УДК 512.554

А. П. Петравчук

Алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр

В связи с известной теоремой Кегеля—Виландта теории конечных групп (см., например, [1], теорема 2.7) Кегель [2] поставил следующий вопрос: не будет ли разрешимой алгебра Ли, разложимая в сумму двух нильпотентных подалгебр?. Для конечномерных алгебр Ли над полем нулевой характеристики этот вопрос положительно решил Гото [3]. В работе А. И. Кострикина [4] доказана разрешимость конечномерной алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, разложимой в сумму абелевой подалгебры A и нильпотентной подалгебры B, при условии $\dim A < p^2 - p$.

В настоящей работе дается отрицательный ответ на приведенный вопрос Кегеля (см. теорему 1). Контрпример, который дает теорема 1 — конечномерная алгебра Ли, разложимая в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр. Эта алгебра Ли непроста. Естественен вопрос: существует ли простая алгебра Ли, разложимая в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр?. Отрицательный ответ на него вытекает из теоремы 2, утверждающей, что произвольная ненулевая алгебра Ли, разложимая в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр, отлична от своего коммутанта.

Теорема 3 дает некоторые достаточные условия разрешимости конечномерной алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$, разложимой в сумму двух нильпотентных подалгебр.

Теорема 1 и утверждение 2 теоремы 3 анонсированы автором в [5]. Отметим, что второй из анонсированных результатов вытекает из работы Пиллена [6], опубликованной несколько ранее.

В работе используются левонормированные произведения. Если X — подпространство некоторой алгебры Ли, то $X^1 = X$, $X^n = [X^{n-1}, X]$, $n > 1$. Через $c(L)$ будем обозначать ступень нильпотентности (нильпотентной) алгебры Ли L.

Теорема 1. *Над произвольным полем K характеристики $p = 2$ существует неразрешимая конечномерная алгебра Ли L, разложимая в сумму $L = A + B$ абелевой подалгебры A и нильпотентной (ступени 2) подалгебры B.*

Доказательство. Пусть L_1 — трехмерная простая алгебра Ли над полем K характеристики $p = 2$ с базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ и таблицей умножения $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$. Зададим на базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ линейные отображения φ_1 и φ_2 векторного пространства L_1 в себя:

$$\varphi_1(e_1) = e_1, \quad \varphi_1(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \quad \varphi_1(e_3) = e_1;$$

$$\varphi_2(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad \varphi_2(e_2) = e_2, \quad \varphi_2(e_3) = e_2.$$

Легко проверяется, что φ_1 и φ_2 — дифференцирования алгебры Ли L_1 и $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

Обозначим через L полупрямое произведение алгебры Ли L_1 и алгебры A, порожденной φ_1 и φ_2 в алгебре дифференцирований $\mathrm{Der}(L_1)$. Возьмем элементы $b_1 = \varphi_1 + e_1 + e_3$, $b_2 = \varphi_2 + e_2 + e_3$, $b_3 = e_3$ из алгебры L. Непосредственно проверяется, что $[b_1, b_2] = b_3$, $[b_1, b_3] = [b_2, b_3] = 0$. Следовательно, подалгебра B из L, порожденная элементами b_1, b_2, b_3, нильпотентна ступени 2. Но тогда неразрешимая алгебра Ли L представима, как легко видеть, в виде суммы $L = A + B$ абелевой подалгебры A и нильпотентной подалгебры B. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть L — алгебра Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей, разложимая в сумму $L = A + B$ абелевой подалгебры A и некоторой подалгебры B. Тогда для любых натуральных i, j выполняются соотношения*

$$[[A, B^i], [A, B^j]] \subseteq [A, B^{i+1}] + [A, B^{j+1}] + [A, B^{i+j}, L] + B^2, \tag{1}$$

$$[A, B^i, B] \subseteq [A, B^i] + B^2. \tag{2}$$

Доказательство. Воспользуемся рассуждениями Ито (см., например, [1], теорема 3.1). Возьмем произвольные элементы a, $a' \in A$, $b \in B^i$, $b' \in B^j$. Пусть $[a, b'] = a^* + b''$, $[b, a'] = a'' + b^*$, где a^*, $a'' \in A$, b^*, $b'' \in B$. Учитывая коммутативность подалгебры A, получаем

$$[a, b, a', b'] = -[b, a', a, b'] = -[(a'' + b^*), a, b'] = -[b^*, a, b'] =$$
$$= [a, b', b^*] + [b', b^*, a] = [(a^* + b''), b^*] + [b', b^*, a] = [a^*, b^*] +$$
$$+ [b'', b^*] + [b', b^*, a].$$

Далее,

$$[a, b, b', a'] = -[[b, b', a] + [b', a, b], a'] = -[b, b', a, a'] - [b', a, b, a'] =$$
$$= -[b, b', a, a'] + [(a^* + b''), b, a'] = [a^*, b, a'] + [b'', b, a'] - [b, b', a, a'] =$$
$$= -[b, a', a^*] + [b'', b, a'] - [b, b', a, a'] = -[(a'' + b^*), a^*] + [b'', b, a'] -$$
$$- [b, b', a, a'] = [a^*, b^*] + [b'', b, a'] - [b, b', a, a'].$$

Следовательно,

$$[[a, b], [a', b']] = [a, b, a', b'] - [a, b, b', a'] = [b', b^*, a] - [b'', b, a'] +$$
$$+ [b, b', a, a'] + [b'', b^*]. \tag{3}$$

Так как $[b', b^*, a] \in [A, B^{j+1}]$, $[b'', b, a'] \in [A, B^{i+1}]$, $[b, b', a, a'] \in [A, B^{i+j}, L]$ и $[b'', b^*] \in B^2$, то с учетом соотношения (3) выполняется соотношение (1). Далее, $[A, B^i, B] \subseteq [B, B^i, A] + [B, A, B^i] \subseteq [B^{i+1}, A] + [(A + B), B^i] \subseteq$ $\subseteq [A, B^i] + B^2$. Это доказывает соотношение (2) и вместе с ним лемму.

Теорема 2. *Пусть L — ненулевая алгебра Ли над ассоциативно-коммутативным кольцом R с единицей, разложимая в сумму $L = A + B$ абелевой подалгебры A и нильпотентной подалгебры B. Тогда алгебра L отлична от своего коммутанта.*

Доказательство. Пусть теорема неверна. Обозначим через n ступень нильпотентности подалгебры B и через m — наибольшее натуральное число, при котором $[A, B^m] + B^2 = L$. Ввиду соотношений $L = L^2 = [A, B] + B^2$ и $B^{n+1} = 0$ справедливы неравенства $1 \leqslant m \leqslant n$. В силу выбора числа m $[A, B^{m+1}] + B^2 \neq L$.

Покажем, что для любого натурального k

$$[[A, B^m], [A, B^m]] \subseteq [A, B^{m+1}] + [A, B^{km}, L] + B^2. \tag{4}$$

Действительно, для $k = 1$ соотношение (4) очевидно, а для $k = 2$ оно следует из (1). Пусть (4) верно для $k - 1$. Так как $L = [A, B^m] + B^2$, то $[A, B^{(k-1)m}, L] \subseteq [A, B^{(k-1)m}, [A, B^m]] + [A, B^{(k-1)m}, B^2]$. В силу (1) произведение $[A, B^{(k-1)m}, [A, B^m]]$ содержится в правой части соотношения (4). Так как $(k - 1)m \geqslant m + 1$, то согласно (2) $[A, B^{(k-1)m}, B^2] \subseteq [A, B^{m+1}] + B^2$. Но тогда $[A, B^{(k-1)m}, L] \subseteq [A, B^{m+1}] + [A, B^{km}, L] + B^2$. Отсюда с учетом индуктивного предположения следует (4).

Используя соотношение (4), покажем, что $[A, B^{m+1}] + B$ — собственная подалгебра алгебры L. Действительно, полагая в (4) $k = n + 1$ $(n = c(B))$, получаем

$$[[A, B^m], [A, B^m]] \subseteq [A, B^{m+1}] + B^2. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что $[[A, B^{m+1}], [A, B^{m+1}]] \subseteq [A, B^{m+1}] + B^2$. Кроме того, ввиду соотношения (2) $[A, B^{m+1}, B] \subseteq [A, B^{m+1}] + B^2$, и, значит, $[A, B^{m+1}] + B$ — подалгебра в L. При этом, очевидно, $[A, B^{m+1}] + B^2$ — идеал алгебры $[A, B^{m+1}] + B$. Легко видеть, что $[A, B^{m+1}] + B \neq L$. Действительно, в противном случае $[A, B^{m+1}] + B^2$ — собственный идеал алгебры L с абелевой фактор-алгеброй, что невозможно.

Покажем теперь, что $[A, B^{m+1}] + B \neq B$. В самом деле, пусть это не так, т. е. $[A, B^{m+1}] \subseteq B$. Возьмем произвольные элементы $g \in L$ и $b \in [A, B^m] \cap B$. Тогда $g = u + v$, $u \in [A, B^m]$, $v \in B^2$, $[b, g] = [b, u] + [b, v]$. При этом, очевидно, $[b, u] \in ([A, B^{m+1}] + B^2) \subseteq B$, $[b, v] \in B$ и, значит, ввиду произвольности элементов g и b $[[A, B^m] \cap B, L] \subseteq B$. Легко видеть, что R-подмодуль $[A, B^m] \cap B$ алгебры L порождает подалгебру B. Действительно, из соотношения $L = [A, B^m] + B^2$ вытекает $([A, B^m] \cap B) + B^2 = B$ и потому подалгебра, порожденная $[A, B^m] \cap B$, совпадает с B (см., например, [7], теорема I.7.2). Но тогда из соотношения $[[A, B^m] \cap B, L] \subseteq B$ вытекает соотношение $[B, L] \subseteq B$, что невозможно. Следовательно, $[A, B^{m+1}] + B \neq B$.

Так как $L = A + B$, то $[A, B^{m+1}] + B = A_0 + B$, где $A_0 = A \cap \cap ([A, B^{m+1}] + B)$. По доказанному выше $A_0 \not\subseteq B$ и, в частности, $A_0 \neq 0$. Построим фильтрацию алгебры Ли L по подалгебре $A_0 + B$

$$L = L_{-1} \supset A_0 + B = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq L_{k+1} \supseteq \ldots,$$

где $L_{i+1} = \{x \in L_i \mid [x, L] \subseteq L_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Ввиду коммутативности подалгебры A для любого $i \geqslant 0$ $L_i \supseteq A_0$. Тогда $T = \bigcap_{i \geqslant 0} L_i$ — идеал алгебры L, содержащий подалгебру A_0 (и содержащийся в подалгебре $A_0 + B$). Положим $\bar{L} = L/T$, $\bar{A} = (A + T)/T$, $\bar{B} = (B + T)/T$. Очевидно, $\bar{L} = \bar{A} + \bar{B}$, $\bar{L} = [\bar{A}, \bar{B}^m] + \bar{B}^2$. При этом $[\bar{A}, \bar{B}^{m+1}] + \bar{B} = ([A, B^{m+1}] + B)/T = (A_0 + B)/T = (B + T)/T = \bar{B}$. Заменяя в проведенных выше рассуждениях алгебру L на $\bar{L}$, убеждаемся, что $[\bar{B}, \bar{L}] \subseteq \bar{B}$. Противоречие. Теорема доказана.

При доказательстве следующей теоремы используются некоторые подходы из работы [4].

Т е о р е м а 3. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p > 0$, разложимая в сумму $L = A + B$ нильпотентных подалгебр A и B. Тогда алгебра L разрешима в каждом из следующих двух случаев:*

1) *подалгебра B максимальна в L и либо $c(A) \leqslant p - 2$, либо $c(A) \leqslant p - 1$, $c(B) \leqslant p - 1$;*

2) *подалгебра A абелева и $p > 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теорема неверна в случае 1 и $L = A + B$ — неразрешимая алгебра Ли. Можно считать, что $p > 2$. Действительно, если $p = 2$, то по условию теоремы либо $L = B$, либо L — сумма двух абелевых подалгебр. Но тогда алгебра L разрешима [4], что невозможно.

Далее, нильпотентная подалгебра B, будучи максимальной в L, является подалгеброй Картана алгебры L. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы работы [4], убеждаемся в том, что картановское разложение L относительно B имеет вид $L = B + \sum_{i=1}^{p-1} L_{i\alpha}$, где $\alpha \neq 0$ — любой корень, причем $L_{i\alpha} \neq 0$, $L_{i\alpha} = L_\alpha^i$, $1 \leqslant i \leqslant p - 1$. Введем для удобства обозначения $M_0 = 0$, $M_i = \sum_{j=1}^{i} L_\alpha^j$ $1 \leqslant i \leqslant p$. Очевидно,

$M_i \subseteq M_j$ при $i \leqslant j$, $i, j = 0, 1, \ldots, p-1$. Покажем, что

$$L_\alpha^i \subseteq ((A^i + B^i) \cap M_i) + M_{i-1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p. \tag{6}$$

Действительно, это включение очевидно при $i = 1$. Пусть оно верно при $i-1$, т. е. $L_\alpha^{i-1} \subseteq ((A^{i-1} + B^{i-1}) \cap M_{i-1}) + M_{i-2}$. Возьмем произвольные элементы x и y из L_α^{i-1} и L_α соответственно. Элемент x представим в виде суммы $x = a_1 + b_1 + c_1$, где $a_1 \in A^{i-1}$, $b_1 \in B^{i-1}$, $c_1 \in M_{i-2}$, $a_1 + b_1 \in M_{i-1}$, а элемент y — в виде $y = a_2 + b_2$, где $a_2 \in A$, $b_2 \in B$. Тогда $[x, y] = [a_1 + b_1 + c_1, a_2 + b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] + [c_1, a_2 + b_2]$. Элемент $[c_1, a_2 + b_2]$ содержится в $[M_{i-2}, L_\alpha] \subseteq M_{i-1}$. Далее

$$[a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] + [a_1 + b_1, b_2] - [a_2 + b_2, b_1]. \tag{7}$$

Здесь, очевидно, $[a_1 + b_1, b_2] \in M_{i-1}$, $[a_2 + b_2, b_1] \in L_\alpha = M_1$. Поскольку произведение в левой части (7) содержится в M_i и $M_{i-1} \subseteq M_i$, $M_1 \subseteq M_i$, то $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] \in M_i$. Таким образом, $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] \in (A^i + B^i) \cap M_i$, $[a_1 + b_1, b_2] - [a_2 + b_2, b_1] \in M_{i-1}$ и ввиду произвольности элементов x и y $L_\alpha^i = [L_\alpha^{i-1}, L_\alpha] \subseteq ((A^i + B^i) \cap M_i) + M_{i-1}$.

Покажем теперь, что $c(A) \geqslant p-1$. В самом деле, пусть это не так. Полагая в соотношении (6) $i = p-1$, получаем $L_\alpha^{p-1} = L_{(p-1)\alpha} \subseteq ((A^{p-1} + B^{p-1}) \cap M_{p-1}) + M_{p-2}$. Так как $A^{p-1} = 0$ и $B^{p-1} \cap M_{p-1} = 0$, то $(A^{p-1} + B^{p-1}) \cap M_{p-1} = 0$ и, значит, $L_{(p-1)\alpha} \subseteq M_{p-2}$. Последнее невозможно ввиду отмеченных выше свойств картановского разложения алгебры L относительно B. Следовательно, $c(A) \geqslant p-1$. Тогда по условию теоремы $c(A) = p-1$, $c(B) = p-1$. Полагая в соотношении (6) $i = p$, находим

$$L_\alpha^p \subseteq ((A^p + B^p) \cap M_p) + M_{p-1}. \tag{8}$$

Поскольку $A^p + B^p = 0$ и $L_\alpha^p \subseteq B$, то из (8) следует, что $L_\alpha^p = 0$. По доказанному выше $L_{(p-1)\alpha} = L_\alpha^{p-1}$ и потому $[L_{(p-1)\alpha}, L_\alpha] = [L_\alpha^{p-1}, L_\alpha] = L_\alpha^p = 0$. Отсюда, учитывая равенства $L_\alpha^i = L_{i\alpha}$, $i = 1, \ldots, p-1$, получаем $[L_{(p-1)\alpha}, L_{i\alpha}] = 0$, $i = 1, \ldots, p-1$. В частности, $[L_{(p-1)\alpha}, L_{(p-1)\alpha}] = 0$ и, значит, $B + L_{(p-1)\alpha}$ — подалгебра в L. Ввиду максимальности B в L подалгебра $B + L_{(p-1)\alpha}$ совпадает с алгеброй L. Последнее невозможно при $p > 2$. Полученное противоречие доказывает утверждение 1 теоремы.

Допустим теперь, что теорема неверна в случае 2. Будем считать, что $L = A + B$ — контрпример минимальной размерности над полем K. Из доказательства теоремы работы [4] следует, что подалгебра B максимальна в L. Но тогда подалгебра A неабелева в соответствии с разобранным выше случаем 1. Противоречие. Теорема доказана.

1. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1987.— 202 с.
2. *Kegel O. H.* Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe // Math. Ann.— 1963.— **149**, N 3.— S. 258—260.
3. *Goto M.* Note on a characterization of solvable Lie algebras // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A1.— 1962.— **26**, N 1.— P. 1—2.
4. *Кострикин А. И.* Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1982.— № 2.— С. 5—8.
5. *Петравчук А. П.* Конечномерные алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр // XIX Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. (Львов, 9—11 сент. 1987 г.).— Львов, 1987.— Ч. 1.— С. 216.
6. *Pillen C.* Die Summe einer abelschen und einer nilpotenten Lie-Algebra ist auflösbar / Results Math.— 1987.— **11**, N 1-2.— S. 117—121.
7. *Бахтурин Ю. А.* Тождества в алгебрах Ли.— М. : Наука, 1985.— 447 с.

Киев. высш. танк. инж. уч-ще
им. Маршала И. И. Якубовского

Получено 13.11.87