УДК 517.928

Т. П. Яценко

Асимптотическое исследование линейно-квадратичной задачи управления

Исследование сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач управления на конечном промежутке времени проводилось ранее методом пограничных функций в ряде работ (см. обзор [1]), в частности наиболее полное решение содержится в диссертации [2]. Метод усреднения применялся для построения асимптотического решения линейно-квадратичной задачи управления стандартными системами в [3].

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\mathcal{J}[u] = \frac{1}{2} y' F y(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \frac{1}{2} \varepsilon \int_0^{\varepsilon^{-1}} (y' \mathcal{P}(t) y + u' R(t) u)\, dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \varepsilon (a_{11}(t) x + a_{12}(t) z + b_1(t) u), \quad \varepsilon \dot{z} = a_{21}(t) x + a_{22}(t) z + b_2(t) u, \tag{2}$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0, \; z(0, \varepsilon) = z^0, \tag{3}$$

где $y = (x', z')'$, штрих означает транспонирование, $x \in E^n$, $z \in E^m$, $u \in E^r$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

В данной работе для задачи (1)—(3) с помощью метода пограничных функций и метода усреднения построено асимптотическое разложение решения на асимптотически большом промежутке времени.

По смыслу задачи должно быть выполнено следующее условие.

I. Матрицы F, $\mathcal{P}(t)$ положительно полуопределены, $R(t)$ положительно определена, где

$$\mathcal{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_1(t) & \mathcal{P}_2(t) \\ \mathcal{P}_2'(t) & \mathcal{P}_3(t) \end{pmatrix}, \quad R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_2'(t) & R_3(t) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2' & F_3 \end{pmatrix}.$$

Для упрощения выкладок предположим также, что F_3 положительно определена.

Будем решать задачу (1)—(3) с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина. Заметим, что для задач подобного типа он будет как необходимым, так и достаточным условием оптимальности. Оптимальное управление согласно принципу максимума равно

$$u^*(t, \varepsilon) = R^{-1}(t) (b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2)(t, \varepsilon), \tag{4}$$

где ψ_1 и $\tilde{\psi}_2 = \varepsilon^2 \psi_2$ — сопряженные переменные. Тогда краевая задача принципа максимума примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon (a_{11}(t) x + a_{12}(t) z + S_1(t) \psi_1 + S_2(t) \psi_2), \\ \dot{\psi}_1 &= \varepsilon (\mathcal{P}_1(t) x + \mathcal{P}_2(t) z - a_{11}'(t) \psi_1 - a_{21}'(t) \psi_2), \\ \varepsilon \dot{z} &= a_{21}(t) x + a_{22}(t) z + S_2'(t) \psi_1 + S_3(t) \psi_2, \\ \varepsilon \dot{\psi}_2 &= \mathcal{P}_2'(t) x + \mathcal{P}_3(t) z - a_{12}'(t) \psi_1 - a_{22}'(t) \psi_2, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} x(0, \varepsilon) = x^0, \; z(0, \varepsilon) = z^0, \; \psi_1(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= -F_1 x(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) - F_2 z(\varepsilon^{-1}, \varepsilon), \\ \varepsilon^2 \psi_2(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) &= -F_2' x(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) - F_3 z(\varepsilon^{-1}, \varepsilon), \end{aligned} \tag{6}$$

где $S_1 = b_1 R^{-1} b_1'$, $S_2 = b_1 R^{-1} b_2'$, $S_3 = b_2 R^{-1} b_2'$.

Предположим выполненными следующие условия.

II. Матрицы $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, i, $j = 1, 2$, $\mathcal{P}(t)$, $R(t)$ 2π-периодические, $(k+2)$ раза дифференцируемые.

III. Для каждого фиксированного $t \in [0, \varepsilon^{-1}]$ пара $\{a_{22}(t), b_2(t)\}$ вполне управляема, а пара $\{C(t), a_{22}(t)\}$ вполне наблюдаема, где $C'C = \mathcal{P}_3$.

Введем в рассмотрение матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$-Ka_{22}(t) - a'_{22}(t)K + KS_3(t)K - \mathcal{P}_3(t) = 0.$$

Известно [1], что при выполнении условия III существуют $M(t)$ (единственное положительно определенное решение уравнения Риккати), а также $N(t)$ (единственное отрицательно определенное решение) такие, что собственные значения матриц $\alpha(t) = a_{22}(t) - S_3(t)M(t)$ и $\beta(t) = a_{22}(t) - S_3(t)N(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re}\lambda(\alpha(t)) \leqslant -\sigma < 0, \ \operatorname{Re}\lambda(\beta(t)) \geqslant \sigma > 0, \ t \in [0, \varepsilon^{-1}]. \tag{7}$$

Такое независящее от ε σ найдется в силу 2π-периодичности коэффициентов уравнения Риккати. Кроме того, существует матрица

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E \\ -M(t) & -N(t) \end{pmatrix}$$

такая, что

$$B^{-1}(t)G(t)B(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где

$$G(t) = \begin{pmatrix} a_{22}(t) & S_3(t) \\ \mathcal{P}_3(t) & -a'_{22}(t) \end{pmatrix},$$

причем $\det B_{11}(0) \neq 0$, $\det B_{22}(\varepsilon^{-1}) \neq 0$. Будем строить асимптотическое разложение решения краевой задачи (5), (6) в виде [4]

$$Y(t, \varepsilon) = \overline{Y}(t, \varepsilon) + \Pi Y(\tau_0, \varepsilon) + QY(\tau_1, \varepsilon), \tag{9}$$

где $\tau_0 = t\varepsilon^{-1}$, $\tau_1 = (t - \varepsilon^{-1})\varepsilon^{-1}$, $Y(t, \varepsilon)$ — совокупный вектор четырех переменных x, z, ψ_1, ψ_2,

$$\overline{Y}(t, \varepsilon) = \overline{Y}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon\overline{Y}_1(t, \varepsilon) + \ldots,$$
$$\Pi Y(\tau_0, \varepsilon) = \Pi_0 Y(\tau_0, \varepsilon) + \varepsilon\Pi_1 Y(\tau_0, \varepsilon) + \ldots,$$
$$QY(\tau_1, \varepsilon) = Q_0 Y(\tau_1, \varepsilon) + \varepsilon Q_1 Y(\tau_1, \varepsilon) + \ldots .$$

Подставим разложение (9) в уравнения (5) и дополнительные условия (6). После соответствующих преобразований приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях уравнений, зависящие от τ_0, τ_1 в отдельности, а также коэффициенты в уравнениях для быстрых переменных, зависящие от t. В уравнениях для медленных переменных приравняем коэффициенты, зависящие от t при ε^i в левой части и при ε^{i+1} в правой части, $i = 0, 1, \ldots$. Дополнительные условия получим, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях (6). Подробнее этот алгоритм построения в применении к задаче Коши изложен в [5].

Для нулевых членов регулярного ряда получаем систему

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{10} \end{pmatrix} = \varepsilon\left(T\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{\psi}_{10} \end{pmatrix} + JL'J\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\psi}_{20} \end{pmatrix}\right), \quad 0 = L\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{\psi}_{10} \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\psi}_{20} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & S_1 \\ \mathcal{P}_1 & -a'_{11} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_{21} & S'_2 \\ \mathcal{P}'_2 & -a'_{12} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Разрешая второе уравнение (10) относительно быстрых переменных и подставляя в первое, получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_0 \\ \dot{\bar{\psi}}_{10} \end{pmatrix} = \varepsilon V(t) \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{\psi}_{10} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $V(t) = (T - JL'JG^{-1}L)(t)$.

Для левых погранфункций нулевого порядка получим систему

$$\begin{gathered} d\Pi_0 x/d\tau_0 = 0, \quad d\Pi_0\psi_1/d\tau_0 = 0, \\ d\Pi_0 z/d\tau_0 = a_{22}(0)\,\Pi_0 z + S_3(0)\,\Pi_0\psi_2, \\ d\Pi_0\psi_2/d\tau_0 = \mathcal{P}_3(0)\,\Pi_0 z - a'_{22}(0)\,\Pi_0\psi_2. \end{gathered} \tag{12}$$

Для правых погранфункций нулевого порядка имеем

$$\begin{gathered} dQ_0 x/d\tau_1 = 0, \quad dQ_0\psi_1/d\tau_1 = 0, \\ dQ_0 z/d\tau_1 = a_{22}(\varepsilon^{-1})\,Q_0 z + S_3(\varepsilon^{-1})\,Q_0\psi_2, \\ dQ_0\psi_2/d\tau_1 = \mathcal{P}_3(\varepsilon^{-1})\,Q_0 z - a'_{22}(\varepsilon^{-1})\,Q_0\psi_2. \end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что рассматриваемый случай отличается от случая конечного промежутка интегрирования (см., например, [2]) тем, что все коэффициенты системы (13) зависят от ε, а значит, и решение (13) тоже явно зависит от ε, т. е. $Q_0 z = Q_0 z(\tau_1, \varepsilon)$, $Q_0\psi_2 = Q_0\psi_2(\tau_1, \varepsilon)$. Это объясняется тем, что правый конец промежутка интегрирования $T = \varepsilon^{-1}$ зависит от ε. Как будет показано ниже (лемма 1) на оценке для погранфункций это не сказывается. Она имеет такой же вид, как и для конечного промежутка интегрирования.

Дополнительные условия для (11), (12), (13) получаем из (6):

$$\begin{gathered} \bar{x}_0(0, \varepsilon) + \Pi_0 x(0) = x^0, \qquad \bar{z}_0(0, \varepsilon) + \Pi_0 z(0) = z^0, \\ \bar{\psi}_{10}(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0\psi_1(0, \varepsilon) = -F_1(\bar{x}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0 x(0, \varepsilon)) - \\ - F_2(\bar{z}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0 z(0, \varepsilon), \\ 0 = -F'_2(\bar{x}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0 x(0, \varepsilon)) - F_3(\bar{z}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0 z(0, \varepsilon)). \end{gathered} \tag{14}$$

Обозначим $z_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) = \bar{z}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + Q_0 z(0, \varepsilon)$. Учитывая, что левые погранфункции стремятся к нулю при $\tau_0 \to +\infty$, а правые — при $\tau_1 \to -\infty$, из (12), (13) и (14) получаем $\Pi_0 x(\tau_0, \varepsilon) \equiv 0$, $\Pi_0\psi_1(\tau_0, \varepsilon) \equiv 0$, $Q_0 x(\tau_1, \varepsilon) \equiv 0$, $Q_0\psi_1(\tau_1, \varepsilon) \equiv 0$ и, кроме того,

$$\Pi_0 z(0, \varepsilon) = z^0 - \bar{z}_0(0, \varepsilon), \quad \Pi_0\psi_2(0, \varepsilon) \in S^+, \tag{15}$$

$$Q_0 z(0, \varepsilon) = z_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) - \bar{z}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon), \; Q_0\psi_2(0, \varepsilon) \in S^-, \tag{16}$$

где S^+, S^- — условно устойчивые многообразия, которые определяются ниже (см. лемму 1). Разрешая четвертое уравнение в (14) относительно $z_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ и подставляя в третье уравнение, получаем краевые условия для (11):

$$\bar{x}_0(0, \varepsilon) = x^0, \quad \bar{\psi}_{10}(\varepsilon^{-1}, \varepsilon) = \tilde{F}\bar{x}_0(\varepsilon^{-1}, \varepsilon), \tag{17}$$

где $\tilde{F} = -F_1 + F_2 F_3^{-1} F'_2$, F_3^{-1} существует в силу условия 1.

Естественно краевую задачу (11), (17) решать приближенно методом усреднения. Поставим в соответствие задаче (11), (17) усредненную краевую задачу

$$d\xi/d\theta = \bar{V}\xi, \tag{18}$$

$$a\xi(0) + b\xi(1) = \xi^0, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где

$$a = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{F} & E \end{pmatrix}, \quad \overline{V} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(t)\,dt, \quad \theta = \varepsilon t.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* I—III. *Тогда найдутся такие не зависящие от* ε *постоянные* $\varepsilon_0 > 0$, $c_0 > 0$, *что при* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ *решение краевой задачи* (5), (6) *существует, единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\| Y(t, \varepsilon) - [Y]_k(t, \varepsilon) \| \leqslant c_0 \varepsilon^{k+1}, \quad t \in [0, \varepsilon^{-1}], \tag{20}$$

где $[Y]_k$ *есть* k*-я усеченная сумма рядов* (9).

Доказательство. Для сокращения выкладок проведем доказательство в случае $k = 0$. Рассмотрим предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *В условиях теоремы условно устойчивые многообразия* S^+ *и* S^- *существуют и имеют аналитические представления*

$$S^+ : \Pi_0 \psi_2(\tau_0, \varepsilon) = - M(0)\,\Pi_0 z(\tau_0, \varepsilon), \quad S^- : Q_0 \psi_2(\tau_1, \varepsilon) = - N(\varepsilon^{-1})\, Q_0 z(\tau_1, \varepsilon).$$

Кроме того, найдутся такие не зависящие от ε *постоянные* $\sigma > 0$, $c_0 > 0$, *что решения задач* (12), (15) *и* (13), (16) *имеют на* S^+ *и* S^- *соответственно оценки*

$$\| \Pi_0 z(\tau_0, \varepsilon) \| \leqslant c_0 \exp(-\sigma\tau_0), \quad \| \Pi_0 \psi_2(\tau_0, \varepsilon) \| \leqslant c_0 \exp(-\sigma\tau_0), \quad \tau_0 \geqslant 0,$$
$$\| Q_0 z(\tau_1, \varepsilon) \| \leqslant c_0 \exp(\sigma\tau_1), \quad \| Q_0 \psi_2(\tau_1, \varepsilon) \| \leqslant c_0 \exp(\sigma\tau_1), \quad \tau_1 \leqslant 0. \tag{21}$$

Доказательство. Сделаем в (13) замену переменных $\begin{pmatrix} Q_0 z \\ Q_0 \psi_2 \end{pmatrix} = B(\varepsilon^{-1}) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$. После замены система примет вид

$$d\varphi_1 / d\tau_1 = \alpha(\varepsilon^{-1})\,\varphi_1, \quad d\varphi_2 / d\tau_1 = \beta(\varepsilon^{-1})\,\varphi_2, \tag{22}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определены в (8). В силу (7) устойчивое при $\tau_1 \to -\infty$ подпространство системы (22) определяется условием

$$\varphi_1(\tau_1, \varepsilon) \equiv 0. \tag{23}$$

Тогда в переменных $Q_0 z$, $Q_0 \psi_2$ условно устойчивое многообразие с учетом (8), (23) задается равенством $S^- : Q_0 \psi_2(\tau_1, \varepsilon) = - N(\varepsilon^{-1})\, Q_0 z(\tau_1, \varepsilon)$. В силу условий II, III из (7), (22) и (23) непосредственно следует, что для решения (13), (16) справедливы оценки (21).

Выполняя в (12) замену $\begin{pmatrix} \Pi_0 z \\ \Pi_0 \psi_2 \end{pmatrix} = B(0) \begin{pmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$ и рассуждая аналогично, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 1 для левых погранфункций.

Рассмотрим краевую задачу (18), (19). Матрица $\overline{V}$ гамильтонова, так как справедливо равенство $J\overline{V} = -\overline{V}'J$. Разобьем $\overline{V}$ на блоки $\overline{V} = \begin{pmatrix} \overline{V}_1 & \overline{V}_2 \\ \overline{V}_3 & -\overline{V}_1' \end{pmatrix}$.

Лемма 2. *В условиях теоремы матрицы* $\overline{V}_2$ *и* $\overline{V}_3$ *симметричны и положительно полуопределены.*

Доказательство. Утверждение леммы 2 следует из симметричности и положительной полуопределенности матриц $V_2(t)$ и $V_3(t)$ [1]. Из леммы 2 следует, что краевая задача (18), (19) имеет единственное решение [1]. Тогда краевая задача (11), (17) тоже имеет единственное решение [3].

Решение краевой задачи (18), (19) эквивалентно решению задачи Коши (18), (24)

$$\xi(1) = p, \tag{24}$$

где p подбирается так, чтобы удовлетворялись краевые условия (19):

$$[b+\overline{\Phi}(1,0)\,a]\,p=\xi^0, \tag{25}$$

$\overline{\Phi}(t,s)$ — фундаментальная матрица системы (18). Так как краевая задача (18), (19) имеет единственное решение, то (25) тоже имеет единственное решение. Это возможно тогда и только тогда, когда матрица $b+\overline{\Phi}(1,0)\,a$ невырождена. Ее блочное представление с учетом вида матриц a и bтаково:

$$b+\overline{\Phi}(1,0)\,a=\begin{pmatrix}\overline{\Phi}_{11} & 0\\ \overline{\Phi}_{21}+\tilde{F} & E\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что матрица $\overline{\Phi}_{11}(1,0)$ невырождена. В [3] показано, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ справедливо асимптотическое равенство $\Phi(t,s,\varepsilon)=\overline{\Phi}(t,s)+O(\varepsilon)$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant\varepsilon^{-1}$, где $\Phi(t,s,\varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы (11). Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 3. *В условиях теоремы* $\Phi(\varepsilon^{-1},0,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|\det\Phi_{11}(\varepsilon^{-1},0,\varepsilon)|\geqslant\gamma>0,$$

где Φ_{11} *— левый верхний блок главной диагонали матрицы* $\Phi(\varepsilon^{-1},0,\varepsilon)$, γ *— некоторая не зависящая от* ε *постоянная.*

Лемма 4. *В условиях теоремы матричное уравнение* $\dot{W}=\varepsilon V(t)\,W$ *имеет на* $[0,\varepsilon^{-1}]$ *невырожденное решение* $W(t,\varepsilon)$ *такое, что* $W_{12}(0,\varepsilon)=0$, $W_{21}(\varepsilon^{-1},\varepsilon)=0$.

Доказательство леммы 4 проводится аналогично [6].

Для того чтобы ряды (9) были асимптотическими, необходима равномерная ограниченность по ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, коэффициентов разложения. Ограниченность погранфункций следует из леммы 1.

Лемма 5. *В условиях теоремы найдется такая не зависящая от* ε *постоянная* $c_0>0$, *что при всех* ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, *справедливы неравенства*

$$\|\overline{Y}_i(t,\varepsilon)\|\leqslant c_0,\quad i=0,1,2,\ldots. \tag{26}$$

Доказательство. Справедливость (26) при $i=0$ следует из ограниченности решения краевой задачи (11), (17), которая доказана в [3], а также из условия II. Для $i=1,2,\ldots$ доказательство проводится аналогично [5].

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим

$$r_x=x-\overline{x}_0,\quad r_{\psi_1}=\psi_1-\overline{\psi}_{10},\quad r_z=z-\overline{z}_0-\Pi_0 z-Q_0 z,$$
$$r_{\psi_2}=\psi_2-\overline{\psi}_{20}-\Pi_0\psi_2-Q_0\psi_2. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (5) и учитывая (10), (17), (12) и (13), получаем уравнения для остаточных членов:

$$\begin{aligned}
\dot{r}_x&=\varepsilon(a_{11}(t)\,r_x+a_{12}(t)\,r_z+S_1(t)\,r_{\psi_1}+S_2(t)\,r_{\psi_2}+f_1(t,\varepsilon)),\\
\dot{r}_{\psi_1}&=\varepsilon(\mathcal{P}_1(t)\,r_x+\mathcal{P}_2(t)\,r_z-a_{11}'(t)\,r_{\psi_1}-a_{21}'(t)\,r_{\psi_2}+f_2(t,\varepsilon)),\\
\varepsilon\dot{r}_z&=a_{21}(t)\,r_x+a_{22}(t)\,r_z+S_2'(t)\,r_{\psi_1}+S_3(t)\,r_{\psi_2}+f_3(t,\varepsilon),\\
\varepsilon\dot{r}_{\psi_2}&=\mathcal{P}_2'(t)\,r_x+\mathcal{P}_3(t)\,r_z-a_{12}'(t)\,r_{\psi_1}-a_{22}'(t)\,r_{\psi_2}+f_4(t,\varepsilon)
\end{aligned} \tag{28}$$

с краевыми условиями

$$r_x(0,\varepsilon)=0,\quad r_{\psi_1}(\varepsilon^{-1},\varepsilon)=o(\varepsilon^i)-F_1 r_x(\varepsilon^{-1},\varepsilon)-F_2' r_z(\varepsilon^{-1},\varepsilon),$$
$$r_z(0,\varepsilon)=o(\varepsilon^i),\quad F_2' r_x(\varepsilon^{-1},\varepsilon)+F_3 r_z(\varepsilon^{-1},\varepsilon)+o(\varepsilon^i)=0,$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to+0} o(\varepsilon^i)/\varepsilon^i = 0,$$

i — любое натуральное число, а $f_j(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, 4}$, удовлетворяют неравенствам

$$\|f_j(t, \varepsilon)\| \leqslant c_0(\varepsilon + \exp(-\sigma t \varepsilon^{-1}) + \exp(\sigma(t - \varepsilon^{-1})\varepsilon^{-1})), \quad j = 1, 2,$$

$$\|f_j(t, \varepsilon)\| \leqslant c_0\varepsilon, \ j = 3, 4, \ 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^{-1}, \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Выполним в (28) замену переменных

$$\begin{pmatrix} r_x \\ r_{\psi_1} \end{pmatrix} = W\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r_z \\ r_{\psi_2} \end{pmatrix} = B(t)\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} - \Gamma(t)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

где $B(t)$ определена в (8), $\Gamma = G^{-1}LW$. После замены получим систему

$$\dot\xi_1 = \varepsilon(d_{11}(t)\eta_1 + d_{12}(t)\eta_2 + h_1(t, \varepsilon)),$$

$$\dot\xi_2 = \varepsilon(d_{21}(t)\eta_1 + d_{22}(t)\eta_2 + h_2(t, \varepsilon)),$$

$$\varepsilon\dot\eta_1 = \alpha(t)\eta_1 + h_3(t, \varepsilon, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2),$$

$$\varepsilon\dot\eta_2 = \beta(t)\eta_2 + h_4(t, \varepsilon, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2),$$

где

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = W^{-1}LB(t).$$

Функции h_i, $i = \overline{1, 4}$, обладают следующими свойствами:

а) $\|h_i(t, \varepsilon)\| \leqslant c_0(\exp(-\sigma\tau_0) + \exp(\sigma\tau_1))$, $\quad i = 1, 2;$

б) $\|h_i(t, \varepsilon, 0, 0, 0, 0)\| \leqslant c_0\varepsilon$, $\quad i = 3, 4;$

в) для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ выполняется неравенство

$$\|h_i(t, \varepsilon, \tilde\xi_1, \ldots \tilde\eta_2) - h_i(t, \varepsilon, \tilde{\tilde\xi}_1, \ldots \tilde{\tilde\eta}_2)\| \leqslant c_0\delta(\|\tilde\xi_1 - \tilde{\tilde\xi}_1\| + \ldots$$

$$\ldots + \|\tilde\eta_2 - \tilde{\tilde\eta}_2\|), \quad i = 3, 4.$$

Далее, используя метод последовательных приближений и принцип сжатых отображений, аналогично [2] доказываем неравенство (20) при $k = 0$.

З а м е ч а н и е 1. В силу достаточности принципа максимума асимптотическое разложение решения краевой задачи (5), (6) будет асимптотическим разложением решения задачи (1)—(3), т. е. в качестве, например, нулевого члена асимптотики оптимального управления надо с учетом (4) взять $[u]_0(t, \varepsilon) = R^{-1}(t)(b_1[\psi_1]_0 + b_2[\psi_2]_0)(t, \varepsilon)$, а в качестве нулевого члена асимптотики функционала

$$[I]_0 = \frac{1}{2}[y']_0 F[y_0](\varepsilon^{-1}, \varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{\varepsilon^{-1}}([y']_0\mathcal{P}(t)[y]_0 + u']_0 R(t)[u]_0)\,dt.$$

З а м е ч а н и е 2. Если задачу (10), (17) решать приближенно с помощью метода усреднения, то в силу [3]

$$\begin{pmatrix} \overline{x_0} \\ \overline{\psi}_{10} \end{pmatrix}(t, \varepsilon) = \xi(\varepsilon t) + O(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{29}$$

Кроме того, из (10) с учетом (29) и условия II получим

$$\begin{pmatrix} \bar{z}_0 \\ \bar{\psi}_2 \end{pmatrix}(t, \varepsilon) = \eta(t, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{30}$$

где η — решение уравнения $L\xi + G\eta = 0$.

Поэтому в $[Y]_0(t, \varepsilon)$ вместо $\bar{Y}_0(t, \varepsilon)$ можно подставить $(\xi', \eta')'$. Как следует из (30), (29), эта замена не нарушает неравенства (20) при $k = 0$.

1. *Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1982.— **20**.— С. 3—78.
2. *Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Красноярск, 1983.— 35 с.
3. *Плотников В. А., Климчук Т. С.* Усреднение уравнений Понтрягина в задачах оптимального управления // Динамика систем.— 1976.— Вып. 10.— С. 97—109.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272 с.
5. *Эфендиев В. В., Яценко Т. П.* Асимптотические разложения решений некоторых сингулярно возмущенных задач.— Одесса, 1985.— 20 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1953-Ук.
6. *Hadlok C. R.* Existence and dependence on a parameter of solutions of a nonlinear two point boundary value problem // J. Different. Equat.— 1973.— **14**, N 3.— P. 498—517.

Одес. ун-т

Получено 30.10.85,
после доработки — 06.08.86