УДК 517.9

В. С. Мельник, д-р физ.-мат.наук (Ин-т кибернетики АН Украины, Киев)

Т-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ИХ КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

The critical points of the functionals $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ defined on "nonlinear" sets D in the topological vector spaces X are studied. A construction of a T-derivative is suggested for these functionals and compared with to known constructions. The concept of a weak critical point is introduced and Coleman's principle is justified for T-differentiable functionals.

Вивчаються критичні точки функціоналів $F: D \subset X \to \mathbb{R}$, визначених на „нелінійних" множинах D топологічних векторних просторів X. Запропонована конструкція T-похідної для таких функціоналів, вивчено зв'язок з існуючими конструкціями. Вводиться поняття слабкої критичної точки і обгрунтовується принцип Коулмена для T-диференційовних функціоналів.

1. В теоретической и математической физике, а также в механике и теории управления одним из основных вопросов является нахождение иизучение свойств экстремальных точек некоторых функционалов. При этом часто рассматриваемые функционалы F определены на „плохо" устроенных множествах D из соответствующих функциональных классов. Это связано либо со сложностью F, ввиду чего $D = \{ y | F(y) < \infty \}$ не имеет „хороших" функционально-алгебраических свойств, либо с тем, что D порождается дополнительными связями (фазовыми ограничениями) на переменные y. Подобная ситуация имеет место, например, в задаче оптимального управления объектами, описываемыми вариационными неравенствами [1]. Таким образом, возникает необходимость в изучении критических точек функционалов $F: D \subset X \to \mathbb{R}$, где X — линейное топологическое пространство, а D — подмножество в нем (не являющееся, вообще говоря, гладким многообразием и даже статифицированным пространством).

В настоящей работе предложена конструкция дифференциала таких функционалов (T-дифференцируемые функционалы), ориентированная на теорию экстремальных задач в бесконечномерных пространствах.

Изучены основные свойства T-дифференцируемых функционалов и установлена связь с известными конструкциями. В качестве примеров рассмотрены функционалы вариационного исчисления. Показано, что на данный класс (не дифференцируемых в обычном смысле функционалов) можно перенести принцип Коулмэна нахождения стационарных точек инвариантных функционалов [2 – 4].

2. Пусть X и Y — полные отделимые топологические векторные пространства (ТВП), D — подмножество в X; $\mathfrak{F}$ — совокупность пар $(y; \varphi)$, где $y \in D$, а $\varphi: [0, \varepsilon] \to D$ — отрезок сильно дифференцируемой в нуле справа кривой и $\varphi(0) = y$; $\pi: \mathfrak{F} \to D$ — каноническая проекция, $\mathfrak{F}_y = \pi^{-1}(y)$, причем $\mathfrak{F} = \bigcup_{y \in D} \mathfrak{F}_y$. На $\mathfrak{F}$ вводится стандартное отношение эквивалентности $\sim$:

$$(y_1; \varphi_1) \sim (y_2; \varphi_2) \Leftrightarrow y_1 = y_2, \quad \varphi_1'(+0) = \varphi_2'(+0),$$

а $TD = \mathfrak{F} / \sim$ — фактор по этому отношению. Тогда $\mathfrak{F}_y / \sim$ канонически изоморфно совокупности тех элеменов $\xi \in T_y D$, для которых существует $\varphi \in \mathfrak{F}_y$ такое, что $\varphi'(+0) = \xi$. Множество $T_y D$ является конусом в X, а $TD = \bigcup_{y \in D} T_y D$ — касательное (конусное) слоение над D.

Определение 1. *Пусть $A: D \subset X \to Y$. Кривая $\varphi \in \mathfrak{F}_y$ называется A-допустимой, если оператор A дифференцируем в точке $y \in D$ вдоль кривой*

φ, *т. е. существует* $\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}(A(\varphi(\tau))-A(y))$ *в топологии пространства* Y.

Обозначим через $\mathfrak{N}^A(y;\xi)\subset\mathfrak{F}_y(\xi)$ совокупность всех A-допустимых кривых, выходящих из точки $y\in D$, а через $\mathfrak{M}^A(y;\xi)\subset\mathfrak{N}^A(y;\xi)$ некоторое их подмножество, где $\mathfrak{F}_y(\xi)=\{\varphi\in\mathfrak{F}_y\,|\,\varphi'(+0)=\xi\}$. При этом определены многозначные отображения $\mathfrak{N}^A(y;\cdot):T_yD\to 2^{\mathfrak{F}_y}$ (соответственно отображение $\mathfrak{M}^A(y;\cdot)$) и $\mathfrak{N}^A(\cdot):TD\to 2^{\mathfrak{F}}$ (соответственно $\mathfrak{M}^A(\cdot)$).

Определение 2. *Функционал* $F:D\subset X\to\mathbb{R}$ *имеет в точке* $y\in D$ *производную по направлению* $\xi\in T_yD$ *относительно* $\mathfrak{M}^F(y;\xi)$, *если предел*

$$\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}(F(\varphi(\tau))-F(y)) = TF(y;\xi) \tag{1}$$

не зависит от кривой $\varphi\in\mathfrak{M}^F(y;\xi)$.

***Замечание* 1.** Если для любого $\xi\in E_y\subset T_yD$ существует $TF(y;\xi)$, то определено отображение $TF(y;\cdot):E_y\to\mathbb{R}$. Очевидно E_y — конус и $TF(y;\lambda\xi)=\lambda TF(y;\xi)$ для всех $\lambda>0$.

Определение 3. А. *Функционал* $F:D\subset X\to\mathbb{R}$ *называется* $(T;E_y;\mathfrak{M}^F)$-*дифференцируемым в точке* $y\in D$, *если существует производная по любому направлению* $\xi\in E_y$ *относительно* $\mathfrak{M}^F(y;\xi)$ *и линейный функционал* $\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F)$, *определенный на* $S_y\supset E_y$, *что* $TF(y;\xi)=\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F)\xi$.
Б. *Функционал* $\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F)$ *называется* $(T;E_y;\mathfrak{M}^F)$-*производной* F *в точке* $y\in D$. В. *Если* F *имеет* $(T;E_y;\mathfrak{M}^F)$-*производную в каждой точке* $y\in\in D$, *то он называется* $(T;E;\mathfrak{M}^F)$-*дифференцируемым, где* $E=\bigcup_{y\in D}E_y$, $\mathfrak{M}^F(\cdot):E\to 2^{\mathfrak{F}}$ *и* $(T;E;\mathfrak{M}^F)$-*производная есть* $\mathfrak{D}^TF(\mathfrak{M}^F):E\to\mathbb{R}$ $(\forall\eta==(y;\xi)\in E,\ \mathfrak{D}^TF(\mathfrak{M}^F)\eta\overset{\Delta}{=}\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F)\xi)$. Г. *Функционал будем сокращенно называть* T-*дифференцируемым в точке* $y\in D$, *если* $E_y=T_yD$, $\mathfrak{M}^F(y;T_yD)=\mathfrak{F}_y$.

***Замечание* 2.** Пусть $\mathfrak{M}^F(y;\xi)=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{M}_i^F(y;\xi)$ и функционал $F:D\subset\subset X\to\mathbb{R}$ является $(T;E_y;\mathfrak{M}_i^F)$-дифференцируемым для всех $i\in I$, причем, возможно, $\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}_i^F)\neq\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}_j^F)$ для $i\neq j$. В этом случае будем говорить, что F в точке $y\in D$ является $(T;E_y;\mathfrak{M}^F)$-мультидифференцируемым и его $(T;E_y;\mathfrak{M}^F)$-мультипроизводная есть многозначное отображение

$$\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F):E_y\to 2^{\mathbb{R}}\left(\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F)\xi=\bigcup_{i\in I}\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}_i^F)\xi\right).$$

Пример. Пусть $X=\mathbb{R}^2$, $F(y)=\begin{cases} y_1+y_2, & y_1=y_2^2,\quad y_2>0,\\ 0 & \text{— в остальных случаях.}\end{cases}$

Очевидно, F в точке 0 является T-мультидифференцируемым и, в частности, T-мультидифференциал содержит дифференциал Гато.

***Замечание* 3.** В дальнейшем, если это не приведет к недоразумению, будем использовать обозначение

$$\mathfrak{D}^TF(y)=\mathfrak{D}^TF(y;\mathfrak{M}^F).$$

В следующих двух простых предложениях, которые мы приведем без доказательств, собраны некоторые свойства T-дифференцируемых функционалов.

Предложение 1. а). *Пусть D — открытое множество в банаховом пространстве X и $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Фреше в точке $y \in D$. Тогда он T-дифференцируем и $\mathfrak{D}^T F(y) = F'(y)$.* б). *Пусть $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ (D — открытое множество в ТВП X) $(T; X; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируем и $\varphi \in \mathfrak{M}^F(y; \xi)$, $(\varphi(\tau) = y + \tau\xi,\ \tau \in [0, \varepsilon])$ для всех $\xi \in X$, а также $\mathfrak{D}^T F(y) \in X^*$; тогда функционал F дифференцируем по Гато и $\mathfrak{D}^T F(y) = F'(y)$.* в). *Пусть X, Y — ТВП, $\Lambda: D \subset X \to Y$ — замкнутый линейный оператор, $f: Y \to \mathbb{R}$ — T-дифференцируемый функционал. Тогда $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ $(F(y) = f(\Lambda y))$ является $(T; D; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируемым, где $\mathfrak{M}^F(\cdot) = \mathfrak{N}^\Lambda(\cdot)$, причем $\mathfrak{D}^T F(y)\xi = \mathfrak{D}^T f(\Lambda y)\Lambda\xi$. Если же $\mathfrak{D}^T f(\Lambda y) \in Y^*$, то $\mathfrak{D}^T F(y)\xi = \langle \mathfrak{D}^T f(\Lambda y), \Lambda\xi\rangle_Y$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle_Y: Y^* \times Y \to \mathbb{R}$ — двойственность), а для плотного D в X и $\mathfrak{D}^T f(\Lambda y) \in D(\Lambda^*)$ имеем $\mathfrak{D}^T F(y) = \Lambda^* \mathfrak{D}^T f(\Lambda y)$.*

Предложение 2. *Пусть V — область в ТВП Z, отображение $\Lambda: V \subset Z \to X$ дифференцируемо по Гато в точке $v \in V$, $\Lambda(V) \subset D$ и функционал $\psi: D \subset X \to \mathbb{R}$ $(T; E_{\Lambda(v)}; \mathfrak{M}^\psi)$-дифференцируем в точке $\Lambda(v)$. Если $\Lambda'(v)h \in E_{\Lambda(v)}$ для любого $h \in Z$ и $\varphi \in \mathfrak{M}^\psi(\Lambda(v); E_{\Lambda(v)})$ $(\varphi(\tau) = \Lambda(v + \tau h),\ \tau \in [0, \varepsilon])$, то сквозное отображение $F = \psi \circ \Lambda: V \subset Z \to \mathbb{R}$ имеет линейную вариацию в точке $v \in V$, равную $VF(v; h) = \mathfrak{D}^T \psi(\Lambda(v))\Lambda'(v)h$, а если $\mathfrak{D}^T \psi(\Lambda(v)) \in X^*$, то F дифференцируем по Гато.*

Замечание 4. Пусть в п. в) предложения 1 оператор $\Lambda: D \subset X \to Y$ допускает замыкание $\hat{\Lambda}: \hat{D} \subset X \to Y$. Тогда функционал $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ является $(T; \hat{D}; \mathfrak{N}^\Lambda)$-дифференцируемым и $\mathfrak{D}^T F(y)\xi = \mathfrak{D}^T f(\Lambda y)\hat{\Lambda}\xi\ \ \forall\ (y; \xi) \in D \times \hat{D}$. Кроме того, если D плотно в X, а X и Y — банаховы и $\mathfrak{D}^T f(\Lambda y) \in Y^*$, то $\mathfrak{D}^T f(y) = \hat{\Lambda}^* \mathfrak{D}^T f(\Lambda y) \in X_\Lambda^*$, где X_Λ — множество $\hat{D}$ с нормой графика.

Замечание 5. Аналогично определению 3 вводится T-дифференцируемость отображений $A: D \subset X \to Y$, нужно только (1) понимать в топологии пространства Y.

Предложение 3. *Пусть X, Y — ТВП, $\Lambda: D \subset X \to Y$ — $(T; E_y; \mathfrak{M}^\Lambda)$-дифференцируемое отображение в точке $y \in D$, а $\psi: D \times B \subset X \times Y \to \mathbb{R}$ имеет следующие свойства:* а) $\forall\ y \in D\ \ \psi(y, \cdot): B \subset Y \to \mathbb{R}$ *$(T; E_{\Lambda(y)}; \mathfrak{M}^{\psi_2})$-дифференцируемо в точке $\Lambda(y) \in B$;* б) *функционал $\psi(\cdot, l): D \subset X \to \mathbb{R}$ $(T; E_y; \mathfrak{M}^{\psi_1})$-дифференцируем в $y \in D$ равномерно по $l \in L$ (L — произвольное ограниченное подмножество B) и отображение $\mathfrak{D}_1^T \psi(y, \cdot)\xi: B \subset Y \to \mathbb{R}$ непрерывно в $\Lambda(y)$ вдоль кривых $\Lambda(\varphi(\tau))$ $(\varphi \in \mathfrak{M}^{\psi_1}(y; \xi))$ для каждого $\xi \in E_y$.*

Тогда функционал $F(y) = \psi(y, \Lambda(y))$ $(T; E_y; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируем, где $\mathfrak{M}^F(y, E_y) = \mathfrak{M}^{\psi_1}(y, E_y) \cap \{\varphi \in \mathfrak{M}^\Lambda(y, E_y) \mid \hat{\varphi}(\cdot) = \Lambda(\varphi(\cdot)) \in \mathfrak{M}^{\psi_2}(\Lambda(y); E_{\Lambda(y)})\}$. В этом случае

$$\mathfrak{D}^T F(y)\xi = \mathfrak{D}_1^T \psi(y, \Lambda(y))\xi + \mathfrak{D}_2^T \psi(y, \Lambda(y))\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}^F(y, E_y)$, $\xi \in E_y$ и $\varphi'(+0) = \xi$. Рассмотрим $\tau^{-1}[F(\varphi(\tau)) - F(y)] = \tau^{-1}[\psi(\varphi(\tau), \Lambda(\varphi(\tau)) - \psi(y, \Lambda(y))] = \tau^{-1}[\psi(\varphi(\tau), \Lambda(\varphi(\tau)) - \psi(y, \Lambda(\varphi(\tau)))] + \tau^{-1}[\psi(y, \Lambda(\varphi(\tau)) - \psi(y, \Lambda(y))]$. Из T-дифференцируемости Λ имеем $\Lambda(\varphi(\tau)) = \Lambda(y) + \tau\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi + 0(\tau; \varphi; \xi)$, где $\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}0(\tau; \varphi; \xi) = 0$, значит, множество $\{\Lambda(\varphi(\tau)), \tau \in [0, \varepsilon]\}$ поглощается любой окрестностью точки $\Lambda(y)$. В силу условий а), б) предложения 3

$$\psi(\varphi(\tau), l) = \psi(y, l) + \tau\mathfrak{D}_1^T\psi(y, l)\xi + 0_1(\tau; \varphi; \xi; l),$$

где $\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}0_1(\tau; \varphi; \xi\, l) = 0$ равномерно по $l \in L$.

Следовательно,

$$\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}[\psi(\varphi(\tau), \Lambda(\varphi(\tau))) - \psi(y, \Lambda(\varphi(\tau)))] =$$

$$= \lim_{\tau\to+0}[\mathfrak{D}_1^T\psi(y, \Lambda(\varphi(\tau))\xi + \tau^{-1}0_1(\tau; \varphi; \xi\, l)] = \mathfrak{D}_1^T\psi(y, \Lambda(y))\xi.$$

Далее, по условию функция $\hat\varphi(\cdot) = \Lambda(\varphi(\cdot))$ принадлежит $\mathfrak{M}^{\psi_2}(\Lambda(y); E_{\Lambda(y)})$ и $\hat\varphi'(+0) \in E_{\Lambda(y)}$ $\forall\ \varphi \in \mathfrak{M}^\Lambda(y; E_y)$, значит, $\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi \in E_{\Lambda(y)}$ и $\psi(y, \Lambda(\varphi(\tau))) = \psi(y, \Lambda(y)) + \tau\mathfrak{D}_2^T\psi(y, \Lambda(y))\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi + 0_2(\tau; \varphi; \xi)$, т. е.

$$\lim_{\tau\to+0}\tau^{-1}[\psi(y, \Lambda(\varphi(\tau))) - \psi(y, \Lambda(y))] = \mathfrak{D}_2^T\psi(y, \Lambda(y))\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi.$$

***Следствие* 1.** *Пусть* $\Lambda : D \subset X \to Y$ *из предложения* 3, *а отображение* $\psi : D \subset X \to Y^*$ *является* $(T; E_y; \mathfrak{M}^\psi)$*-дифференцируемым в* $y \in D$. *Тогда функционал* $F(y) = \psi(y) \circ \Lambda(y)(T; E_y; \mathfrak{M}^F)$*-дифференцируем в точке* $y \in D$, *где* $\mathfrak{M}^F(y; E_y) = \mathfrak{M}^\Lambda(y; E_y) \cap \mathfrak{M}^\psi(y; E_y)$ *и, более того,* $\mathfrak{D}^T F(y)\xi = \mathfrak{D}^T\psi(y)(\xi, \Lambda(y)) + \psi(y)\mathfrak{D}^T\Lambda(y)\xi$.

3. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, m — натуральное число, $M(m)$ — число различных мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными целыми координатами длины не больше чем m, борелевская функция $h : \Omega \times \mathbb{R}^{M(m)} \to \mathbb{R}$ имеет следующие свойства: г) $\mathbb{R}^{M(m)} \ni \xi \mapsto h(\omega; \xi)$ дифференцируема п. в. $\omega \in \Omega$; д) $h'_\xi : \Omega \times \mathbb{R}^{M(m)} \to \mathbb{R}^{M(m)}$ — борелевская.

Обозначим через $\mathcal{H}$ оператор Немыцкого, порожденный функцией $h(\mathcal{H} : W \subset \prod_{|\alpha|\le m} L_{p_\alpha}(\Omega) \to L_r(\Omega)$ $p_\alpha, r \ge 1)$. Рассмотрим функционал $F_g : D \subset X \to \mathbb{R}$, определяемый формулой

$$F_g(y) = \int_\Omega h(\omega, y, \ldots, D^m y)g(\omega)d\omega, \tag{2}$$

где $g \in L_{r'}(\Omega)$, $1/r + 1/r' = 1$, $D^m y = \{D^\alpha y, |\lambda| = m\}$, $D^\alpha y = \dfrac{\partial^{|\alpha|}y}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $X = W_{\bar p}^m(\Omega)$ — анизотропное пространство Соболева, $D = \{\xi \in X | \{D^\alpha\xi, |\alpha| \le m\} \in W\}$ и пусть выполнено условие

е) для любых $y \in D$ и $\xi \in T_y D$ функция $\Omega \ni \omega \mapsto h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots$

$\ldots, D^m y(\omega))D^\alpha\xi(\omega)$ п. в. конечна при каждом $|\alpha| \leq m$, где $h_\alpha = \partial_{\eta_\alpha} h(\omega, \eta)$.

Теорема 1. *Пусть функция* h *удовлетворяет условиям* г) – е). *Тогда для некоторого плотного в* $L_{r'}(\Omega)$ *подмножества* Γ *функционал* F_g *T-дифференцируем в каждой точке* $y \in D$ *при каждом* $g \in \Gamma$ *и*

$$\mathfrak{D}^T F_g(y)\xi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega))D^\alpha\xi\, g\, d\omega. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\xi \in T_y D$ и $\varphi \in \mathfrak{F}_y(\xi)$ — произвольный представитель. Докажем, что

$$\frac{d}{d\tau}F_g(\varphi(\tau))\big|_{\tau=+0} = \mathfrak{D}^T F(y)\xi = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega))D^\alpha\xi\, g\, d\omega. \tag{4}$$

Функция $[0, \varepsilon] \ni \tau \mapsto \mathcal{H}(\varphi(\tau))(\omega) = h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m\varphi_\tau(\omega))$ дифференцируема справа в нуле п. в. и $\dfrac{d}{d\tau} h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m\varphi_\tau(\omega))\big|_{\tau=+0} =$ $= \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega))D^\alpha\xi\, g(\omega)$.

Пусть N — стремящаяся к $+\infty$ последовательность целых чисел и

$$\Omega_N = \Big\{\omega \in \Omega \,|\, \tau^{-1}|h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m\varphi_\tau(\omega)) - h(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega)) - $$
$$- \tau \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega))D^\alpha\xi| \leq 1, \quad \tau \leq \frac{1}{N}\Big\}.$$

Множества Ω_N измеримы и в силу теоремы Егорова $\operatorname{mes}\Omega_N \to \operatorname{mes}\Omega$ при $N \to \infty$. Положим $\Gamma_N = \{\xi \in L_{r'}(\Omega) \,|\, \operatorname{supp}\xi \subseteq \Omega_N\}$, а $\Gamma = \bigcup_N \Gamma_N$. Пусть $\xi \in \Gamma$ — произвольный элемент, тогда существует N' такое, что $\xi \in \Gamma_{N'}$ и для всех $\tau \leq 1/N'$

$$\Big|\Big[\tau^{-1} h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m\varphi_\tau(\omega)) - h(\omega, y, \ldots, D^m y) - $$
$$- \tau \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(\omega, y, \ldots, D^m y)D^\alpha\xi\Big]\Big| \leq |\xi|,$$

где левая часть неравенства стремится к нулю п. в.

Следовательно, по теореме Лебега $\int_\Omega \tau^{-1}\big[h(\omega, \varphi(\tau), \ldots, D^m\varphi(\tau)) - h(\omega, y, \ldots, D^m y) - \tau \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha(\omega, y, \ldots, D^m y)D^\alpha\xi\big]\xi\, d\omega \to 0$ при $\tau \to +0$, т. е. $\mathfrak{D}^T F_g(y)\xi$ определяется формулой (4) для всех $g \in \Gamma$. А поскольку Γ плотно в $L_{r'}(\Omega)$, то теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть справедливы условия теоремы, кроме* е). *Тогда для* $g \in L_{r'}(\Omega)$ *функционал* (2) $(T; E_y; \mathfrak{M}^F)$*-дифференцируем в каждой точке* $y \in D$, *где* $\mathfrak{M}^F(y; T_y D) = \{\varphi \in \mathfrak{F}_y \,|\, \tau^{-1}\|\mathcal{H}(\varphi(\tau)) - \mathcal{H}(y)\|_{L_{r'}(\Omega)} \leq \text{const}\}$, $E_y = \operatorname{dom}\mathfrak{M}^F(y; \cdot)$.

Замечание 6. В следствии 2 можно E_y и $\mathfrak{M}^F$ задавать в виде

$$\mathfrak{M}^F(y; \xi) = \Big\{\varphi \in \mathfrak{F}_y(\xi) \,|\, \tau^{-1}|h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m\varphi_\tau(\omega)) - $$

$$- h(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega)) - \tau \sum_{|\alpha| \le m} h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots$$

$$\ldots, D^m y(\omega)) D^\alpha \xi || g | \le \xi \in L_1(\Omega) \Big\} \quad \forall \xi \in E_y, \tag{5}$$

или же

$$\mathfrak{M}^F(y; \xi) = \Big\{ \varphi \in \mathfrak{F}_y(\xi) \Big| \Big| \frac{\partial}{\partial \tau} h(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots$$

$$\ldots, D^m \varphi_\tau(\omega)) g(\omega) \Big| \le \xi \in L_1(\Omega) \Big\} \quad \forall \xi \in E_y. \tag{6}$$

***Следствие* 3.** *Пусть функция* h *удовлетворяет условиям* г), д) *и*

$$| h_\alpha(\omega; \xi) | \le g_\alpha(\omega) + C \sum_{|\alpha| \le m} |\xi_\alpha|^{p_\alpha}, \tag{7}$$

где $g_\alpha \in L_1(\Omega)$, $C \equiv \text{const}$.

Тогда функционал $F(y) = \int_\Omega h(\omega, y, \ldots, D^m y) d\omega$ *является* $(T; E; \mathfrak{M}^F)$-*дифференцируемым. Здесь для любого* $y \in D$ $\mathfrak{M}^F$ *определяется либо соотношением* (5), *либо* (6) *с* $g \equiv 1$.

***Замечание* 7.** Очевидно при выполнении (7) $h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega)) \in L_1(\Omega) \forall y \in X$, поэтому ξ не может быть произвольным элементом из $T_y D$ (при $D = X$). Тем не менее, можно указать такое плотное подмножество D в X, что для всех $y \in D$ $E_y = X$ и $\mathfrak{D}^T F(y) \in X^*$.

***Замечание* 8.** Пусть D и $\mathfrak{M}^F$ такие, что: а) для всех $y \in D$ и $\varphi \in \mathfrak{M}^F(y; T_y D)$ функция $\varphi(\tau)$ и ее производная $\varphi'(\tau)$ непрерывны на $[0, \varepsilon]$; б) для всех $\varphi \in \mathfrak{M}^F(y; T_y D)$ и $\tau \in [0, \varepsilon]$ соответствие $\Omega \ni \omega \mapsto \psi_\alpha(\tau, \omega) = h_\alpha(\omega, \varphi_\tau(\omega), \ldots, D^m \varphi_\tau(\omega)) D^\alpha \varphi'_\tau(\omega)$ класса $L_1(\Omega)$, а функция $[0, \varepsilon] \ni \tau \mapsto \psi_\alpha(\tau, \omega)$ непрерывна для п. в. $\omega \in \Omega$ и для каждого $|\alpha| \le m$. При этих условиях справедлива оценка (6) (с $g \equiv 1$).

***Замечание* 9.** Пусть в теореме 1 вместо условия е) справедливо следующее условие: существует $E_y \subset T_y D$ такое, что $h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega)) D^\alpha \xi \in L_r(\Omega)$ для всех $y \in D$ и $\xi \in E_y$.

В этом случае для каждого $g \in L_{r'}(\Omega)$ функционал F_g имеет аппроксимационную $(T; E_y; \mathfrak{F}_y)$-производную вида (4), т. е. если $g_n \to g$ в $L_{r'}(\Omega)$, $g_n \in \Gamma$, и $F_{g_n}(y) \to F_g(y) \forall y \in D$, то

$$\mathfrak{D}^T F_{g_n}(y)\xi \to \kappa = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega h_\alpha(\omega, y(\omega), \ldots, D^m y(\omega)) D^\alpha \xi \, g \, d\omega.$$

Отсюда, вообще говоря, не следует $(T; E_y; \mathfrak{F}_y)$-дифференцируемость F_g, а может лишь оказаться, что $\kappa \in \mathfrak{D}^T F_g(y; \mathfrak{F}_y)\xi$, где $\mathfrak{D}^T F_g(y; \mathfrak{F}_y)$ — мультипроизводная (см. замечание 2).

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с регулярной границей, оператор $A: X = W_2^m(\Omega) \to W_2^{-m}(\Omega)$ определяется интегральным тождеством

$$\langle A(y), \omega \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega A_\alpha(\omega, y, \ldots, D^m y) D^\alpha \omega \, d\omega \quad \forall y, \omega \in X, \tag{8}$$

в котором функции $A_\alpha(\omega,\eta)$ измеримы по $\omega\in\Omega$ для всех $\eta\in\mathbb{R}^{M(m)}$, непрерывно дифференцируемы по η при п. в. $\omega\in\Omega$ и $A_{\alpha\beta}(\omega,\varphi_\tau(\omega),\ldots$ $\ldots,D^m\varphi_\tau(\omega))D^\beta\varphi'_\tau(\omega)\in L_2(\Omega)$ $\forall\ |\alpha|,|\beta|\le m$, $\forall\ \tau\in[0,\varepsilon]$ и $\forall\ \varphi\in$ $\in\ \mathfrak{M}^A(y;X)$, где $y\in X$, $A_{\alpha\beta}(\omega,\eta)=\partial_{\eta_\beta}A_\alpha(\omega,\eta)$.

Как известно, определяемый (8) оператор A дифференцируем по Гато, но не является, вообще говоря, дифференцируемым по Фреше [5]. Вместе с тем можно показать, что этот оператор T-дифференцируем в каждой точке $y\in X$. На самом деле достаточно доказать $(T;X;\mathfrak{M}^A)$-дифференцируемость для произвольного $w\in X$ следующего функционала:

$$F_w(y)=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega A_\alpha(\omega,y,\ldots,D^m y)D^\alpha w\,d\omega,$$

где $\mathfrak{M}^A(y;X)=\mathfrak{F}_y\cap C^1(\mathbb{R}_+;X)$, что следует из замечания 8. Таким образом, оператор A является T-дифференцируемым и для него справедливо (в силу предложений 2, 3) „цепное" правило.

Пример. В соболевском пространстве $X=W_p^m(\Omega)$ рассматривается следующий функционал:

$$F(y)=F_1(y)+F_2(y)=\int_\Omega h_1(\omega,y,\ldots,D^m y)d\omega+\int_\Omega h_2(\omega,y)\,d\omega, \tag{9}$$

где $h_2(\omega,y)=(y-1)\exp y$, а функция $h_1\colon\Omega\times\mathbb{R}^{M(m)}\to\mathbb{R}$ имеет все свойства, при которых функционал $F_1\colon D_1\subset X\to\mathbb{R}$ является $(T;E;\mathfrak{M}^{F_1})$-дифференцируемым и

$$\mathfrak{D}^T F_1(y)\xi=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega h_\alpha(\omega,y,\ldots,D^m y)D^\alpha\xi\,d\omega.$$

В этом случае $F\colon D=D_1\cap D_2\subset X\to\mathbb{R}$ является $(T;E;\mathfrak{M}^F)$-дифференцируемым и

$$\mathfrak{D}^T F(y)\xi=\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega h_\alpha(\omega,y,\ldots,D^m y)D^\alpha\xi\,d\omega+$$

$$+\int_\Omega y(\omega)\exp y(\omega)\xi(\omega)d\omega\quad\forall\,(y;\xi)\in D\times E_y,$$

где $\mathfrak{M}^F(y;E_y)=\mathfrak{M}^{F_1}(y;E_y)\cap\mathfrak{M}^{F_2}(y;E_y)$, $\mathfrak{M}^{F_2}(y;E_y)=\mathfrak{F}_y\cap C^1(\mathbb{R}_+;X)$, $D_2=$ $=L_\infty(\Omega)$, причем $E_y=X$, $\mathfrak{D}^T F_2(y)\in X^*$ $\forall\ y\in D_2$. Заметим, что последнее условие выполняется и в случае, когда $D_2=\{y\in L_p(\Omega)\mid y\exp y\in L_q(\Omega)\}$.

***Замечание* 10.** Наряду с T-производными представляет интерес рассмотрение конических T-производных (T_k-производных). Будем говорить, что функционал $F\colon D\subset X\to\mathbb{R}$ в точке $y\in D$ имеет $(T_k;E_y;\mathfrak{M}^F)$-производную, если в определении 3 $TF(y;\xi)=\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\xi$, где $\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\colon \operatorname{co}E_y\to$ $\to\mathbb{R}$ — коническое отображение, т. е.

$$\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\lambda\xi=\lambda\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\xi\quad\forall\,\lambda>0$$

и

$$\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)(\xi_1+\xi_2)=\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\xi_1+\mathfrak{D}^{T_k}F(y;\mathfrak{M}^F)\xi_2\ \ \forall\,\xi_1,\xi_2\in\operatorname{co}E_y.$$

Заметим, что T_k-дифференцируемые функционалы часто возникают в приложениях и их T_k-производные имеют тесную связь с субдифференциалами [6].

4. Точка $y \in D$ называется $(E_y; \mathfrak{M}^F)$-критической для F на D, если в ней функционал $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ имеет $(T; E_y; \mathfrak{M}^F)$-производную и

$$\mathfrak{D}^T F(y; \mathfrak{M}^F)\xi = 0 \quad \forall \xi \in E_y. \tag{10}$$

Пусть $F(y) = F_1(y) + F_2(y)$, где $F_2: X \to \mathbb{R}$ $(T; X; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируем на X, $F_1: D \subset X \to \mathbb{R}$ $(T; X; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируем на D и $\mathfrak{D}^T F_1: D \to X^*$, $\mathfrak{D}^T F_2: X \to X^*$. При этом соотношение (10) эквивалентно операторному уравнению

$$\mathfrak{D}^T F_1(y) + \mathfrak{D}^T F_2(y) = 0. \tag{11}$$

Предположим, что $\mathfrak{D}^T F_1: D \subset X \to X^*$ — оператор с полуограниченной вариацией, т. е.

$$\langle \mathfrak{D}^T F_1(y_1) - \mathfrak{D}^T F_1(y_2), y_1 - y_2 \rangle_X \geq -C(R; \|y_1 - y_2\|'_X)$$
$$\forall y_1, y_2 \in D \cap (B_R = \{ y \in X \mid \|y\|_X \leq R \}),$$

где $C: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция по второму аргументу при фиксированном первом и $t^{-1} C(R; t) \to 0$ при $t \to +0$, а $\|\cdot\|'_X$ — компактная норма относительно $\|\cdot\|_X$.

Легко видеть, что в примере п.3 (см.(9)) оператор $\mathfrak{D}^T F_2: D \subset X \to X^*$ является оператором с полуограниченной вариацией. Если при этом y является $(X; \mathfrak{M}^F)$-критической точкой для F на D, т. е. $y \in D$ удовлетворяет (11), то

$$\langle \mathfrak{D}^T F_1(\xi), \xi - y \rangle_X - \langle \mathfrak{D}^T F_2(y), y - \xi \rangle_X \geq -C(R; \|y - \xi\|'_X) \quad \forall \xi \in D. \tag{12}$$

Элемент $y \in X$ называется слабой $(X; \mathfrak{M}^F)$-критической точкой для F, если выполняется (12). Вообще говоря, $(X; \mathfrak{M}^F)$-слабая критическая точка не является сильной, даже если $y \in D$. Условия существования слабых критических точек и некоторые их свойства приведены в работах [7, 8].

Нахождение $(E; \mathfrak{M}^F)$-критических точек существенно упрощается, если функционал F имеет некоторую инвариантность. В этом пункте мы покажем, что принцип Коулмэна [2 – 4] может быть перенесен на T-дифференцируемые функционалы, что существенно расширяет область его применимости. При этом будем следовать схеме работы [4].

Пусть G — группа; $t: G \to \mathfrak{L}(X; X)$ — ее представление; X_0 — совокупность неподвижных точек из X, т. е. $w \in X_0 \Leftrightarrow t(g)w = w \ \forall g \in G$; на инвариантном множестве $D \subset X$ функционал $F: D \subset X \to \mathbb{R}$ инвариантен, т. е. $t(g)y \in D \ \forall y \in D$ и $F(t(g)y) = F(y) \ \forall (y; g) \in D \times G$; $T_w D_0$ — $(T_w D)$-касательное множество в точке $w \in D_0 = D \cap X_0$ к $D_0(D)$. Множества $T_w D$ и $T_w D_0$ инвариантны и $T_w D_0 \subset T_w D \cap X_0$. Пусть $T_w D$ содержит плотное линейное инвариантное множество θ, $\theta_0 = \theta \cap T_w D_0$ плотно в $T_w D_0$ и функционал F имеет в точке w $(T; \theta; \mathfrak{M}^F)$-производную. В силу инвариантности D и F имеем

$$\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi = \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F) t(g)\xi \quad \forall (\xi; g) \in \theta \times G. \tag{13}$$

Требуется получить условия, при которых из $\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi = 0 \ \forall \xi \in \theta_0$ и (13) вытекает $\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi = 0 \ \forall \xi \in \theta$, т. е. если точка $w \in D_0$ является $(\theta_0; \mathfrak{M}^F)$-критической, то она и $(\theta; \mathfrak{M}^F)$-критическая. В этом случае задачу нахождения $(\theta; \mathfrak{M}^F)$-критических точек можно заменить более простой задачей поиска $(\theta_0; \mathfrak{M}^F)$-критических.

Предположим, что существует операция „осреднения" M по множеству G, имеющая следующие свойства:

а) $M\varphi = \varphi$ для любой скалярной φ, постоянной на G;

б) $\forall \xi \in \theta$ $M(t(\cdot)\xi) = \xi_0 \in \theta_0$ и в этом классе M — линейно;

в) $M(\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F) t(\cdot)\xi) = \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F) M(t(\cdot)\xi)$ $\forall \xi \in \theta$.

Применяя операцию M к обеим частям (13), получаем

$$\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi = \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi_0 \quad \forall \xi \in \theta \tag{14}$$

и если $\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi_0 = 0$ $\forall \xi_0 \in \theta_0$, то в силу (14) получаем требуемый результат. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены приведенные выше условия и существует операция M, имеющая свойства* а) – в). *Если при этом точка $w \in D_0$ будет $(\theta_0; \mathfrak{M}^F)$-критической для F, то она будет и $(\theta; \mathfrak{M}^F)$-критической.*

***Замечание* 11.** Пусть X — банахово пространство, G — компактная группа, dg — нормированная мера Хаара на G; $t: G \to \mathfrak{L}(X; X)$ — представление группы G, имеющее следующее свойство: для любого $y \in X$ отображение $G \ni g \mapsto t(g)y \in X$ непрерывно; $F: X \to \mathbb{R}$ — инвариантный $(T; X; \mathfrak{M}^F)$-дифференцируемый функционал, причем $\mathfrak{D}^T F(y; \mathfrak{M}^F) \in X^*$ $\forall y \in X$. Тогда $D = X$, $\theta = T_w D = X$, $D_0 = X_0$, $\theta_0 = T_w D_0 = X_0$, $\mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F)\xi = \langle \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F), \xi\rangle_X$, а равенство (13) имеет вид $\langle \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F), \xi\rangle_X = \langle \mathfrak{D}^T F(w; \mathfrak{M}^F), t(g)\xi\rangle_X$ $\forall \xi \in X$. В качестве операции M, как и в [4], можно взять интегрирование по dg: $M(t(\cdot)\xi) = \int_G t(g)\xi\, dg$, которая имеет свойства б) и в).

Таким образом, если w является $(X_0; \mathfrak{M}^F)$-критической точкой для F, то w будет и $(X; \mathfrak{M}^F)$-критической, т. е. выполнены все условия теоремы 2.

Аналогично рассматривается случай, когда $F: D \subset X \to \mathbb{R}$, где D — плотное линейное подмножество в X, а представление $t: G \to \mathfrak{L}(X; X)$ имеет дополнительное свойство регулярности: $t(g)D \subset D$. Тогда $T_w D$ плотно в $T_w X$, $T_w D_0$ плотно в $T_w X_0$. Снова выбирая в качестве M интегрирование по мере Хаара, попадаем в область применимости теоремы 2.

1. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с.
2. *Coleman S.* Classical lumps and their quantum descendants. – Preprint, Harvard Phys. Dept., 1975.
3. *Palais R. S.* The principle of symmetric criticality // Communs Math. Phys. – 1979. – **69**, №1. – P. 19 – 30.
4. *Капитанский Л. В., Ладыженская О. А.* О принципе Коулмэна нахождения стационарных точек инвариантных функционалов // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **129**. – С. 84 – 102.
5. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. – Киев: Наук. думка, 1973. – 219 с.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1982. – 142 с.
7. *Мельник В. С.* О некоторых свойствах решений операторных уравнений и вариационных неравенств // Докл. АН СССР. – 1991. – **317**, №2. – С. 304 – 308.
8. *Мельник В. С.* Некоторые свойства слабых решений операторных уравнений и вариационных неравенств // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1990. – №11. – С. 12 – 15.

Получено 13. 03. 92