УДК 519.41/47

В. С. Чарин, Д. И. Зайцев

Группы с условиями конечности и другими ограничениями для подгрупп

Изучение групп по заданным свойствам подгрупп — традиционный подход теории групп к выяснению особенностей строения абстрактных групп, к их описанию. Такой подход к исследованию конечных групп стал складываться еще к началу нашего века. Изучение же бесконечных групп по заданным свойствам их подгрупп (или, как сейчас говорим, изучение групп с ограничениями для подгрупп) началось несколько позднее. Первоначально ограничения, налагаемые на подгруппы бесконечных групп, имели в основном характер условий конечности. Наложение условий конечности позволяет выделять такие бесконечные группы, которые сохраняют те или иные свойства конечных групп.

Одним из первых шагов в этом направлении явилось изучение абелевых групп с условием минимальности для подгрупп. В работах [1, 2] было полностью выяснено строение таких групп и установлен ряд их свойств, аналогичных известным свойствам конечных абелевых групп. Эти исследования касались, однако, только абелевых групп. Отдельные примеры использования условий конечности для выделения произвольных (как абелевых, так и неабелевых) бесконечных групп встречаются в работах [3, 4].

Систематическое изучение бесконечных групп с условиями конечности началось в конце тридцатых годов в работах С. Н. Черникова [5—7]. Вскоре в изучение таких групп включились многие известные алгебраисты (О. Ю. Шмидт, А. И. Мальцев, А. Г. Курош, Бэр и др.). Углубляясь и расширяясь как в работах С. Н. Черникова и его многочисленных учеников (В. М. Глушков, М. И. Каргаполов, Х. Х. Мухаммеджан, В. С. Чарин и др.), так и в работах других советских, а также зарубежных алгебраистов, исследования бесконечных групп с теми или иными условиями конечности обогатили теорию групп многими новыми понятиями, идеями и связанными с ними глубокими результатами, а также существенно расширили базу теории групп, пополнив ее новыми детально изученными конкретными видами бесконечных групп. По существу в теории групп появилась большая содержательная новая область исследований. Особая роль принадлежит здесь С. Н. Черникову, инициатива и творческий вклад которого в значительной мере определили направление исследований в этой области.

Условиями конечности определился естественный подход к изучению групп, находящихся на стыке конечных групп с бесконечными. Достаточно отчетливое представление о развитии исследований, относящихся к группам с условиями конечности, в течение 1939—1959 гг. дает статья С. Н. Черникова «Условия конечности в общей теории групп» [8]. Некоторым отправным и узловым пунктам этих исследований в их исторической последовательности, а также некоторым результатам дальнейших исследований групп с условиями конечности посвящены пп. 1—5.

Условия конечности являются такими ограничениями, которые тривиальны в случае конечных групп, поэтому естественно говорить об ограничениях, действующих только в области бесконечных групп. По этим соображениям С. Н. Черников [9—11] изучал некоторые виды бесконечных групп с теми или иными ограничениями для бесконечных подгрупп. Относящиеся к этой теме результаты приведены в п. 6.

В начале пятидесятых годов С. Н. Черников сформулировал общую задачу исследования групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп и начал [12] изучение таких групп. Некоторым из полученных в этом направлении результатам посвящен п. 7.

1. Условие минимальности для подгрупп состоит в требовании конечности всех убывающих цепей подгрупп группы. Это условие явилось одним из первых условий конечности в теории групп и в дальнейшем сыграло важную роль в развитии исследований по бесконечным группам. Группами, удовлетворяющими условию минимальности для подгрупп, являются, в частности, бесконечные группы, все собственные подгруппы которых конечны. Абелевы группы такого рода известны — квазициклические группы. Вопрос о существовании неабелевых групп с конечными собственными подгруппами составляет содержание известной проблемы Шмидта. Эта проблема рассматривалась и решалась при некоторых дополнительных ограничениях в связи с изучением групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп.

В 1939—1940 гг. С. Н. Черников детально исследовал группы с условием минимальности для подгрупп при разного рода дополнительных ограничениях [5—7]. В качестве первого из таких ограничений было взято так называемое нормализаторное условие, требующее несовпадения произвольной собственной подгруппы группы с ее нормализатором. В случае конечных групп нормализаторное условие является, как известно, одним из условий равносильных специальности (нильпотентности). В работе [5] с помощью условия минимальности для подгрупп и нормализаторного условия выделяется класс *специальных групп*, содержащий и бесконечные группы, для которого строится теория, подобная хорошо разработанной к тому времени теории конечных нильпотентных групп. В отмеченных работах было установлено, что бесконечные специальные группы исчерпываются прямыми произведениями конечного множества специальных p-групп и бесконечные специальные p-группы и только они являются конечными p-расширениями прямых произведений конечного множества квазициклических p-групп. В этих же работах было показано, что класс специальных p-групп совпадает с классом локально конечных p-групп с условием минимальности и тем самым получена следующая теорема.

Теорема 1. *Бесконечная локально конечная p-группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, когда она является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы.*

Дальнейшее существенное продвижение в изучении групп с условием минимальности было связано с введенным С. Н. Черниковым понятием локальной разрешимости. Локально разрешимой называется группа, в которой каждое конечное множество элементов порождает разрешимую подгруппу. В работе [6] была получена следующая теорема, полностью описывающая строение бесконечных локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп.

Теорема 2. *Бесконечная локально разрешимая группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, когда она является расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы.*

Из теорем 1, 2 вытекает, в частности, отрицательное решение проблемы Шмидта для локально конечных p-групп и локально разрешимых групп.

В связи с теоремами 1 и 2 С. Н. Черников в 1940 г. сформулировал проблему — не будет ли всякая группа, удовлетворяющая условию минимальности для подгрупп, конечным расширением абелевой группы с условием минимальности. Эта проблема вскоре получила название *проблемы Черникова* [13]. Группы, являющиеся конечными расширениями абелевых групп с условием минимальности, позднее были названы *экстремальными группами* [8], но впоследствии за ними закрепилось название *черниковских групп*.

Одним из первых алгебраистов, который понял важность и значение результатов работ [5 — 7] для будущего развития теории групп, был

О. Ю. Шмидт. Всегда относившийся с интересом к новым идеям в алгебре к исследованиям молодых алгебраистов, О. Ю. Шмидт на этот раз проявил особое внимание к работам С. Н. Черникова. Вскоре О. Ю. Шмидт опубликовал работу [14], в которой по новому изложил ряд его результатов, при этом несколько обобщил их и упростил доказательства.

Исследования, проведенные в работах [5—7], привлекли внимание и других алгебраистов своей оригинальностью, новыми содержащимися в них идеями. Впоследствии был установлен целый ряд характеристических свойств черниковских групп и, в частности, p-групп. Так, А. И. Мальцев [15] показал, что черниковские p-группы и только они являются p-группами, изоморфно представимыми группами матриц над полями нулевой характеристики. Черниковские p-группы можно также охарактеризовать как локально конечные p-группы конечного ранга [16]. Иные важные их характеризации получены Х. Х. Мухаммеджаном, Бэром, Блэкберном и многими другими авторами. Обзор указанных результатов можно найти в [13, 17].

Связанные с отмеченной выше проблемой Черникова исследования сыграли большую роль в развитии теории бесконечных групп. Здесь не представляется возможным сколько-нибудь полно отразить все многообразие относящихся к этой теме результатов. Отметим только, что проблема Черникова о группах с условием минимальности была положительно решена для важного частного случая локально конечных групп В. П. Шунковым [18], а также Кегелем и Верфрицем [19]. Отрицательное в общем случае ее решение вытекает из результатов А. Ю. Ольшанского [20], которые в положительном смысле решают также и проблему Шмидта.

2. Локальные свойства групп. В работах С. Н. Черникова [5—7, 21] широко используется идея выделения различных классов групп с помощью наложения ограничений на конечнопорожденные подгруппы рассматриваемых групп. В качестве таких ограничений привлекаются разрешимость и специальность (нильпотентность) [6], а также — сверхразрешимость и требование существования силовского ряда [21]. В связи с этой идеей в [6] рассматриваются периодические группы, у которых каждая конечнопорожденная подгруппа разрешима (нильпотентна), и именно они получили там название локально разрешимых (соответственно локально нильпотентных) групп.

В работе [6] установлена разрешимость локально разрешимых групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. В ней показано, что из локальной нильпотентности группы с условием минимальности в общем случае вытекает существование у нее возрастающего центрального ряда, доходящего до самой группы. Таким образом, обнаружилось, что свойства конечнопорожденных подгрупп группы могут в той или иной форме распространяться на всю группу. Понятно, что именно при этом и возникает общий вопрос о нахождении той обобщенной формы разрешимости (нильпотентности), в какой будет распространяться на группу свойство разрешимости (соответственно нильпотентности) всех ее конечнопорожденных подгрупп.

Идея искомой обобщенной формы пришла в понятии *силовского множества*, введенном С. Н. Черниковым [21]. В основу определения силовского множества положено следующее обобщение идеи возрастающего (убывающего) ряда нормальных подгрупп группы, получившее позднее название инвариантной системы [22].

Упорядоченное по включению множество M нормальных подгрупп группы G, содержащее группу G и ее единичную подгруппу, а также содержащее пересечение и объединение любого множества своих подгрупп, называется инвариантной системой группы G.

Если в этом определении требование инвариантности в G членов системы заменить требованием инвариантности меньшего из двух ее соседних членов в большем, то получится определение нормальной системы [22].

На основе понятия инвариантной системы С. Н. Черников [23] ввел понятия разрешимого множества и центрального множества группы.

Разрешимым множеством группы называется такая ее инвариантная система, все факторы которой абелевы.

Центральным множеством группы G называется такая ее инвариантная система, произвольный фактор B/A которой содержится в центре соответствующей фактор-группы G/A.

В работе [23] получены следующие результаты.

Теорема 3. *Если все конечнопорожденные подгруппы периодической группы разрешимы (нильпотентны), то она обладает разрешимым (центральным) множеством.*

Эта теорема выясняет влияние локальных свойств группы на ее строение в целом.

Понятие разрешимого множества, т. е. разрешимой инвариантной системы и более общее понятие разрешимой нормальной системы были использованы А. Г. Курошем и С. Н. Черниковым [22] для определения различных классов обобщенно разрешимых групп (RN- и RI-группы, RN^*- и RI^*-группы и др.); в ней же для определения различных классов обобщенно нильпотентных групп было использовано понятие центрального множества (Z- и ZA-группы и др.). Классы обобщенно разрешимых и обобщенно нильпотентных групп, называемые теперь *классами Куроша — Черникова*, явились источником многочисленных исследований. Как установил А. И. Мальцев, разработавший общий метод получения локальных теорем теории групп [24], для ряда этих классов справедлива локальная теорема. Сформулированные в [22] вопросы о взаимосвязях и свойствах групп, входящих в классы Куроша — Черникова, привлекли внимание многих алгебраистов в нашей стране и за рубежом. Ряд вопросов был решен М. И. Каргаполовым, Ф. Холлом, Ю. И. Мерзляковым и др.

В качестве примера рассмотрим вопрос о соотношении между классом ZA-групп (группы, обладающие возрастающим центральным рядом) и классом N-групп (группы, удовлетворяющие нормализаторному условию). В работах [5—7] доказаны следующие утверждения.

Теорема 4. *Каждая ZA-группа является N-группой. Если N-группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то она является ZA-группой.*

В связи с этими утверждениями возник вопрос: будет ли всякая N-группа ZA-группой? В [22] он указан под номером 21. Для случая групп с конечным множеством порождающих элементов он был решен положительно Б. И. Плоткиным (см. [13]), в общем случае получено отрицательное решение. Именно, Хейнекен и Мохамед [25] построили пример двуступенно разрешимой бесконечной p-группы с тривиальным центром, удовлетворяющей нормализаторному условию. Однако пока не решен следующий, поставленный С. Н. Черниковым вопрос: не будет ли всякая бесконечная группа с нормализаторным условием обладать нетривиальной абелевой нормальной подгруппой ([26], вопрос 2.80)?

3. Полные группы. С. Н. Черников [27] ввел понятие полной группы с помощью следующего определения: группа называется полной, если для любого натурального числа n любой ее элемент можно представить в виде произведения n-х степеней некоторых элементов. Позднее эти группы получили название *полных групп в смысле Черникова*, название же полных групп стало употребляться обычно для групп со свойством неограниченной извлекаемости корней из их элементов.

В 1946—1948 гг. С. Н. Черников создает теорию полных групп, обладающих центральным рядом (полные ZA-группы) [27, 28]. Некоторое представление об этой теории могут дать следующие, установленные им теоремы.

Теорема 5. *Для ZA-групп следующие три свойства равносильны:*

а) *группа не имеет собственных подгрупп конечного индекса;*

б) *группа полная в смысле Черникова;*

в) *группа имеет свойство неограниченной извлекаемости корней из ее элементов.*

Теорема 6. *Во всякой полной ZA-группе G существует система подгрупп $A_0, A_1, \ldots, A_\alpha, \ldots, \alpha < \gamma$, обладающая следующими свойствами:*

а) *каждая из групп* A_α *изоморфна либо аддитивной группе рациональных чисел, либо квазициклической группе;*

б) *подгруппа* B_β, $0 < \beta \leqslant \gamma$, *порожденная всеми подгруппами* A_α, $0 \leqslant \alpha < \beta$, *является нормальной подгруппой группы* G;

в) $B_\beta \cap A_\beta = 1$ *для всех* $\beta, 0 < \beta < \gamma$;

г) $B_\gamma = G$.

Обратно, всякая группа G, *обладающая системой подгрупп с этими свойствами, будет полной* ZA*-группой.*

Интересно сопоставить эту теорему с известной теоремой о полных абелевых группах. Аналогия в строении полных ZA-групп и полных абелевых групп при этом становится очевидной.

Теорема 7. *Центр полной* ZA*-группы является полной группой. Элементы конечного порядка полной* ZA*-группы содержатся в ее центре и составляют полную подгруппу. В частности, периодическая полная* ZA*-группа абелева.*

В связи с теоремой 7 возникает вопрос о существовании неабелевых полных периодических групп. Он был положительно решен в работе [27]. Построенный в ней пример дает также положительный ответ на вопрос о существовании полной группы (даже периодической) с полной периодической абелевой нормальной подгруппой, не содержащейся в ее центре. В случае периодической группы необходимое и достаточное условие, при котором такая нормальная подгруппа содержится в центре группы, дает следующая теорема С. Н. Черникова [29].

Теорема 8. *Если* A *— такая полная абелева нормальная подгруппа периодической группы* G, *все элементы которой, имеющие порядок равный квадрату простого числа, содержатся в центре группы* G, *то в центре группы* G *содержится и вся подгруппа* A. *Если порядки одной из групп* A *и* G/A *нечетны, то для вхождения подгруппы* A *в центр группы* G *достаточно, чтобы все элементы подгруппы* A, *имеющие простой порядок, содержались в центре группы* G.

Следствие. *В периодической группе централизатор каждой абелевой нормальной подгруппы с условием минимальности имеет конечный индекс.*

Позднее это предложение было обобщено в следующей теореме [30].

Теорема 9. *Всякая периодическая группа автоморфизмов черниковской группы является конечным расширением содержащейся в ней подгруппы внутренних автоморфизмов группы.*

С появлением исследований С. Н. Черникова в разработку теории полных групп включились А. И. Мальцев, В. М. Глушков, М. И. Каргаполов и др. А. И. Мальцев создал теорию пополнений локально нильпотентных групп без кручения, одним из результатов которой является следующая теорема, свидетельствующая об универсальности класса полных ZA-групп.

Теорема 10. *Подгруппами полных* ZA*-групп без кручения исчерпываются всевозможные* ZA*-группы без кручения.*

4. Условие минимальности для различных видов подгрупп. В связи с отмечавшейся уже работой О. Ю. Шмидта [14] возник вопрос, нельзя ли в теоремах 1, 2 условие минимальности для всех подгрупп заменить более слабым условием минимальности для одних только абелевых подгрупп (неравносильность этих условий в общем случае вытекает из результатов П. С. Новикова и С. И. Адяна [31]). Положительным ответом на этот вопрос явились следующие теоремы С. Н. Черникова [32, 33].

Теорема 11. *Если локально конечная* p*-группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она черниковская.*

Теорема 12. *Если локально разрешимая группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых подгрупп, то она черниковская.*

Следствие. *Бесконечная локально разрешимая и, в частности, локально конечная* p*-группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

В связи с приведенными утверждениями С. Н. Черниковым [8] были поставлены два вопроса: обладает ли всякая бесконечная локально конечная группа бесконечной абелевой подгруппой и имеет ли абелеву подгруппу конечного индекса локально конечная группа с условием минимальности для подгрупп? Положительное решение первого вопроса получили М. И. Каргаполов [34], а также Холл и Кулатилака [35]. Второй вопрос был положительно решен В. П. Шунковым [36]. Решение этих вопросов стало возможным лишь после положительного решения Фейтом и Томпсоном проблемы Бернсайда о разрешимости конечных групп нечетного порядка и связанной с ней глубокой разработкой теории конечных простых групп. На этой основе оказалось возможным свести рассматриваемые вопросы к отмеченным здесь результатам.

Результаты С. Н. Черникова убедительно продемонстрировали плодотворность идеи изучения групп по свойствам их абелевых подгрупп и его работы [32, 33] положили начало систематическим исследованиям в этом направлении. Важные результаты здесь были получены А. И. Мальцевым, В. С. Чариным, М. И. Каргаполовым, Ю. И. Мерзляковым, Ю. М. Горчаковым и др.; их обзор можно найти, например, в книге [37].

В качестве «двойственного» условия относительно условия минимальности для абелевых подгрупп в работе [9] появилось условие минимальности для неабелевых подгрупп и был доказан следующий результат.

Теорема 13. *Если неабелева группа удовлетворяет условию минимальности для неабелевых подгрупп и имеет нормальную систему с конечными факторами* (*в частности, локально разрешима*), *то она черниковская.*

Аналогичную теорему установил В. П. Шунков [38] для локально конечных групп.

В работе О. Ю. Шмидта [3] появилось условие конечности убывающих нормальных цепей подгрупп группы, начинающихся с нее. Оказалось, что в случае локально разрешимых групп оно равносильно условию минимальности для всех подгрупп (см. [8]). Более слабым является условие минимальности для нормальных подгрупп. Изучение групп с этим условием, начавшееся И. Д. Адо и С. Н. Черниковым, получило продолжение в работах Бэра, Хартли, Макдаугалла и других авторов (см. [8, 17]). Как показал В. С. Чарин [39], условие минимальности для нормальных подгрупп не равносильно условию минимальности для всех подгрупп уже в случае двуступенно разрешимых групп и тем самым приводит к существенному расширению класса черниковских групп. Однако это расширение в случае разрешимых групп не выходит за пределы класса периодических групп [40].

Отметим также, что многие авторы исследовали группы, удовлетворяющие условию минимальности для других видов подгрупп: примарных (М. И. Каргаполов, В. П. Шунков и др.), неинвариантных абелевых (С. Н. Черников), недополняемых абелевых (Н. С. Черников). Кроме того, рассматривались некоторые варианты условия минимальности, такие как условие π-минимальности (Я. Д. Половицкий), слабое условие минимальности (Д. И. Зайцев, Бэр).

5. Слойно конечные группы и их обобщения. Одним из условий конечности является требование конечности множества элементов группы любого заданного порядка (слой элементов группы). Группы, удовлетворяющие этому условию, были детально изучены С. Н. Черниковым [41—43] и получили название *слойно-конечных групп*. Приведем некоторые результаты этих работ.

Теорема 14. *Группа G тогда и только тогда слойно-конечна, когда ее можно представить в виде произведения двух таких поэлементно перестановочных подгрупп A и B, первая из которых является полной абелевой слойно-конечной группой, а вторая — слойно-конечной группой с конечными силовскими p-подгруппами по всем простым числам p* (*тонкая слойно-конечная группа*).

В [41] предлагается конструкция, позволяющая построить по произвольной полной периодической абелевой группе A и произвольной группе B любую группу G, имеющую разложение $G = \bar{A}\bar{B}$, где $\bar{A}$, $\bar{B}$ — поэлементно перестановочные подгруппы из G, изоморфные соответственно группам A, B.

Теорема 15. *Класс слойно-конечных групп совпадает с классом локально нормальных групп, силовские р-подгруппы которых по всем простым числам р черниковские. Тонкие слойно-конечные группы — это в точности локально нормальные группы с конечными силовскими р-подгруппами по всем простым р.*

Теорема 16. *Каждая локально нормальная группа с конечными силовскими р-подгруппами по всем простым числам р является подгруппой прямого произведения конечных групп, обладающего этим же свойством.*

Локально нормальной называется группа, каждое конечное множество элементов которой содержится в ее конечной нормальной подгруппе. В связи с последней теоремой в [8] был поставлен вопрос: каким условиям должна удовлетворять локально нормальная группа, чтобы ее можно было вложить в прямое произведение конечных групп. Этот вопрос привлек внимание к локально нормальным группам, определил подход к глубокому анализу свойств прямых разложений групп. Ряд важных относящихся к нему результатов получен Ф. Холлом и Ю. М. Горчаковым (см. [44]).

Естественным обобщением слойно-конечных групп явились группы с конечными классами сопряженных элементов (FC-группы). Им посвящены многочисленные работы и, в частности, работы Бэра, Неймана, С. Н. Черникова. В классе FC-групп содержатся слойно-конечные, локально нормальные, а также абелевы группы. Поэтому возникает вопрос, какие еще группы содержатся в классе FC-групп? Ответ на него дает следующая теорема [42].

Теорема 17. *Группа тогда и только тогда является FC-группой, когда она либо локально нормальна, либо является центральным расширением абелевой группы без кручения с помощью локально нормальной группы.*

Теория FC-групп к настоящему времени всесторонне развита; она изложена в работах Ю. М. Горчакова [44] и Томкинсона [45].

Условие конечности можно налагать не на все слои, а лишь на те из них, которые удовлетворяют некоторым дополнительным требованиям. При этом появляются обобщения слойно-конечных групп. В этом аспекте представляет интерес следующая теорема [32].

Теорема 18. *Если в локально конечной р-группе конечен хотя бы один нетривиальный слой, то она черниковская.*

6. Ограничения для бесконечных подгрупп. При изучении бесконечных групп можно выделять различные их виды, налагая ограничения только на бесконечные подгруппы. Инициатива в этом направлении принадлежит С. Н. Черникову. Им были выделены и изучены следующие классы групп [9—11, 46]:

1) бесконечные неабелевы группы, все бесконечные подгруппы которых нормальны,— INH-группы;

2) бесконечные группы, в которых каждая собственная бесконечная подгруппа отлична от своего нормализатора,— IN-группы;

3) бесконечные неабелевы группы, имеющие бесконечные абелевы подгруппы и не имеющие неинвариантных подгрупп такого рода, — IH-группы;

4) бесконечные неабелевы группы, в которых нормальны все бесконечные неабелевы подгруппы,— $\overline{IH}$-группы;

5) бесконечные неабелевы группы, все собственные бесконечные подгруппы которых абелевы,— IM-группы.

В классе $\overline{IH}$-групп содержатся и так называемые бесконечные метагамильтоновы группы, т. е. группы, в которых все неабелевы подгруппы нормальны. Метагамильтоновы группы впервые изучались Г. М. Ромалисом и Н. Ф. Сесекиным.

Приведем здесь некоторые из результатов, полученных С. Н. Черниковым при изучении групп видов 1—5.

Теорема 19. *Класс INH-групп, имеющих бесконечные абелевы подгруппы, исчерпывается бесконечными гамильтоновыми группами, а также неабелевыми негамильтоновыми группами, которые являются расшире-*

ниями квазициклических групп с помощью конечных абелевых и конечных гамильтоновых групп.

В работе [10] такие расширения детально описаны.

Теорема 20. *Непериодическая IN-группа удовлетворяет нормализаторному условию. Локально конечная группа G тогда и только тогда является IN-группой, не удовлетворяющей нормализаторному условию, когда она разлагается в полупрямое произведение $G = P \times S$ подгрупп P и S, удовлетворяющих следующим условиям:*

а) *P — бесконечная черниковская силовская p-подгруппа группы G, S — конечная нильпотентная группа;*

б) *фактор-группа G/R группы G по максимальной полной подгруппе R из P нильпотентна;*

в) *$C_S(P) = C_S(R)$ и фактор-группа $S/C_S(P)$ — отличная от единицы циклическая группа;*

г) *все отличные от единицы элементы группы $S/C_S(P)$ индуцируют в R неприводимые автоморфизмы.*

В работе [11] строение локально конечной IN-группы описано более детально, чем в теореме 20, с помощью полученных там свойств групп автоморфизмов прямых произведений конечного числа квазициклических p-групп с одним и тем же p.

Теорема 21. *Всякая IH-группа G разрешима и является конечным расширением бесконечной абелевой группы. Если группа G непериодическая, то она имеет абелеву нормальную подгруппу индекса 2.*

На основе этого предложения в [10] дается полное описание IH-групп.

Теорема 22. *При дополнительном условии локальной ступенчатости $\overline{IH}$-группы G справедливы следующие утверждения:*

а) *непериодическая $\overline{IH}$-группа метагамильтонова и ее коммутант является конечной примарной абелевой группой;*

б) *неметагамильтонова $\overline{IH}$-группа G черниковская и ее максимальная полная подгруппа R примарна, причем R — квазициклическая подгруппа, содержащаяся в центре группы G, если коммутант последней конечен;*

в) *$\overline{IH}$-группа G с бесконечным коммутантом G' неметагамильтонова и для нее $R < G'$ и фактор-группа G/R нильпотентна;*

г) *периодическая $\overline{IH}$-группа G имеет инвариантную в ней силовскую p-подгруппу с нильпотентным дополнением, имеющим не более одной неабелевой силовской подгруппы.*

Локально ступенчатой С. Н. Черников называет такую группу, в которой любая нетривиальная конечнопорожденная подгруппа имеет собственную подгруппу конечного индекса. Локально ступенчатыми являются локально конечные, обобщенно разрешимые группы (см. п. 2), группы, обладающие нормальной системой с конечными факторами и др. В [46] дано более подробное описание локально ступенчатых $\overline{IH}$-групп и получен также ряд свойств метагамильтоновых групп.

Теорема 23. *Локально ступенчатая IM-группа черниковская и ее максимальная полная подгруппа примарна.*

7. Группы с дополняемыми подгруппами. Холл установил следующий критерий разрешимости конечной группы: конечная группа разрешима тогда и только тогда когда ее силовские p-подгруппы дополняемы в ней для всех простых p, делящих порядок группы [47]. В связи с этим результатом Холл изучал конечные группы, все подгруппы которых дополняемы [48].

В 1954 г. С. Н. Черников опубликовал работу [12], относящуюся к группам с системами дополняемых подгрупп. В ней была поставлена общая задача изучения групп, все подгруппы которых, принадлежащие той или иной системе подгрупп, дополняемы. Последующие исследования показали, что такой подход к изучению групп позволяет выделять самые разнообразные классы групп, эффективно изучать их, а в ряде случаев получать и полное описание. Остановимся на некоторых исследованиях, относящихся к этой теме.

Произвольные группы, в которых все подгруппы дополняемы, всесторонне изучены Н. В. Баевой (Черниковой) [49]. За такими группами закрепилось название вполне факторизуемых групп. Группы с дополняемыми абелевыми подгруппами изучались С. Н. Черниковым [12]. Он установил, что при дополнительном условии локальной конечности они вполне факторизуемы. Затем это условие было снято [50, 51].

Важный класс абелевых групп — абелевы группы, сервантные подгруппы которых дополняемы (и, значит, выделяются прямыми слагаемыми), был также изучен в [12]. Полное описание групп этого класса дает следующая теорема.

Теорема 24. *В абелевой группе A тогда и только тогда каждая сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым, когда A является прямой суммой своих подгрупп: $A = T + R + A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, где T — периодическая группа, всякая примарная компонента которой имеет конечный период, R — полная группа, A_1, A_2, ..., A_k—конечное множество попарно изоморфных групп без кручения ранга* 1.

Работа [12] явилась одной из первых работ, в которых изучаются группы с дополняемыми нормальными подгруппами. В ней, в частности, установлен критерий полной факторизуемости групп с дополняемыми нормальными подгруппами.

Теорема 25. *Группа с дополняемыми нормальными подгруппами тогда и только тогда вполне факторизуема, когда она обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп с циклическими факторами* (*обобщенно сверхразрешима*).

Изучению групп с дополняемыми абелевыми нормальными подгруппами посвящен ряд других работ С. Н. Черникова (см. [52]). Так, им было дано конструктивное описание двуступенно разрешимых, а также обобщенно сверхразрешимых групп такого рода. При этом установлена следующая теорема.

Теорема 26. *Группы с дополняемыми абелевыми нормальными подгруппами, обладающие возрастающим рядом нормальных подгрупп с циклическими факторами, и только они представимы в виде полупрямого произведения двух таких абелевых групп, из которых первая разлагается в прямое произведение инвариантных относительно второй циклических групп простых порядков, и имеет в ней тривиальный централизатор.*

Сравнение теоремы 26 с соответствующей теоремой, описывающей вполне факторизуемые группы [49], показывает, что в ней рассматривается класс групп, в строении которых сохраняются основные черты строения вполне факторизуемых групп. О широте этого класса свидетельствует тот факт, что он включает и некоторые непериодические группы. В дальнейших работах С. Н. Черникова класс обобщенно сверхразрешимых групп был заменен более общим классом групп, обладающих возрастающим рядом нормальных подгрупп с локально циклическими факторами (см. [52]).

С. Н. Черников ввел в рассмотрение группы с плотной системой дополняемых абелевых подгрупп. Система дополняемых абелевых подгрупп группы G называется плотной, если для любых двух абелевых подгрупп $A < B$ группы G, из которых первая не максимальна во второй, в G существует дополняемая подгруппа, содержащаяся строго между ними. Сама группа G называется в этом случае *СА-плотной*. С. Н. Черников получил детальное описание строения конечных CA-плотных групп, а также доказал следующую теорему (см. [52]).

Теорема 27. *Бесконечная локально конечная СА-плотная группа вполне факторизуема.*

Ряд работ С. Н. Черникова [53—56] посвящен характеризации различных классов групп с помощью системы дополняемых подгрупп. Им, в частности, получена характеризация конечных сверхразрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами и некоторых видов бесконечных обобщенно сверхразрешимых групп, а также сверхразрешимых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Приведем здесь один из результатов

Теорема 28. *Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами и только они являются такими конечными группами с* *абелевыми силовскими подгруппами, в которых дополняема каждая примарная циклическая подгруппа, дополняемая хотя бы в одной содержащей ее силовской подгруппе.*

К настоящему времени имеется ряд работ как советских, так и зарубежных авторов, посвященных изучению групп с теми или иными системами дополняемых подгрупп. При этом детальное описание получено для групп, в которых дополняемы все бесконечные подгруппы (С. Н. Черников), подгруппы простых порядков (Ю. М. Горчаков), неинвариантные (Ю. М. Горчаков, В. А. Шериев), нециклические (О. Н. Зуб), непримарные (Э. С. Алексеева, Н. М. Сучков), неабелевы (П. П. Барышовец), элементарные (Я. П. Сысак), непримарные циклические (Ю. Б. Мельников, А. И. Старостин) и другие виды подгрупп.

В заключение отметим, что в настоящем обзоре рассмотрены в основном работы С. Н. Черникова — одного из основателей советской теории групп. Его богатые идеями работы получили широкий отклик и дальнейшее развитие у нас в стране и за рубежом. Более подробно описанные в обзоре направления исследований освещены в книге С. Н. Черникова [52].

1. *Prüfer H.* Unterschungen über die Zerlegbarkeit der abzähldaren primären Abelschen Gruppen // Math. Z.— 1923.— **17**, N 1.— S. 35—61.
2. *Курош А. Г.* Zur Zerlegung unendlicher Gruppen // Math. Ann. — 1932.— **106**, N 1.— S. 107—113.
3. *Шмидт О. Ю.* Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette // Math. Z.— 1928.— **29**, N 1.— S. 34—41.
4. *Узков А. И.* Über ein Theorem von Frobenius // Мат. сб.— 1936.— **1**, № 3.— С. 337—339.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные специальные группы // Там же. — 1939. — **6**, № 2. — С. 199—214.
6. *Черников С. Н.* Бесконечные локально разрешимые группы // Там же.— 1940.— **7**, № 1.— С. 35—64.
7. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных групп // Там же.— № 3.— С. 539—548.
8. *Черников С. Н.* Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук.— 1959.— **14**, № 5.— С. 45—96.
9. *Черников С. Н.* Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // Докл. АН СССР.— 1964.— **159**, № 4.— С. 759—760.
10. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Там же.— 1966.— **171**, № 4.— С. 806—809.
11. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами систем бесконечных подгрупп // Укр. мат. журн.— 1967.— **19**, № 6.— С. 111—121.
12. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп // Мат. сб.— 1954.— **35**, № 2.— С. 93—128.
13. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
14. *Шмидт О. Ю.* О бесконечных специальных группах // Мат. сб.— 1940.— 8, № 3.— С. 363—375.
15. *Мальцев А. И.* Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Там же.— 1940.— 8, № 3.— С. 405—422.
16. *Мягкова Н. Н.* О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1949.— **13**, № 6.— С. 495—512.
17. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups.— Berlin : Springer, 1972.— V. 1.— 210 p.; V. 2—254 p.
18. *Шунков В. П.* О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 2.— С. 220—248.
19. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Strong finiteness conditions in locally finite groups // Math. Z.— 1970.— **117**, N 3.— P. 309—324.
20. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— **44**, № 2.— С. 309—321.
21. *Черников С. Н.* О группах с силовским множеством // Мат. сб.— 1940.— 8, № 3.— С. 377—394.
22. *Курош А. Г., Черников С. Н.* Разрешимые и нильпотентные группы // Успехи мат. наук.— 1947.— **2**, № 3.— С. 18—59.
23. *Черников С. Н.* К теории локально разрешимых групп // Мат. сб.— 1943.— **13**, № 2-3.— С. 317—333.
24. *Мальцев А. И.* Об одном общем методе получения локальных теорем теории групп // Учен. зап. Иван. пед. ин-та.— 1941.— **1**.— С. 3—9.
25. *Heineken H., Mohamed I. J.* A group with trivial center satisfying the normalizer condition // J. Algebra.— 1968.— **10**, N 3.— P. 368—376.
26. *Коуровская* тетрадь. Нерешенные задачи теории групп / Под ред. В. Д. Мазурова, Ю. И. Мерзлякова, В. А. Чуркина.— 8-е изд.— Новосибирск, Ин-т математики СО АН СССР, 1982.—116 с.

27. *Черников С. Н.* Полные группы, обладающие возрастающим центральным рядом // Мат. сб.— 1946.— **18**, № 3.— С. 397—422.
28. *Черников С. Н.* К теории полных групп //Там же.—1948.— **22**, № 3.— С. 319—348.
29. *Черников С. Н.* О централизаторе полного абелева нормального делителя в бесконечной периодической группе // Докл. АН СССР.— 1950.— **72**, № 2.— С. 243—246.
30. *Черников С. Н.* О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Мат. заметки. — 1968.— **4**, № 1.— С. 91—96.
31. *Новиков П. С., Адян С. И.* О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 5.— С. 1176—1190.
32. *Черников С. Н.* О специальных *р*-группах // Мат. сб.— 1950.— **27**, № 2.— С. 185—200.
33. *Черников С. Н.* К теории локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР.— 1949.— **65**, № 1.— С. 21—24.
34. *Каргаполов М. И.* О проблеме О. Ю. Шмидта // Сиб. мат. журн.— 1963.— **4**, № 1.— С. 232—235.
35. *Hall P., Kulatilaka C. R.* A property of locally finite groups // J. London Math. Soc.— 1964.— **39**, N 2.— P. 235—239.
36. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 5.— С. 579—615.
37. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
38. *Шунков В. П.* Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // Алгебра. Матрицы и матричные группы.— Красноярск : Ин-т физики СО АН СССР, 1970.— С. 3—54.
39. *Чарин В. С.* Замечание об условии минимальности для подгрупп // Докл. АН СССР.— 1949.— **66**, № 4.— С. 575—576.
40. *Baer R.* Irreducible groups of automorphisms of abelian groups // Pacif. J. Math.— 1964.— **14**, N 3.— P. 385—406.
41. *Черников С. Н.* Бесконечные слойно конечные группы // Мат. сб.— 1948.— **22**, № 1.— С. 101—133.
42. *Черников С. Н.* О группах с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР.— 1957.— **114**, № 6.— С. 1177—1179.
43. *Черников С. Н.* О слойно конечных группах // Мат. сб.— 1958.—**45**, № 3.— С. 415—416.
44. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 120 с.
45. *Tomkinson M. J.* *FC*-groups.— Boston etc.: Pitman Adv. Publ. Program, 1984.— 171 p.
46. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 604—628.
47. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc.— 1937.— **12**, N 2.— P. 198—200.
48. *Hall P.* Complemented groups // Ibid.— P. 201—204.
49. *Баева Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР.— 1953.— **92**, № 5.— С. 877—880.
50. *Каргаполов М. И.* Некоторые вопросы теории разрешимых и нильпотентных групп // Там же.— 1959.— **127**, № 6.— С. 1164—1166.
51. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Учен. зап. Перм. ун-та.— 1960. — **17**.— С. 15—31.
52. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.—384 с.
53. *Черников С. Н.* Конечные сверхразрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. — Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979.—С. 3—15.
54. *Черников С. Н.* Сверхразрешимые группы с условием минимальности, все примарные одгруппы которых абелевы // Алгебра и логика.— 1984.— **23**, № 6.— С. 702—720.
55. *Черников С. Н.* Локально сверхразрешимые периодические *A*-группы с условием минимальности для примарных подгрупп // Строение групп и свойства их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 5—21.
56. *Черников С. Н.* Сверхразрешимые примарно элементарные группы // Исслед. групп с заданными свойствами подгрупп.—Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981.— С .3— 13.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 06.11.87