УДК 517.5

П. В. Задерей

Сходимость линейных средних кратных рядов Фурье непрерывных функций

Пусть $\mathbf{E}^m$ — m-мерное вещественное евклидово пространство с элементами $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $\mathbb{Z}_+^m = \{k : k \in \mathbf{E}^m,\ k_i = 0, 1, \ldots,\ i=\overline{1,m}\}$, $\mathbb{N}^m = \{n : n \in \mathbf{E}^m,\ n_i = 1, 2, \ldots,\ i = \overline{1,m}\}$, $M = 1, 2, \ldots, m\}$, $M \diagdown B$ — дополнение множества $B \subset M$ к M, $|B|$ — число элементов множества B, $T^m = (-\pi, \pi]^m$, $T_0^m = [0, \pi]^m$, $P_n^m = \{k \in \mathbb{Z}_+^m : 0 \leqslant k_j \leqslant n_j,\ j = \overline{1,m}\}$, γ_{k_B} — число координат вектора $k_B = (k_{j_1}, k_{j_2}, \ldots, k_{j_s})$, $(B = \{j_1, \ldots j_s\})$, равных нулю, $\gamma_{k_M} = \gamma_k$, $k \in \mathbb{Z}_+^m$.

Через $a_{k_B, n_{M \diagdown B}}$ и $a_{n_B - k_B, k_{M \diagdown B}}$ будем обозначать члены m-мерной последовательности с индексами k_i и $n_i - k_i$ при $i \in B \subset M$, а при $i \in M \diagdown B$ с индексами n_i и k_i. Символом $\sum\limits_{\substack{k_i = l_i \\ i \in B}}^{p_i} a_k$ $(B = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\})$ будем обозначать сумму $\sum\limits_{k_{j_1} = l_{j_1}}^{p_{j_1}} \sum\limits_{k_{j_2} = l_{j_2}}^{p_{j_2}} \ldots \sum\limits_{k_{j_s} = l_{j_s}}^{p_{j_s}} a_{k_B, k_{M \diagdown B}}$, $(a_{k_B, k_{M \diagdown B}} = a_k)$. Если $B = M$, то вместо $\sum\limits_{\substack{k_i = l_i \\ i \in M}}^{p_i} a_k$ будем писать $\sum\limits_{k=l}^{p} a_k$.

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических по каждой переменной функций и

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\gamma_k} A_k(f; x) \tag{1}$$

— ряд Фурье функции $f(x) \in C_{2\pi}$, где

$$\begin{gathered} A_k(f; x) = \sum_{\substack{l_j = 0,1 \\ j = \overline{1,m}}} a_k^l(f) \prod_{j \in M} \cos\left(k_j x_j - l_j \frac{\pi}{2}\right), \\ a_k^l(f) = \pi^{-m} \int\limits_{T_m} f(t) \prod_{j \in M} \cos\left(k_j t_j - l_j \frac{\pi}{2}\right) dt. \end{gathered} \tag{2}$$

С помощью матрицы чисел $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n \in P_{n-1}^m$ каждой непрерывной функции $f(x)$ поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов порядка $n-1 \in \mathbb{N}^m$

$$U_n(f;\, x,\, \Lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} \lambda_k^{(n)} A_k(f;\, x). \tag{3}$$

Учитывая (2), (3) и проводя элементарные преобразования, находим

$$U_n(f;\, x,\, \Lambda) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(x+t)\, \mathscr{K}_n(t)\, dt, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{K}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} \lambda_k^{(n)} \prod_{i \in M} \cos k_i t_i \tag{5}$$

Таким образом, каждая матрица Λ порождает некоторый Λ-метод суммирования ряда Фурье (1).

Метод суммирования Λ называется регулярным в пространстве непрерывных функций $C_{2\pi}$, если для каждой функции $f(x) \in C_{2\pi}$ в каждой точке x выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;\, x,\, \Lambda) = f(x) \quad ((n \to \infty) \Rightarrow (\min_{n_i} n_i \to \infty)). \tag{6}$$

Как известно (см., например, [1, с. 489]), для того чтобы метод Λ был регулярным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^m, \tag{7}$$

и

$$\mathscr{L}_n(\Lambda) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{T_0^m} |\mathscr{K}_n(t)|\, dt \leqslant C \quad \forall n \in \mathbb{N}^m. \tag{8}$$

Здесь и везде в дальнейшем через C обозначены абсолютные постоянные, возможно разные в различных формулах.

Условия (7) и (8) для сингулярных интегралов вида (4) были установлены А. Лебегом [2]. Проверка условия (7) для конкретных методов не представляет трудностей, проверка условия (8), наоборот, достаточно трудна для большинства методов.

С. М. Никольский [3] поставил следующую задачу: найти достаточные условия, выраженные непосредственно через числа $\lambda_k^{(n)}$ (или их разности), при выполнении которых величины $\mathscr{L}_n(\Lambda)$ являются ограниченными. Он решил эту задачу в случае, когда коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{Z}_+^1$, $n \in \mathbb{N}^1$, образуют выпуклую или вогнутую последовательность, т. е.

$$\Delta^2 \lambda_k^{(n)} = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)} \geqslant 0 \quad (\leqslant 0). \tag{9}$$

В [3] показано, что для ограниченности величин $\mathscr{L}_n(\Lambda)$ при условии выполнения (9), необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k^{(n)}}{n-k} \right| \leqslant C. \tag{10}$$

Работа С. М. Никольского [3] вызвала ряд публикаций, в которых ее результаты развивались в нескольких направлениях. Одним из таких направлений является замена условия (9) более слабым. Этому посвящены работы Б. Надя [4], Караматы и Томича [5], А. В. Ефимова [6], С. А. Теляковского [7], Г. А. Фомина [8], Л. В. Тайкова [9], Я. С. Бугрова [10], Р. М. Тригуба [11, 12] и др. Обзор результатов в этом направлении содержится в упомянутых работах, а также в обзорной статье Н. П. Корнейчука [13].

В работах И. В. Матвеева [14], В. Б. Гришина [15], Я. С. Бугрова [10], Г. К. Лебедя [16], Р. М. Тригуба [17, 18] и др. задача С. М. Никольского рассматривалась для функций многих переменных.

Отметим, что сравнение полученных в данном направлении результатов зачастую сопряжено со значительными трудностями, поскольку они формулируются хотя и в подобных, но все же в различных терминах. Однако даже те результаты, которые впоследствии были обобщены, не теряют своего значения, поскольку, как правило, более общие условия регулярности являются и более трудно проверяемыми.

Настоящая работа посвящена распространению на многомерный случай результатов С. А. Теляковского [7] об условиях регулярности Λ-метода, которые к настоящему времени считаются одними из самых общих.

Чтобы сформулировать основной результат настоящей работы, введем некоторые обозначения.

Обозначим через $\Delta_1^j a_k$ первую, а через $\nabla_{l_j}^j a_k$ первую, симметрическую разности по индексу k_j соответственно с шагом 1 и $2l_j$, т. е. $\Delta_1^j a_k = a_k - a_{k_{M\setminus\{j\}},k_j+1}$, $\nabla_{l_j}^j a_k = a_{k_{M\setminus\{j\}},k_j-l_j} - a_{k_{M\setminus\{j\}},k_j+l_j}$, $j = \overline{1,m}$. Пусть далее

$$\Delta_1^{i,j} a_k = \Delta_1^i(\Delta_1^j a_k), \quad \Delta_1^B a_k = \Delta_1^{B\setminus\{j\}}(\Delta_1^j a_k), \quad \Delta_1^M a_k = \Delta_1^{M\setminus B}(\Delta_1^B a_k),$$

$$\nabla_{l_i,l_j}^{i,j} a_k = \nabla_{l_i}^i(\nabla_{l_j}^j a_k), \quad \nabla_{l_B}^B a_k = \nabla_{l_{B\setminus\{j\}}}^{B\setminus\{j\}}(\nabla_{l_j}^j a_k), \quad \nabla_l^M a_k = \nabla_{l_{M\setminus B}}^{M\setminus B}(\nabla_{l_B}^B a_k),$$

$$\Delta_1^{\varnothing} a_k = \nabla_{l_\varnothing}^{\varnothing} a_k = a_k.$$

Символом $\prod_{i\in B} x_i$ обозначим произведение $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_s}$, где $B = \{j_1, j_2, \ldots, j_s\}$ и положим $\prod_{i\in\varnothing} x_i = 1$.

Пусть везде в дальнейшем $\mu_i = [n_i/3]$, $\nu_i = n_i - \mu_i$, $i \in M$, а

$$h_n(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in P_\mu^m; \\ \prod\limits_{i\in G} \dfrac{\nu_i - k_i}{\nu_i - \mu_i}, & \text{если } \mu_G \leqslant k_G \leqslant \nu_G, \quad 0 \leqslant k_{M\setminus G} \leqslant \mu_{M\setminus G}, \quad G \subset M; \\ 0, & \text{если } k \in P_{n-1}^m \setminus P_\nu^m. \end{cases}$$

Здесь и в дальнейшем при включении $G \subset M$ возможность равенства $G = M$ не исключается, а неравенство $\mu_G \leqslant k_G \leqslant \nu_G$ означает, что $\mu_i \leqslant k_i \leqslant \nu_i$ при всех $i \in G$.

Отправляясь от последовательности $\{a_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+^m$ определим 2^m последовательностей $a^{(B)} = \{a_k^{(B)}\}$ следующим образом: $a_k^{(B)} = a_{n_B-k_B,k_{M\setminus B}} h_n(k)$, $B \subset M$.

Согласно принятым обозначениям

$$a_k = \sum_{B\subset M} a^{(B)}_{n_B-k_B,k_{M\setminus B}} = \sum_{B\subset M} a_k h_n(n_B - k_B, k_{M\setminus B}).$$

Положим для $B \subset M$ и $G \subset M$, $B \cap G = \varnothing$

$$\delta_{B;G}^n(a) = \delta_{B;G}^{(n_1,n_2,\ldots,n_m)}(a) := \sum_{\substack{k_i=1\\ i\in B}}^{n_i-1} \sum_{\substack{k_j=2\\ j\in G}}^{n_j-2} \sum_{\substack{k_s=0\\ s\in M\setminus(B\cup G)}}^{n_s-1} \prod_{i\in B} \frac{1}{k_i} \times$$

$$\times \Bigl| \sum_{\substack{l_j=1\\ j\in G}}^{[k_j/2]} (\nabla_{l_G}^G(\Delta_1^{M\setminus B} a_k) \prod_{j\in G} l_j^{-1} \Bigr|, \quad n \in \mathbb{N}^m.$$

Если $G=\varnothing$, то положим $\delta^n_{B;\varnothing}(a)=\eta^n_B(a)$, т. е.

$$\eta^n_B(a):=\sum_{\substack{k_i=1\\ i\in B}}^{n_i-1}\ \sum_{\substack{k_s=0\\ s\in M\setminus B}}^{n_s-1}\ \prod_{i\in B}\frac{1}{k_i}\,|\Delta_1^{M\setminus B}a_k|.$$

Пусть далее $r_{k_j,n_j}=\min([k_j/2],[(n_j-k_j)/2]$, а

$$\bar\delta^{n;r}_{B;G}(a):=\sum_{\substack{k_i=1\\ i\in B}}^{n_i-1}\sum_{\substack{k_j=2\\ j\in G}}^{n_j-2}\ \sum_{\substack{k_s=0\\ s\in M\setminus(B\cup G)}}^{n_s-1}\ \prod_{i\in B}\frac{1}{k_i}\left|\sum_{\substack{l_j=1\\ j\in G}}^{r_{k_j,n_j}}(\nabla^G_{l_G}(\Delta_1^{M\setminus B}a_k)\prod_{j\in G}l_j^{-1}\right|,$$

$$\bar\delta^{n;r}_{B;\varnothing}(a)=\eta^n_B(a).$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение, которое является многомерным аналогом теоремы 3 из [7].

Теорема 1. *Если для матрицы* $a=\{a^{(n)}_k\}=\{a_k\}$, $n,k\in\mathbb{Z}^m_+$, $a_k=0$, $k\in\mathbb{Z}^m_+\setminus P^m_{n-1}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{D,G\subset M}\bar\delta^{n;r}_{D;G}(a(D))\leqslant C,\quad D\cap G\ \varnothing,\quad D\neq M,$$

где через $a(D)$ *обозначена последовательность* $\{a_{n_D-k_D,k_{M\setminus D}}\}$, *то для того чтобы для любой* $f\in C_{2\pi}$ *в каждой точке* x (*или равномерно по* x) *было справедливо равенство* (6), *необходимо и достаточно выполнение* (7) *и условия*

$$\eta^n_M(a(M))=\sum_{k=1}^{n-1}|a_{n-k}|\prod_{i\in M}k_i^{-1}\leqslant C. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость этих условий следует из приведенного ниже утверждения.

Теорема 2. *Для любого тригонометрического полинома вида* (5) (*при* $\lambda^{(n)}_k=a_k$) *выполняется неравенство*

$$\mathscr{L}_n(a)=\int_{T^m_0}|\mathscr{K}_n(t)|\,dt\geqslant\pi^{-m}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\prod_{j\in M}(n_j-k_j)^{-1}.$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\Delta^m=\{z=(z_1,z_2,\ldots,z_m):$ $:|z_j|=|x_j+iy_j|<1,\quad j=\overline{1,m}\}$, $z^k:=z_1^{k_1}z_2^{k_2}\ldots z_m^{k_m}$, $re^{it}=(r_1e^{it_1},r_2e^{it_2},\ldots$ $\ldots,r_me^{it_m})$, $0\leqslant r\leqslant 1$, $(0\leqslant r_j\leqslant 1,\ j=\overline{1,m})$, $r^k:=r_1^{k_1}r_2^{k_2}\ldots r_m^{k_m}$, а H^m_1 — класс регулярных в Δ^m функций $f(z)$ таких, что

$$\sup_{0\leqslant r<1}\int_{T^m}|f(re^{it})|\,dt<\infty.$$

В [19] (лемма 2) доказано, что если $\Phi(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^m_+}b_kz^k\in H^m_1$, то

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m_+}|b_k|\prod_{j\in M}(k_j+1)^{-1}\leqslant 2^{-m}\int_{T^m}|\Phi(e^{it})|\,dt<\infty. \tag{12}$$

Представим $\mathscr{K}_n(t)$ в виде

$$\mathscr{K}_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\prod_{j=1}^m\frac{1}{2}(e^{ik_jt_j}+e^{-ik_jt_j})=2^{-m}\sum_{k=-n+1}^{n-1}a_ke^{i(k,t)},$$

где $a_{k_{M\setminus\{j\}},k_j}=a_{k_{M\setminus\{j\}},-k_j}$, $j=1,2,\ldots,m$, $(k,t)=\sum_{j=1}^m k_jt_j$.

Тогда

$$\int_{T_0^m} |\mathscr{K}_n(t)|\, dt = \frac{1}{2^{2m}} \int_{T^m} \Big| \sum_{k=-n+1}^{n-1} a_k e^{i(k,t)} \Big| dt = \frac{1}{2^{2m}} \int_{T^m} \Big| \sum_{k=-n+1}^{n-1} a_k e^{i(k+n-1,t)} \Big| dt.$$

Поскольку

$$p_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2(n-1)} a_{k-n+1} z^k \in H_1^m,$$

то согласно неравенству (12) имеем

$$\int_{T_0^m} |\mathscr{K}_n(t)|\, dt = \frac{1}{2^{2m}} \int_{T^m} | p_{2n}(e^{it}) |\, dt \geqslant \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2(n-1)} | a_{k-n+1} | \prod_{j \in M} (k_j+1)^{-1} >$$

$$> \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{n-1} | a_k | \prod_{j \in M} (n_j - k_j)^{-1}.$$

Теорема 2 доказана

Достаточность условий (11) теоремы 1 вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. *Для тригонометрического полинома*

$$\mathscr{K}_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} a_k \prod_{i \in M} \cos k_i x_i$$

справедливо неравенство

$$\mathscr{L}_n(a) \leqslant C \Big(\sum_{\substack{D,G \subset M \\ D \neq M}} \bar{\delta}^{n;r}_{D;G}(a(D)) + \eta_M(a(M)) \Big).$$

Доказательство. В силу равенства (10) имеем

$$\int_{T_0^m} |\mathscr{K}_n(t)|\, dt = \int_{T_0^m} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} \sum_{B \subset M} a^{(B)}_{n_B - k_B, k_M} \prod_{i \in M} \cos k_i x_i \Big| dx =$$

$$= \int_{T_0^m} \Big| \sum_{B \subset M} \sum_{\substack{k_i=1 \\ i \in B}}^{n_i-1} \sum_{\substack{k_j=0 \\ j \in M \setminus B}}^{n_j-1} 2^{-\nu_{k_{M \setminus B}}} a_k^{(B)} \prod_{i \in B} \cos(n_i - k_i) x_i \prod_{j \in M \setminus B} \cos k_j x_j \Big| dx.$$

Так как

$$\prod_{i \in B} \cos(n_i - k_i) x_i = \sum_{G \subset B} \prod_{i \in G} \cos n_i x_i \cos k_i x_i \prod_{i \in B \setminus G} \sin n_i x_i \sin k_i x_i,$$

то

$$\mathscr{L}_n(a) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{T_0^m} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} \sum_{B \subset M} a_k^{(B)} \sum_{G \subset B} \prod_{i \in G} \cos n_i x_i \prod_{i \in B \setminus G} \sin n_i x_i \times$$

$$\times \prod_{i \in M \setminus (B \setminus G)} \cos k_i x_i \prod_{i \in B \setminus G} \sin k_i x_i \Big| dx,$$

или, положив $B \setminus G = \mathscr{H}$, будем иметь

$$\mathscr{L}_n(a) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \int_{T_0^m} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\nu_k} \sum_{B \subset M} a_k^{(B)} \sum_{\mathscr{H} \subset B} \prod_{i \in B \setminus \mathscr{H}} \cos n_i x_i \prod_{i \in \mathscr{H}} \sin n_i x_i \times$$

$$\times \prod_{i \in M \setminus \mathscr{H}} \cos k_i x_i \prod_{i \in \mathscr{H}} \sin k_i x_i \Big| dx.$$

После перегруппировки слагаемых найдем

$$\mathscr{L}_n(a) \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \sum_{\mathscr{H}\subset M} \int_{T_0^m} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\gamma_k} \Big(\sum_{\substack{B\subset M \\ B\supset \mathscr{H}}} a_k^{(B)} \sum_{\mathscr{H}\subset B} \prod_{i\in B\setminus \mathscr{H}} \cos n_i x_i \prod_{i\in \mathscr{H}} \sin n_i x_i \Big) \times$$

$$\times \prod_{i\in M\setminus \mathscr{H}} \cos k_i x_i \prod_{i\in \mathscr{H}} \sin k_i x_i \Big| \, dx.$$

Пусть

$$\sum_{\substack{B\subset M \\ B\supset \mathscr{H}}} a_k^{(B)} \prod_{i\in \mathscr{H}} \sin n_i x_i \prod_{i\in B\setminus \mathscr{H}} \cos n_i x_i = q_k(x, \mathscr{H}) = q_k(\mathscr{H}) = q_k, \tag{13}$$

тогда

$$\mathscr{L}_n(a) \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\right)^m \sum_{\mathscr{H}\subset M} \int_{T_0^m} \Big| \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-\gamma_k} q_k \prod_{i\in \mathscr{H}} \sin k_i x_i \prod_{i\in M\setminus \mathscr{H}} \cos k_i x_i \Big| \, dx.$$

Для оценки правой части последнего неравенства воспользуемся результатами работы [19] (теоремы 1 — 3). При этом будем иметь $\mathscr{L}_n(a) \leqslant C \sum_{\mathscr{H}\subset M} \sum_{D\subset \mathscr{H}, G\subset M} \delta_{D;G}^{\infty}(q)$, $D\cap G = \varnothing$, $q = \{q_k\}$. Учитывая равенство (13), из последнего соотношения находим

$$\mathscr{L}_n(a) \leqslant C \sum_{\mathscr{H}\subset M} \sum_{D\subset \mathscr{H}, G\subset M} \sum_{B\supset \mathscr{H}} \delta_{D;G}^{\infty}(a^{(B)}), \quad D\cap G = \varnothing. \tag{14}$$

Для завершения доказательства теоремы 3 достаточно оценить правую часть (14) через сумму $\bar{\delta}_{D;G}^{n;r}(a)$. Сформулируем эту оценку в виде следующего утверждения.

Лемма 1. *Если последовательность действительных чисел $\{a_k\}$, $k\in \mathbb{Z}_+^m$, удовлетворяет условию: $a_k = 0$ при $k\in \mathbb{Z}_+^m \setminus P_{n-1}^m$, то*

$$\sum_{\mathscr{H}\subset M} \sum_{D\subset \mathscr{H}, G\subset M} \sum_{B\supset \mathscr{H}} \delta_{D;G}^{\infty}(a^{(B)}) \leqslant C \sum_{D;G\subset M} \bar{\delta}_{D;G}^{n;r}(a(D)),$$

где через $a(D)$ обозначена последовательность $\{a_{n_D - k_D, k_{M\setminus D}}\}$, $k\in P_{n-1}^m$.

При доказательстве этой леммы ипользуется лемма 2, которая имеет, по нашему мнению, и самостоятельный интерес.

Лемма 2. *Для любой последовательности действительных чисел $\{a_k\}$, $k\in \mathbb{Z}_+^m$, имеет место оценка*

$$\delta_{D;G}^{\infty}(a) \leqslant C \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus (D\cup G)}}^{\infty} \prod_{i\in D} \frac{1}{k_i} \prod_{j\in G} k_j \left| \Delta_1^G (\Delta_1^{M\setminus D} a_k) \right|,$$

для $D\subset M$, $G\subset M$, $D\cap G = \varnothing$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству соответствующих утверждений из [7]. Поскольку справедливо соотношение

$$|\Delta_{l_G}^G (\Delta_1^{M\setminus D} a_k)| = \Big| \sum_{q_i=k_i-l_i}^{k_i+l_i-1} \Delta_1^G (\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G, k_{M\setminus G}}) \Big| \leqslant \sum_{\substack{q_i=k_i-l_i \\ i\in G}}^{k_i+l_i-1} |\Delta_1^G (\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G, k_{M\setminus G}})|,$$

то, изменяя порядок суммирования, находим

$$\delta_{D;G}^{\infty}(a) \leqslant \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=2 \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus (D\cup G)}}^{\infty} \prod_{i\in D} \frac{1}{k_i} \sum_{\substack{l_j=1 \\ j\in G}}^{[k_j/2]} \sum_{\substack{q_j=k_j-l_j \\ j\in G}}^{k_j+l_j-1} \Big| \Delta_1^G (\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G, k_{M\setminus G}}) \prod_{j\in G} \frac{1}{l_j} \Big| =$$

$$= \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \sum_{\substack{l_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=2l_j \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus(D\cup G)}}^{\infty} \prod_{i\in D}\frac{1}{k_i}\prod_{j\in G}\frac{1}{l_j} \sum_{q_j=k_j-l_j}^{k_j+l_j-1} |\Delta_1^G(\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G,k_{M\setminus G}})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \prod_{i\in D}\frac{1}{k_i} \sum_{\substack{l_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \prod_{j\in G}\frac{1}{l_j} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus(D\cup G)}}^{\infty} \sum_{\substack{q_j=l_j \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{k_j=q_j-l_j+1 \\ j\in G}}^{q_j+l_j} |\Delta_1^G(\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G,k_{M\setminus G}})| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \prod_{i\in D}\frac{1}{k_i} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus(D\cup G)}}^{\infty} \sum_{\substack{l_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{q_j=l_j \\ j\in G}}^{\infty} |\Delta_1^G(\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G,k_{M\setminus G}})| =$$

$$= C \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \prod_{i\in D}\frac{1}{k_i} \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus(D\cup G)}}^{\infty} \sum_{\substack{q_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \sum_{\substack{l_j=1 \\ j\in G}}^{q_j} |\Delta_1^G(\Delta_1^{M\setminus D} a_{q_G,k_{M\setminus G}})| =$$

$$= C \sum_{\substack{k_i=1 \\ i\in D}}^{\infty} \prod_{i\in D}\frac{1}{k_i} \sum_{\substack{k_j=1 \\ j\in G}}^{\infty} \prod_{j\in G} k_j \sum_{\substack{k_s=0 \\ s\in M\setminus(D\cup G)}}^{\infty} |\Delta_1^G(\Delta_1^{M\setminus D} a_k)|.$$

Лемма 2 доказана.

Полное доказательство леммы 1 приведено в работе [20].

1. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
2. *Lebesque A.* Sur les integrales singulieres // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys.— 1909.— **1**, N 3.— P. 25—117.
3. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1948.— **12**, № 3.— С. 259—278.
4. *Nagy B.* Methodes de sommation des series de Fourier. I // Acta Sci. Math. Szeged.— 1950. — **12**, psB.— P. 204—210.
5. *Karamata J., Tomic M.* Sur la sommation des series de Fourier // Глассрпске Акад. наука.— 1953.— **206**, № 5.— С. 89—126.
6. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— **24**, № 5.— С. 743—756.
7. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье.// Там же.— 1964.— **28**, № 6.— С. 1209—1236.
8. *Фомин Г. А.* О константах Лебега линейных методов суммирования рядов Фурье / Там же.— 1967.— **31**, № 5.— С. 1133—1148.
9. *Тайков Л. В.* Новые признаки регулярности треугольных методов суммирования // Мат. заметки.— 1967.— **1**, № 5.— С. 541—548.
10. *Bugrov Ya. S.* On linear summation methodes of Fourier series // Anal. math.— 1979.— **5**, N 2.— P. 119—133.
11. *Тригуб Р. М.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье / Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 1.— С. 24—49.
12. *Тригуб Р. М.* Об интегральных нормах полиномов // Мат. сб.— 1976.— **101**, № 3.— С. 315—333.
13. *Корнейчук Н. П.* С. М. Никольский и развитие исследований по теории приближения функций в СССР // Успехи мат. наук.— 1985.— **40**, № 5.— С. 71—131.
14. *Матвеев И. В.* О методах суммирования двойных рядов Фурье для функций двух переменных // Мат. сб.— 1951.— **29**, № 1.— С. 185—196.
15. *Гришин В. Б.* О линейных методах суммирования двойных рядов Фурье и наилучшие приближения периодических функций двух переменных // Допов. АН УРСР.— 1964.— № 2.— С. 151—155.
16. *Лебедь Г. К.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость двойных рядов Фурье//Изв. вузов. Математика. — 1971. — № 12. — С. 91—102.
17. *Тригуб Р. М.* Линейные методы суммирования простых и кратных рядов Фурье и их аппроксимативные свойства // Теория приближения функций.— М. : Наука, 1977.— С. 383—390.
18. *Trigub R. M.* Summability of multiple Fourier series. Growth of Lebesque contants // Anal. math.— 1980.— **6**, N 3.— P. 255—267.

19. *Задерей П. В.* Условия интегрируемости кратных тригонометрических рядов.— Киев. 1986.— 48 с. —(Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 86.20).
20. *Задерей П. В.* Сходимость линейных средних кратных рядов Фурье непрерывных функций.— Киев, 1986.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 86. 67).

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 18.10.86