всех $(x,t) \in Q_T$, *где* a *— положительная константа,* $1 < p < 2(n+2)/n$, $b \in L_q(Q_T)$, $q = p/(p-1)$;

2) *либо в условии* 1 *теоремы* 4 $1 < p \le 2$, *либо для почти всех* $(x,t) \in Q_T$

$$-g(x,t,w)\,w \ge k_1|w|^p + k_2(x,t)|w|^{p-\gamma} + c(x,t) \quad \forall w \in \mathbb{R},$$

где $0 < \gamma < p$, k_1 *— положительная константа,* $k_2 \in L_{p/\gamma}(Q_T)$, $c \in L(Q_T)$.

Тогда для любого $f \in L_q(Q_T)$ *найдется* $w \in W_q^{2,1}(Q_T)$ *со следом на* Γ_T *равным нулю, удовлетворяющая для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *включению*

$$\tilde{L} w(x,t) - f(x,t) \in [g_-(x,t,w(x,t)),\ g_+(x,t,w(x,t))]. \tag{12}$$

Здесь $\tilde{L}$ *— равномерно параболический дифференциальный оператор, определенный выше.*

Доказательство. Пусть $Y = L_p(Q_T)$, $Y_1 = Y^* = L_q(Q_T)$, $V = \{ w \in W_q^{2,1}(Q_T) \mid w|_{\Gamma_T} = 0 \}$, $X = (V, \|\,\|_1)$, где $\|\,\|_1$ — норма пространства $W_q^{2,1}(Q_T)$, и фиксируем $f \in L_q(Q_T)$. Поскольку $1 < p < 2(n+2)/n$, $q = p/(p-1)$, банахово пространство X компактно вкладывается в $L_p(Q_T)$ [3, с.39]. Определим линейный оператор L на $D(L) = V \subset Y$ со значениями в Y_1 равенством $Lw = \tilde{L} w(x,t)$ и оператор $T : Y \to Y^*$ формулой $Tw = -g(x,t,w(x,t))$. Покажем, что выполнены все условия теоремы 2. Проверка условий 1 – 3 теоремы 2 проводится так же, как в доказательстве теоремы 4. Осталось доказать, что выполнено и условие 4 теоремы 2. Из равномерной параболичности оператора $\tilde{L}$ и неравенства

Фридрихса имеем

$$\langle Lw, w\rangle \geq c_1 \|w\|^2_{L_2(Q_T)} \quad \forall w \in D(L), \tag{13}$$

где c_1 — положительная постоянная, не зависящая от w, а через $\langle y, w\rangle$ обозначается значение функционала $y \in Y^*$ на элементе $w \in Y$. При доказательстве теоремы 4 было установлено, что $ST = -g^{\square}_w$. Если $2 < p < 2(n+2)/n$ и $w \in D(L)$ удовлетворяет включению $Lw - \lambda f \in -\lambda STw$ для некоторого $\lambda \in \in (0, 1)$, то существует $z \in -STw$, для которого $Lw - \lambda f = \lambda z$. В силу неравенства (13) и условия 2 теоремы 4 $\lambda \|f\| \|w\| \geq \langle \lambda f, w\rangle = \langle Lw - \lambda z, w\rangle \geq \geq \lambda(k_1\|w\|^p - \|k_2\|_{L_{p/\gamma}}\|w\|^{p-\gamma} - \|c\|_{L(Q_T)})$. Из этого получим $\|f\| \geq k_1\|w\|^{p-1} - - \|k_2\|_{L_{p/\gamma}(Q_T)}\|w\|^{p-\gamma-1} - \|c\|_{L(Q_T)}/\|w\|$. Отсюда следует ограниченность в Y множества $\Lambda_f = \{w \in D(L) |$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ $\lambda f - Lw \in \lambda STw\}$, и, значит, выполнение условия 4 теоремы 2 в случае $2 < p < < 2(n+2)/n$. Пусть теперь $1 < p < 2$ и $w \in D(L)$ удовлетворяет включению $Lw - \lambda f \in -\lambda STw$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$. Тогда существует $z \in -STw$, для которого $Lw - - \lambda f = \lambda z$. В силу неравенства (13) и условия 1 теоремы 4 с учетом непрерывности вложения $L_2(Q_T)$ в $L_p(Q_T)$ имеем $\|f\| \|w\| \geq \langle \lambda f, w\rangle = \langle Lw - \lambda z, w\rangle \geq \geq c_1 c_2^{-1}\|w\|^2 - a\|w\|^p - \|b\|_{L_q(Q_T)}\|w\|$, где c_2 — норма оператора вложения $L_2(Q_T)$ в $L_p(Q_T)$. И, значит, $\|f\| \geq c_1 c_2^{-1}\|w\| - a\|w\|^{p-1} - \|b\|_{L_q(Q_T)}$, из чего заключаем об ограниченности в Y множества Λ_f. Наконец, когда $p = 2$, стандартной заменой $w(x, t) = r(x, t)\exp(at)$ включение (12) приводится к виду

$$Lr + ar - \tilde f \in \tilde g^{\square}_r(r(x, t)), \tag{14}$$

где $\tilde f = f(x, t)\exp(-at)$, $\tilde g(x, t, r) = g(x, t, r\exp(at))\exp(-at)$. Заметим, что для $\tilde g$ верна оценка

$$|\tilde g(x, t, r)| \leq a|r| + b(x, t)\exp(-at) \quad \forall r \in \mathbb{R} \tag{15}$$

и для почти всех $(x, t) \in Q_T$. Если $r \in D(L)$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ удовлетворяет включению $Lr + ar - \lambda \tilde f \in \lambda \tilde g^{\square}_r(r)$, то существует $z \in \tilde g^{\square}_r(r(x, t))$ такое, что $Lr + ar - \lambda \tilde f = \lambda z$. Учитывая (13) — (15), получаем $\|\tilde f\| \|r\| \geq \geq \langle \lambda \tilde f, r\rangle = \langle Lr + ar - \lambda z, r\rangle \geq c_1\|r\|^2 + a\|r\|^2 - a\|r\|^2 - \|b\| \|r\|$. Из последнего неравенства следует оценка $\|\tilde f\| \geq c_1\|r\| - \|b\|$. На основании этого с учетом связи $w(x, t) = r(x, t)\exp(at)$ между решениями включений $Lr + ar - - \lambda \tilde f \in \lambda \tilde g^{\square}_r(r(x, t))$ и $Lw - \lambda f \in \lambda g^{\square}_w(w(x, t))$ заключаем об ограниченности в $Y = L_2(Q_T)$ множества Λ_f. Таким образом, выполнены все условия теоремы 2. Поэтому найдется $w \in D(L)$, удовлетворяющее включению $Lw - f \in -STw = = g^{\square}_w(w(x, t))$. Теорема 4 доказана.

Определение 3 [5, 6]. *Будем говорить, что для функции* $g: Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *выполнено A-условие по отношению к дифференциальному оператору* $\tilde L$, *если* 1) g *борелева* (mod 0) *и для почти всех* $(x, t) \in Q_T$ *сечение* $g(x, t, \cdot)$ *имеет разрывы только первого рода;* 2) *существует семейство гиперповерхностей* $\{S_i\}_{i \in \Lambda}$ *в* $\mathbb{R}^{n+2}$ (Λ — *конечное или счетное,* $S_i = \{(x, t, w) \in \mathbb{R}^{n+2} | w =$

$= \varphi_i(x,t),\ (x,t) \in Q_T\},\ \varphi_i = C^2(\overline{Q}_T))$ *такое, что если* w — *точка разрыва функции* $g(x,t,\cdot)$, *то для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *и некоторого* $i \in \Lambda$ *точка* $(x,t,w) \in S_i$ *и* $(L\varphi_i(x,t) - g(x,t,\varphi_i(x,t)-))(L\varphi_i(x,t) - g(x,t,\varphi_i(x,t)+)) > 0$.

Определение 4 [5, 6]. *Функция* $w \in W_q^{2,1}(Q_T)$ *называется полуправильным решением включения* (12), *если она удовлетворяет включению* (12) *почти всюду на* Q_T *и для почти всех* $(x,t) \in Q_T$ *значения* $w(x,t)$ *являются точками непрерывности* $g(x,t,\cdot)$.

Замечание. Если w — полуправильное решение включения (12), то для почти всех $(x,t) \in Q_T$ $\tilde{L}w(x,t) - f(x,t) = g(x,t,w(x,t))$.

Теорема 5. *Если функция* $\tilde{g}(x,t,w) = g(x,t,w) + f(x,t)$, $f \in L_q(Q_T)$, *удовлетворяет* A*-условию по отношению к дифференциальному оператору* $\tilde{L}$, *определенному выше, то любое решение включения* (12) *является полуправильным.*

Доказательство. Пусть $w \in W_q^{2,1}(Q_T)$ — решение включения (12), но не является полуправильным решением. Тогда мера множества $\{(x,t) \in Q_T \mid w(x,t)$ — точка разрыва функции $\tilde{g}(x,t,\cdot)\}$ отлична от нуля. Поскольку семейство поверхностей разрыва $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ не более чем счетно, то для некоторого $i \in \Lambda$ ненулевой будет мера множества $\omega = \{(x,t) \in Q_T \mid w(x,t) = \varphi_i(x,t),\ (\tilde{L}\varphi_i(x,t) - \tilde{g}(x,t,\varphi_i(x,t)-))(\tilde{L}\varphi_i(x,t) - \tilde{g}(x,t,\varphi_i(x,t)+)) > 0\}$. Заметим, что $\tilde{L}\varphi_i(x,t) = \tilde{L}w(x,t)$ почти всюду на ω [11, с.25]. Отсюда для произвольной $z(x,t) \in \tilde{g}_r^{\square}(w(x,t))$ следует неравенство $\tilde{L}w(x,t) - z(x,t) \neq 0$ почти всюду на ω, но это противоречит тому, что w — решение включения (12), т.е. удовлетворяет (12) для почти всех $(x,t) \in Q_T$. Теорема 5 доказана.

Замечание. Теоремы 4 и 5 дают достаточные условия существования полуправильных решений первой краевой задачи для полулинейного уравнения параболического типа с разрывной нелинейностью. В отличие от работы автора [5] возможен не подлинейный рост $g(x,t,w)$ по w и не требуется, чтобы для почти всех $(x,t) \in Q_T$ функция $g(x,t,\cdot)$ имела ограниченную вариацию на любом отрезке в $\mathbb{R}$, а по сравнению с [6] не предполагается монотонность $-g(x,t,\cdot)$ на $\mathbb{R}$ для почти всех $(x,t) \in Q_T$.

1. *Kuiper H. J.* On positive solution of nonlinear elliptic eigenvalue problems // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1971. – **20**, № 2–3. – P.113–138.
2. *Chang K. C.* Free Boundary problems and the setvalued mappings // J. Different. Equat. – 1983. – **49**, № 1. – P.1–28.
3. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределенными системами. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
4. *Красносельский М.А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 3. – С.506–509.
5. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С.520–526.
6. *Павленко В. Н* Метод монотонных операторов для уравнений с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 6. – С.38–45.
7. *Ma T.W.* Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces // Rozpr. mat. – 1972. – **92**. - P.3–47.
8. *Красносельский М.А., Покровский А. В* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 271с.
9. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 416с.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736с.
11. *Павленко В. Н* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вест. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1973. – № 6. – С.21–29.

Получено 26. 02. 92