УДК 512.552.1

В. В. Кириченко, Ю. В. Яременко

Нетеровы бирядные кольца

В настоящей статье изучаются колчаны нетеровых с двух сторон бирядных колец и рассматриваются свойства таких колец. Понятие колчана конечномерной алгебры над полем было введено Габриелем [1] в связи с изучением представлений алгебр, квадрат радикала которых равен нулю. Как выяснилось, это понятие, перенесенное на случай полусовершенных колец, играет важную роль в структурной теории полусовершенных колец [2, 3]. В данной статье под нетеровыми кольцами понимаются нетеровы с двух сторон кольца, под модулями, если не оговорено противное,— правые унитарные модули. Все кольца ассоциативные и с единицей.

Понятие артинова бирядного кольца ввел Фуллер [4, 5] в связи с изучением колец дистрибутивного модульного типа. Этот класс колец естественно включает артиновы полуцепные кольца, которые впервые рассмотрел Накаяма [6], и артиновы кольца дистрибутивного модульного типа. В работе [7] понятие бирядного кольца переносится на полусовершенные кольца. Изучение бирядных колец в общем случае представляет интерес в связи с выделением класса колец, над которыми все конечно представимые модули распадаются в прямую сумму дистрибутивных.

1. Напомним определение полусовершенного бирядного кольца [7] (такие кольца будем называть бирядными).

Неразложимый модуль M называется бирядным [4], если он (т. е. структура его подмодулей) дистрибутивен и содержит цепные подмодули K_1 и K_2 (возможно равные нулю) такие, что $K_1 + K_2$ есть M или наибольший собственный подмодуль в M, а $K_1 \cap K_2$ есть нуль или наименьший ненулевой подмодуль в M.

Полусовершенное кольцо A называется бирядным, если каждый правый и каждый левый главный A-модуль бирядец.

Пусть $A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ — разложение бирядного нетерова кольца в прямую сумму попарно неизоморфных неразложимых модулей $P_1, \ldots$ $\ldots, P_s$ (главных A-модулей). Свойства колчана, которые используются в доказательстве теоремы 1, приведены в работах [1, 2, 8]. Для нетерова полусовершенного кольца неразложимость в прямое произведение колец эквивалентна связности колчана (см. [8], теорема 10.7, [2, 3]). Охарактеризуем колчаны нетеровых бирядных колец.

Теорема 1. *Пусть A — нетерово бирядное кольцо. Тогда из каждой точки колчана кольца A выходит не более двух стрелок и в каждую точку колчана кольца A входит не более двух стрелок, причем из одной точки в другую (возможно совпадающую с исходной) идет не более одной стрелки. Наоборот, если есть конечный граф, удовлетворяющий этим условиям, то существует бирядное кольцо, колчаном которого является этот граф.*

Доказательство. Пусть R — радикал Джекобсона кольца A, $K(A)$ — колчан этого кольца. Так как $K(A) = K(A/R^2)$ [8, с. 46] и фактор-кольцо бирядного кольца бирядно, то можно считать, что в исходном кольце $R^2 = 0$. Учитывая теорему 10.7 [8], рассмотрим случай, когда A неразложимо в прямое произведение колец. По теореме 1.2 [7] кольцо A можно считать приведенным, $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ — разложение кольца A в прямую сумму главных модулей, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ —соответственное разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. Рассмотрим главный модуль P_i. P_iR — это модуль над полупростым кольцом $\overline{A} = A/R$ и поэтому он полупрост, т. е. $P_iR = \bigoplus_{j=1}^{s} U_j^{t_{ij}}$, где $U_j = P_j/P_jR$ —простые модули. По определению бирядного кольца в прямое разложение P_jR входит не более двух простых модулей, которые неизоморфны. Поэтому из любой точки колчана кольца A выходят не более двух стрелок и из одной точки в другую (возможно совпадающую с исходной) идет не более одной стрелки. Покажем теперь, что в любую точку колчана входит не более двух стрелок. Предположим, что в точку t идут стрелки из точек i, j, k. Согласно изложенному выше точки i, j, k различны. По леммам 10.3 и 10.4 [8] $e_iRe_t \neq 0$, $e_jRe_t \neq 0$ и $e_kRe_t \neq 0$. Но тогда по тем же леммам (левый случай) левый модуль Re_t раскладывается в прямую сумму, по крайней мере, трех простых модулей, что противоречит бирядности левого модуля Ae_t.

Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть $A(\Gamma)$ — алгебру путей графа Γ над некоторым полем k, J — фундаментальный идеал этой алгебры, т. е. деал порожденный стрелками [9]. Пусть $B = A(\Gamma)/J^2$. Ясно, что алгебра B — бирядна и $K(B) = \Gamma$.

При описании бирядных колец, учитывая теорему 1.2 [7], можно ограничиться приведенными кольцами.

Пусть A — нетерово бирядное кольцо, единица которого разлагается в сумму двух локальных идемпотентов: $1 = e_1 + e_2$, $A_{ij} = e_iAe_j$, $i, j = 1, 2$, $R_i = e_iRe_i$, $i = 1, 2$. По теоремам 1.2 [7], 10.5 [8] и [3] кольца A_{ii} — области главных правых и главных левых идеалов (иначе говоря, дискретно нормированные кольца), либо цепные артиновы кольца (однорядные кольца Кете), A_{12} — циклический левый A_{11}- и циклический правый A_{22}-модуль, A_{21} — циклический правый A_{11}- и циклический левый A_{22}-модуль.

Вычислим R^2. Очевидно, $R^2 = \begin{pmatrix} R_1^2 + A_{12}A_{21} & R_1A_{12} + A_{12}R_2 \\ R_2A_{21} + A_{21}R_1 & R_2^2 + A_{21}A_{12} \end{pmatrix}$.
Напомним, что по лемме Накаямы $A_{12}R_2$ и R_1A_{12} — подмодули, отличные от A_{12}, причем RA_{12} — максимальный левый A_{11}-подмодуль. Так как A_{12} — цепной A_{11}-модуль, то $R_1A_{12} \supset A_{12}R_2$. С другой стороны, $A_{12}R_2 \supset R_1A_{12}$, и, следовательно, $A_{12}R_2 = R_1A_{12}$. Таким образом, единственный правый максимальный A_{22}-подмодуль в A_{12} совпадает с единственным левым максимальным A_{11}-подмодулем в A_{12}. Аналогично $A_{21}R_1 = R_2A_{21}$.

Учитывая, что колчан кольца не меняется при переходе к кольцам, эквивалентным в смысле Мориты, на основании изложенного выше и теоремы 1.2 [7] получаем такое предложение.

Предложение 1. *Левый колчан нетерова бирядного кольца получается из правого колчана переворотом всех стрелок.*

Замечание. Отметим, что предложение 1 не выполняется даже для артиновых полуцепных справа колец. Пусть $A = \begin{pmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}$, где $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Ясно, что $K(A) = \{\rightarrow\}$, а левый колчан $K'(A) = \{\rightleftarrows\}$.

Следствие 1. *Пусть A — артиново с двух сторон кольцо, R — его радикал Джекобсона и $R^2 = 0$. Кольцо A бирядно тогда и только тогда, когда его правый колчан удовлетворяет условию теоремы* 1, *а левый колчан получается из правого переворотом всех стрелок.*

Доказательство легко следует из определения колчана и рассмотрения модулей P_iR, $i = 1, \ldots, s$.

Лемма 1. *Если из точки колчана нетерова бирядного кольца выходит одна стрелка, то главный модуль, отвечающий этой точке, является цепным.*

Доказательство. Пусть P — главный модуль, отвечающий точке, указанной в формулировке леммы. Тогда $PR/PR^2 = U$, где U — простой модуль. По определению бирядного кольца $PR = K_1 + K_2$, где K_1 и K_2 — цепные модули (возможно нулевые) такие, что $K_1 \cap K_2$ — либо нуль, либо наименьший подмодуль в PR. Если оба модуля K_1 и K_2 отличны от нуля, то PR/PR^2 не может быть простым модулем. Поэтому PR, а значит, и P — цепной модуль.

Напомним, что модуль M называется локальным, если в нем имеется наибольший собственный подмодуль. Ясно, что модуль M циклический.

Лемма 2. *Всякий локальный модуль M над полусовершенным кольцом имеет вид eA/X, где e — локальный идемпотент, $X \subset eA$.*

Доказательство следует из того, что проективное накрытие локального модуля имеет вид eA, где e — локальный идемпотент. Очевидно, что всякий образующий локального модуля имеет вид me, где $m \in M$.

2. Опишем нетеровы бирядные кольца, колчаны которых состоят из двух точек. Заметим, что среди этих колец есть кольца неограниченного модульного типа.

Пусть A — нетерово приведенное бирядное неразложимое в прямое произведение колец кольцо с радикалом Джекобсона R, колчан которого имеет две точки, $1 = e_1 + e_2$ — разложение единицы кольца A в сумму локальных идемпотентов Обозначим $\mathfrak{O}_i = e_iAe_i$, $X = e_1Ae_2$, $Y = e_2Ae_1$, R_i — радикал Джекобсона кольца $\mathfrak{O}_i$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. *Нетерово бирядное кольцо с двухточечным колчаном с точностью до изоморфизма эквивалентно в смысле Мориты одному из следующих колец A:*

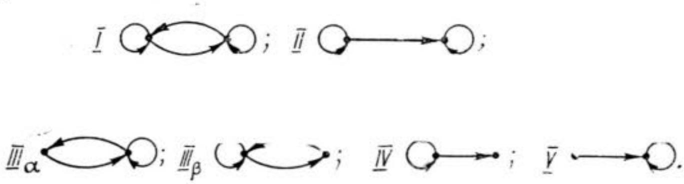
а) $A = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ Y & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$, $R_1X = XR_2$, $YR_1 = R_2Y$, $R_1^2 = 0$, $R_2^2 = 0$, $XY = 0$, $YX = 0$, R_1X — *простой A-модуль;*

б) $A = \begin{pmatrix} \mathfrak{O}_1 & X \\ Y & \mathfrak{O}_2 \end{pmatrix}$, $R_1X = XR_2 = 0$, $R_2Y = YR_1 = 0$, XY и YX *либо простые A-модули, либо равные нулю* (*не обязательно одновременно*);

в) *A — полуцепное нетерово кольцо. Кольца $\mathfrak{O}_i$ в пп* а)—б) *являются нетеровыми цепными кольцами, $i = 1, 2$, X — циклический левый $\mathfrak{O}_1$-модуль и циклический правый $\mathfrak{O}_2$-модуль, Y — циклический правый $\mathfrak{O}_1$-модуль и циклический левый $\mathfrak{O}_2$-модуль. Наоборот, все кольца такого вида бирядны.*

Доказательство. По теореме 1.2 [7] можно считать кольцо A приведенным. Кроме этого, будем предполагать, что кольцо A не полуцепное. Обозначим $P_i = e_iA$, $i = 1, 2$. Утверждения, сформулированные в конце теоремы, доказаны в предыдущем пункте. Модуль P_1R либо сумма двух цепных модулей K_1 и K_2, либо цепной модуль. Пусть модуль P_1 нецепной. Так как $K_1e_1 + K_2e_1 = R_1$ и $K_1e_2 + K_2e_2 = X$, то учитывая, что R_1 — цепной $\mathfrak{O}_1$-модуль, а X — цепной $\mathfrak{O}_2$-модуль, можно считать, что $K_1e_1 = R_1$ и $K_2e_2 = X$. Тогда $(R_1, R_1X) \subset K_1$ и $(XY, X) \subset K_2$ — цепные модули. Пусть $R_1X \neq 0$. По определению бирядного кольца модуль $K_1 \cap \cap K_2$ прост и $K_1 \cap K_2 = (R_1 \cap XY, R_1X)$. По лемме 10.3 [8] $R_1 \cap XY = 0$ и R_1X — простой модуль. Так как $R_1 \neq 0$ и $R_1 \supset XY$, то $XY = 0$. Очевидно, $L = (R_1^2, R_1X)$ — подмодуль в K_1. Ясно, что $LR = (R_1^3, R_1^2X + R_1XR_2) = (R_1^3, 0)$. Если $R_1^2 \neq 0$, то по лемме 10.3 [8] $L/LR = U_1 + U_2$, что противоречит тому, что L — цепной модуль. Обозначим $Q_1 = Ae_1$ и $Q_2 = Ae_2$. Считая левый модуль Q_2 нецепным, точно также получим, что $R_2^2 = 0$ и $YX = 0$.

Выпишем колчаны кольца A. По теореме 1 имеются следующие возможности:



По лемме 1 и предложению 1 в случаях I и II модули P_1 и Q_2 одновременно нецепные. Поэтому, если $R_1X \neq 0$, то $R_1^2 = 0$, $R_2^2 = 0$, $XY = 0$, $YX = 0$. В этом случае получаем кольцо вида а). Легко проверить, что кольца вида а) бирядны. Если $R_2Y = YR_1 \neq 0$, то перенумеровав главные модули, приходим к предыдущему случаю. Следовательно, можно считать $R_2Y = 0$, $XR_2 = 0$. Из определения бирядного кольца сразу следует, что A-модуль XY либо прост, либо нуль. То же имеет место для модуля YX. Получаем кольцо вида б). Нетрудно видеть, что кольца вида б) являются бирядными.

Итак, остается рассмотреть случаи III—V при условии, что R_1X — ненулевой модуль.

Случай III_α. По предложению 1 и лемме 1 модуль Q_2 нецепной. Поэтому $R_2^2 = 0$ и $YX = 0$. По лемме 1 модуль P_1 цепной. Следовательно, по лемме Накаямы и лемме 10.4 [8] $XY = R_1$. Так как $YX = 0$, то $XYX = R_1X = 0$. Получили противоречие. Таким образом, в случае III_α $R_1X = 0$. Случай III_β разбирается аналогично.

Случай IV. По предложению 1 и лемме 1 модуль Q_2 цепной. Модуль P_2 прост. Поэтому $R_2 = 0$ и $XR_2 = R_1X = 0$. Точно также в случае V модуль P_1 цепной и $XY = R_1 = 0$. Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

3. Рассмотрим нетеровы бирядные кольца с нулевым цоколем и нетеровы бирядные кусочные области. Кольцо, неразложимое в прямое произведение колец, будем называть неразложимым кольцом.

Т е о р е м а 3. *Нетерово бирядное неразложимое кольцо с нулевым цоколем является первичным полуцепным кольцом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о Ясно, что исходное кольцо A с радикалом Джекобсона R можно считать приведенным. Покажем, что если кольцо A имеет нулевой цоколь, то для любого идемпотента $e \in A$ цоколь кольца eAe нулевой. Будем доказывать это индукцией по числу попарно неизоморфных главных A-модулей. База индукции тривиальна. Пусть $A = P_1 \oplus \ldots \oplus P_s$ — разложение кольца A в прямую сумму главных A-модулей, $1 = e_1 + \ldots + e_s$ — соответствующее разложение единицы кольца A в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов, $e = e_1 + \ldots + e_{s-1}$, $f = e_s$, $eAe = A_1$, $fAf = A_2$, $eAf = X$, $fAe = Y$, R — радикал Джекобсона кольца A_i, $i = 1, 2$. В силу приведенности кольца A по предложению 10.1 [8]

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & X \\ Y & R_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что цоколь кольца eAe отличен от нуля. Пусть U — простой A_1-модуль, лежащий в eAe. Положим $\tilde{U} = (U, UX)$. Ясно что $\tilde{U}$ — ненулевой циклический A-модуль. Покажем, что $\tilde{U}R^2 = 0$. Действительно, $\tilde{U}R = (0, UX)$, а $\tilde{U}R^2 = (0, UXR_2)$. По теореме 2 $e_iXe_sR_2 = e_iRe_iXe_s$, $i = 1, \ldots, s-1$. Поэтому $XR_2 \subset R_1X$ и $UXR_2 \subset UR_1X = 0$, так как R_1 — радикал кольца A_1, а U— простой A_1-модуль. Следовательно, цоколь кольца eAe равен нулю и по предположению индукции для любого идемпотента g, раскладывающегося в сумму $t \leqslant s-1$ локальных попарно ортогональных идемпотентов, цоколь кольца gAg равен нулю. Точно также утверждедение доказывается для левых цоколей.

Покажем теперь, что кольцо A полуцепное. Пусть $P = e_tA$ — главный модуль и из точки колчана, отвечающей модулю P, выходят две стрелки в точки i и j ($i \neq j$ по теореме 1). Тогда $P\,(PR) = P_i \oplus P_j$ и $PR = K_1 + K_2$, где K_1 и K_2 — цепные модули, причем $P\,(K_1) = P_i$ и $P\,(K_2) = P_j$. По лемме 2 $K_1e_i \neq 0$ и $K_2e_j \neq 0$. По теореме 2 все $A_{pq} = e_pAe_q$ отличны от нуля ($p, q = 1, \ldots, s$), так как в противном случае кольцо $\begin{pmatrix} A_{pp} & A_{pq} \\ A_{qp} & A_{qq} \end{pmatrix}$ имеет ненулевой цоколь.

Рассмотрим $K_1e_iA = (K_1e_iA_{i1}, \ldots, K_1e_iA_{ii}, \ldots, K_1e_iA_{is})$. Предположим, что, $K_1A_{im} = 0$. Тогда кольцо $\begin{pmatrix} A_{ii} & A_{im} \\ A_{mi} & A_{mm} \end{pmatrix}$ имеет ненулевой цоколь. Поэтому $K_1A_{ip} \neq 0$ и точно так же $K_2A_{jp} \neq 0$ при $p = 1, \ldots, s$. Следовательно, $K_1A_{ip} \cap K_2A_{jp} = 0$ при всех p. Снова в кольце A есть ненулевой цоколь. Поэтому из каждой точки колчана выходит не более одной стрелки и по лемме 1 кольцо A полуцепное справа. Точно так же оно полуцепное слева. По теореме 2.11 [2] кольцо A, удовлетворяющее условию теоремы, является первичным полуцепным кольцом. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению нетеровых бирядных кусочных областей. Напомним, что полусовершенное кольцо называется кусочной областью, если любой ненулевой гомоморфизм главных модулей является мономорфизмом [10]. В частности, полусовершенное наследственное кольцо является кусочной областью.

Теорема 4. *Нетерова бирядная кусочная область распадается в прямое произведение первичных наследственных полуцепных колец и артиновой бирядной кусочной области.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 2. По этой теореме нетерова бирядная кусочная область, единица которой является суммой двух локальных идемпотентов, является либо первичным наследственным полуцепным кольцом, либо изоморфна кольцу верхних треугольных матриц над некоторым телом.

Предположим теперь, что A — артинова бирядная кусочная область. Будем считать кольцо A приведенным и неразложимым.

Пусть $A = (A_{ij})$ — двустороннее пирсовское разложение кольца A относительно разложения единицы в сумму попарно ортогональных локальных идемпотентов. По теореме 2 кольца эндоморфизмов главных A-модулей изоморфны между собой и изоморфны телу D. По той же теореме A_{ij} — либо нуль, либо является одномерным левым и правым D-пространством. Если из точки i в точку j есть стрелка, то $A_{ij} \neq 0$. Такой стрелке сопоставим A_{ij}. В силу того, что A является кусочной областью, то $A_{pq} \neq 0$ тогда и только тогда, когда из точки p в точку q ведет путь $p \to i_1 \to i_2 \to \ldots \to i_t \to q$. Такому пути сопоставим произведение $A_{pq} = A_{pi_1}A_{i_1i_2} \ldots A_{i_tq}$.

Нетрудно показать, что колчан кольца A удовлетворяет следующим свойствам (см. также [7]):

1) из каждой точки выходит не более двух стрелок;

2) в каждую точку входит не более двух стрелок;

3) если из точки выходит стрелка, то в нее входит не более одной стрелки;

4) если в точку входит стрелка, то из нее выходит не более одной стрелки;

5) колчан не содержит ориентированных циклов;

6) если из точки в другую точку ведут два пути, то произведения пирсовских компонент, соответствующие первому и второму пути, равны между собой.

Есть всего два типа конечных графов удовлетворяющих свойствам 1—6. Это либо неориентированная цепь (т. е. направление стрелок произвольно), либо неориентированный цикл, отличный от ориентированного.

Отсюда получаем такую теорему.

Теорема 5. *Колчан артиновой бирядной кусочной области есть либо неориентированная цепь, либо неориентированный цикл, который не может быть ориентированным циклом. Если в цикле из одной точки в другую ведут два пути, то произведения пирсовских компонент, соответствующие первому и второму пути, равны между собой.*

В заключение приведем пример бирядной артиновой кусочной области, которая не является наследственным кольцом. Рассмотрим кольцо A матриц над телом D следующего вида:

$$A = \begin{pmatrix} D & D & D & D \\ 0 & D & 0 & D \\ 0 & 0 & D & D \\ 0 & 0 & 0 & D \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что A — артинова бирядная кусочная область, причем модуль $(0, D, D, D)$ не проективен.

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I // Manuseripta Math.— 1972.— **6**.— P. 71—103.
2. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца.— Киев, 1975.—58 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 75.1).
3. *Кириченко В. В.* Обобщенно однорядные кольца // Мат. сб.— 1976.—**99**, № 4.— С. 559—581.
4. *Fuller K. R.* Weakly symmetric rings of distributive module type // Communs Algebra.— 1977.— N 5.— P. 997—1008.
5. *Fuller K. R.* On a generalization of serial rings // Proc. of the Philadelphia Conf. on Rep. Thy.— Dekker : Lecture Notes in Pure and Appl. Math.— 1978.— **37**.— P. 359—368.
6. *Nakayama T.* On Frobeniusen algebras II // Ann. Math.— 1941.— **42**, N 1.— P.1—22.
7. *Кириченко В. В., Костюкевич П. П.* Бирядные кольца // Укр. мат. журнал.— 1986.— 38, № 6.— С. 718—723.
8. *Кириченко В. В.* Кольца и модули .— Киев : Изд-во Киев. ун-та, 1981.— 64 с.
9. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры.— Киев : Вища шк., 1980.— 190 с.
10. *Gordon Robert, Small L. W.* Piecewise domains // J. Algebra.— 1972.— **23**, N 3.— P. 553—564.

Киев. ун-т — Получено 07.04.87