УДК 519.41/47

П. П. Барышовец

О конечных A-группах, в которых все неметациклические подгруппы дополняемы

Известно, что условие дополняемости всех абелевых или всех циклических подгрупп конечной группы не расширяет класса вполне факторизуемых групп [1, 2], т. е. групп, в которых дополняемы все подгруппы. В связи с этим выделены и изучались группы с теми или иными системами дополняемых нециклических подгрупп [3, 4]. Одним из дальнейших шагов в этом направлении естественно считать и изучение неметациклических групп, в которых дополняемы все неметациклические подгруппы. При этом метациклической называется всякая группа, являющаяся расширением циклической (в частности, единичной) группы с помощью циклической. В работе [5] описаны конечные нильпотентные группы со свойством дополняемости неметациклических подгрупп. В настоящей работе рассматриваются конечные разрешимые группы с абелевыми силовскими подгруппами, обладающие таким свойством. Доказана следующая теорема.

Теорема. *В конечной неметациклической группе G с абелевыми силовскими подгруппами и абелевым коммутантом тогда и только тогда дополняемы все неметациклические подгруппы, когда она является группой одного из следующих типов:*

I) G — *конечная неметациклическая вполне факторизуемая группа;*

II) $G = \langle a \rangle \rightthreetimes (\langle b \rangle \times R)$, *где* $R = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$, $|c_1| = r^{\alpha}$, $|c_2| = r^{\beta}, \alpha > 1$, $\beta \geqslant 1$, r — *простое число*, $r \nmid |a| \cdot |b|$, $C_R(a) = \langle c_1^r \rangle \times \langle c_2^r \rangle$, $\langle a, b \rangle$ — *вполне факторизуемая группа;*

III) $G = (\langle a \rangle \times D) \rightthreetimes \langle c \rangle$, *где* $\langle a, c \rangle' = \langle a \rangle, D \lhd G$, $|c| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, $[a, c^p] =$

$= 1,\ p \nmid |a| = (|a|^2, |D|),\ p^2 \nmid |D|, |a|^2 \,|\, |G'|, \langle a, D, c^p\rangle$ — *метациклическая, а* $\langle a, D\rangle$ — *вполне факторизуемая группа;*

IV) $G = D \rtimes B$, где $B = (\langle a\rangle \rtimes \langle c\rangle) \times (\langle b\rangle \rtimes \langle d\rangle)$, $|a| = |b|$, $|c| = p^{\alpha}$, $|d| = q^{\beta}$, $\alpha, \beta > 1$, $p \neq q$, $\langle a\rangle \times \langle b\rangle = B' \lhd G$, $|B| C_B(B')| = pq$, *подгруппы* $\langle D, B', c, d^q\rangle$ *и* $\langle D, B', d, c^p\rangle$ *метацикличны, а* DB' — *вполне факторизуемая группа;*

V) $G = (K \times D) \rtimes \langle b\rangle$, *где* $|b| = p^{\alpha}$, $\alpha > 1$, p — *простое число,* $K = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \lhd G$, $|a| = |b| > 1$, $\langle D, K, b^p\rangle$ — *метациклическая, а* DK — *вполне факторизуемая группа и* b *индуцирует на силовских подгруппах из* K *неприводимый автоморфизм порядка* p;

VI) $G = (K \times D) \rtimes (\langle a\rangle \times \langle b\rangle$, *где* $K \lhd G$, $D \lhd G$, $a \neq 1$, K — *абелева группа,* $D\ \langle b\rangle$ — *метациклическая,* $\langle D, a, b\rangle$ — *вполне факторизуемая, а* $K \rtimes \langle a, b\rangle$ — *группа Фробениуса, причем неединичные элементы из* $\langle a\rangle$ *индуцируют на силовских подгруппах из* K *неприводимые автоморфизмы и выполняется одно из следующих утверждений*:

а) $|K| = p^3$, $b = 1$, $p \nmid |D|$;

б) $|K| = p^2$, $B = KD\langle b\rangle$ — *вполне факторизуемая, а* $B/C_B(B')$ — *циклическая группа, причем* $p^2 \nmid |D|$, *и если* $b \neq 1$, *то* $p \nmid |\langle D, b\rangle'|$;

в) $K = \langle c\rangle \times \langle d\rangle$, $|c| = |d|$ — *составное число,* $(|c|, |D|) = 1$, $b = 1$.

1. Пусть G — произвольная неметациклическая группа, обладающая свойством: любая неметациклическая подгруппа из G дополняема в G. Тогда все неметациклические подгруппы и неметациклические фактор-группы G обладают тем же свойством. Кроме того, фактор-группа группы G по ее неметациклическому нормальному делителю вполне факторизуема.

Определение 1 [6]. *Конечная разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами называется A-группой.*

В A-группе G пересечение коммутанта G' с центром $Z(G)$ тривиально и дополняемы коммутанты всех ее нормальных подгрупп [6]. Эти свойства мы будем использовать, иногда без явной ссылки на них.

Лемма 1. *Конечная группа G с циклическим коммутантом и абелевыми метациклическими силовскими подгруппами тогда и только тогда метациклична, когда ее фактор-группа $G/G_G(G')$ циклична.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — метациклическая группа. Если K — такой ее циклический нормальный делитель, что G/K — циклическая группа, то, очевидно, $G' \subset K$ и $K \subset C_G(G')$. Отсюда следует, что $G/C_G(G')$ — циклическая группа. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G/C_G(G')$ — циклическая группа и M — дополнение к G' в группе G. Так как $C = C_G(G')$ — нильпотентная группа, то она абелева. Возьмем из каждой нециклической силовской подгруппы M_i группы M такую максимальную циклическую подгруппу $\langle b_i\rangle$, которая содержится в $C_G(G')$. Возможность такого выбора следует из цикличности фактор-группы $G/C_G(G')$. Тогда если $\langle b\rangle$ — произведение всех таких подгрупп $\langle b_i\rangle$, то $K = G' \times \langle b\rangle$ и G/K — циклические группы. Следовательно, G — метациклическая группа. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\overline{G}$ — недисперсивная A-группа с дополняемыми неметациклическими подгруппами. Тогда $|\overline{G}| \vdots 6$ и ее холловская $\{2, 3\}$-подгруппа имеет вид*

$$G = (((\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \rtimes \langle b_1\rangle) \times ((\langle b_2\rangle \rtimes \langle a_3\rangle) \times \langle b_3\rangle,$$

где $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 2$, $|b_1| = |b_2| = 3$, $|b_3| = 3$ *или* 1, $\langle a_1, a_2, b_1\rangle \simeq A_4$, $\langle b_2, a_3\rangle \simeq S_3$.

Доказательство. Пусть H — минимальная недисперсивная подгруппа группы $\overline{G}$. Легко убедиться, используя [8], что $H \simeq A_4 \times S_3$. Если $|G_2| > \infty$, то она элементарная абелева и порядка $\geqslant 16$. Тогда, взяв ее нормализатор $N_G(G_2)$ в группе G и дополнив в нем различные подгруппы, имеющие в G_2 индекс 2, легко получим $G_2 \subset Z(N_G(G_2))$. Последнее ввиду теоремы 2.6 гл. IV [9] противоречит недисперсивности группы $\bar{G}$. Значит, $|G_2| = 8$. Пусть $|G_3| \neq |\langle b_1, b_2\rangle|$. Тогда G_3— элементарная абелева порядка $\geqslant 3^3$. Подгруппа $\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle$ дополняема в G, поскольку она в G нормальна, а G_2 элементарная абелева [9]. Значит, $G = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle) \rtimes T$. Группа

T дисперсивна, поэтому $T = T_3 \rightthreetimes T_2$, где $|T_3| = |G_3|$, $|T_2| = 2$. Если порядок силовской 3-подгруппы V коммутанта G' больше 3, то $(\langle a_1 \rangle \times \times V) \rightthreetimes T_2$ — неметациклическая подгруппа и ее дополнение N — абелева группа порядка $2 \cdot 3^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$. Тогда N_2 содержит в своем централизаторе силовскую 3-подгруппу $G_3 = VN_3$ и $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = 1$. Противоречие. Значит, $|V| = 3$. Тогда ввиду дополняемости коммутанта G' в группе G подгруппой M имеет место соотношение $|M_3 : C_{M_3}(\langle a_1, a_2 \rangle)| \vdots 3$. Следовательно, $G = A_4 \times S_3 \times D$, где D — элементарная абелева 3-группа. Ясно, что $D \leqslant 3$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если A-группа G с дополняемыми неметациклическими подгруппами имеет хотя бы одну неметациклическую силовскую подгруппу, то у G все силовские подгруппы элементарные абелевы.*

Доказательство. Пусть P — неметациклическая силовская p-подгруппа группы G по числу p и $q \mid |G|$, $q \neq p$. Рассмотрим холловскую $\{p, q\}$-подгруппу T группы G. Если она недисперсивна, то обе силовские подгруппы и по числу p, и по числу q элементарные абелевы в силу леммы 2.

Пусть T — дисперсивная группа. Тогда подгруппы $\Omega(T_p)\, T_q$ и $T_p \cdot \Omega(T_q)$ неметацикличны и дополняемы в T. Отсюда и из теоремы 4.7 гл. VI [9] следует их элементарная абелевость. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если коммутант G' неметациклической A-группы G с дополняемыми неметациклическими подгруппами абелев, то он вполне факторизуем.*

Доказательство. Так как G — A-группа, то $G = G' \rightthreetimes M$, где M — абелева группа, и $K = \Omega(G') = (KM)'$. Если $V = KM$ — метациклическая группа, то силовские подгруппы из G метацикличны и K, а значит, и G' — циклическая группа. В силу леммы 1 $V/C_V(K)$ циклична, а потому циклична и фактор-группа $G/C_G(G')$. Но тогда в силу леммы 1 группа G метациклична. Из полученного противоречия следует, что V — неметациклическая и, значит, дополняемая в G подгруппа. При $K \neq G'$ отсюда легко получаем противоречие с теоремой 4.7 гл. VI [9]. Следовательно, G' — вполне факторизуемая группа. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы. Необходимость. Ввиду леммы 4 G' — абелева вполне факторизуемая группа. Так как силовские подгруппы группы G абелевы и коммутант дополняем, то отсюда ввиду теоремы Гашютца (см. теорему 17.4 гл. I [9]) следует, что G' разлагается в прямое произведение

$$G' = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n \tag{1}$$

минимальных нормальных делителей группы G. Если и дополнение M к G' в G является вполне факторизуемой группой, то у G силовские подгруппы элементарные абелевы.

Пусть M, а значит, и G содержит элемент непростого примарного порядка. Тогда ввиду леммы 3 силовские подгруппы группы G метацикличны. Следовательно, метацикличны и группы M и G'. Возможны следующие случаи.

а). G' — циклическая группа. Тогда в силу результатов [7] подгруппа M содержит такую нециклическую силовскую r-подгруппу $R = \langle c_1 \rangle \times \times \langle c_2 \rangle$, что $G'R$ — неметациклическая группа. Так как $G'R \lhd G$, то $M = R \times M_1$, где M_1 — вполне факторизуемая группа. Тогда и группа $A = G'M_1$ вполне факторизуема. С другой стороны, поскольку M — не вполне факторизуемая группа, то A — метациклическая группа. При этом $A \lhd G$, $r \nmid |A|$. Нетрудно увидеть, что G — группа типа II.

б). Группа G сверхразрешима. G' — нециклическая группа. Тогда $G' = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \langle b \rangle$, где $|a_1| = |a_2|$, и подгруппы $\langle a_1 \rangle$, $\langle a_2 \rangle$, $\langle b \rangle$ вполне факторизуемы и нормальны в G. Пусть c — элемент примарного непростого порядка, например p^{α}, из M, $\alpha > 1$ и $M = \langle c \rangle \times M_1$. Тогда $Q = G'M_1 \langle c^p \rangle$ — метациклическая группа и, следовательно, Q' — циклическая группа. Поэтому не теряя общности можно утверждать, что $[a_1, M_1] = [a_1, c_p] = 1$. Но тогда в силу свойств A-групп $\langle a_1, c \rangle' = \langle a \rangle$. Если подгруппа Фраттини $\Phi(M)$ группы M является циклической p-группой, т. е. M_1 — вполне факторизуемая группа, то вводя обозначения $D = \langle a_2,$

$b,\ M_1\rangle$, $a = a_1$, получаем, как легко убедиться, группу типа III. При этом $p \nmid |a|$, так как иначе $p^2 \,\|\, |\langle a,\ D\rangle|$ и силовская p-подгруппа P группы G будет неметациклической при любом p. В силу тех же соображений $p^2 \nmid |D|$. Если $(|D|,\ |a|^2) > |a|$, то $\langle a,\ D\rangle$ — неметациклическая группа, что противоречит соотношению $|c| = p^\alpha$, $\alpha > 1$.

Далее, $|a|^2 \,\|\, |G'|$ ввиду нецикличности G'. Остальные два условия очевидны.

Пусть $\Phi(M)$ не является циклической p-группой. Тогда $\langle a_2,\ c\rangle' = 1$. Пусть $d \in M_1$, $[a_2,\ d] \neq 1$. Тогда $\langle a_1, a_2, c, d\rangle$ — неметациклическая группа. Поэтому $M = \langle c\rangle \times \langle d\rangle \times T$, где T — вполне факторизуемая группа. Поскольку $\Phi(M)$ — не циклическая p-группа, то $|d| = q^\beta$, $\beta > 1$. Далее, очевидно, $\langle a_1,\ a_2,\ T\rangle' = 1$. Значит, $G = (\langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times D) \leftthreetimes (\langle c\rangle \times \langle d\rangle)$, где $D = \langle b,\ T\rangle$ — вполне факторизуемая нормальная метациклическая группа и $\langle a_1,\ c\rangle' = a_1$, $\langle a_2,\ d\rangle' = \langle a_2\rangle$, $\langle a_1,\ d\rangle' = \langle a_2,\ c\rangle' = 1$, $[a_1,\ c^p] = 1 = [a_2,\ d^q]$. Если $p = q$, то $\langle a_1,\ cd\rangle' = \langle a_1\rangle$, $\langle a_2,\ cd\rangle' = \langle a_2\rangle$ и $\langle cd\rangle$ — циклическая p-группа, что противоречит предположению о подгруппе $\Phi(M)$. Значит, $q \neq p$ и G — группа типа IV.

в). Группа G несверхразрешима. Тогда хотя бы один из множителей, например K_1, разложения (1) нециклический. Ясно, что $|K_1| = q^2$, где q — простое число. Тогда $(K_1M)' = K_1$, что следует из свойств A-групп, и если $x \in M$, $[K_1,\ x] \neq 1$, то $\langle K,\ x\rangle' = K$. Значит, $M = \langle x\rangle \times M_1$, где M_1 — вполне факторизуемая группа. Так как силовские подгруппы у G не все элементарные абелевы, то $|x| = p^\alpha$, и $\alpha > 1$, $\langle \overline{K},\ M_1\rangle' = 1$ для любой подгруппы непростого порядка $\overline{K}$ из (1). Пусть K — произведение всех таких подгрупп из (1), D — произведение остальных и подгруппы M_1. Тогда G, как нетрудно убедиться, группа типа V.

Пусть теперь силовские подгруппы группы G элементарные абелевы, а сама она не вполне факторизуема. Тогда в разложении (1) есть множители непростого порядка. Если K — такой множитель, то KM — не вполне факторизуемая группа и поэтому содержит подгруппу H Миллера — Морено с коммутантом H' непростого порядка [10]. Так как G — A-группа, то $(KM)' = K$ [6] и потому для любого элемента $x \in M$

$$\langle K, x\rangle' = 1 \text{ или } K, \tag{2}$$

т. е. M индуцирует на K регулярную группу автоморфизмов. Следовательно, $M = \langle d\rangle \times M_1$, где $[M_1,\ K] = 1$, и $K\langle d\rangle$ — группа Фробениуса [9]. Кроме того, из (2) следует невозможность случая $|K| = p^3$, $|H'| = p^2$ и потому

$$K = H'. \tag{3}$$

Рассмотрим следующие случаи.

а). $|K| = p^3$. Тогда G/K — вполне факторизуемая группа и $G = K \leftthreetimes L = (K \times L') \leftthreetimes N$. Если для $x \in N$ группа $K\langle x\rangle$ неабелева и вполне факторизуема, то ввиду (2) $K\langle x\rangle$ содержит неметациклическую подгруппу индекса p. Ее дополняемость в группе G противоречит (3). Значит, элемент из N действует на K неприводимо. Таким образом, G —группа типа VIa с $D = C_G(K)$.

б). $|K| = p^2$ и K — единственный минимальный нормальный делитель группы G непростого порядка. Тогда $G = (K \times D) \leftthreetimes (\langle a\rangle \times \langle b\rangle)$, где $\langle a,\ b\rangle = \langle d\rangle$, $a \neq 1$ и элементы из $\langle a\rangle$ действуют на K неприводимо. Группы $B = KD\langle b\rangle$ и G/K вполне факторизуемые. Если $p^2 \mid |D|$, то легко показать, что G — вполне факторизуемая группа.

Пусть $p^2 \nmid |D|$. Предположим, что $B|C_B(B')$ — нециклическая группа. Так как B — вполне факторизуемая группа, то B' абелева и $B' \subset C_B(B')$. Значит, $\overline{B} = B/C_B(B')$ — абелева группа. Пусть R^* — нециклическая силовская подгруппа из $\overline{B}$, например, по числу r. Ясно, что $r \neq p$. Поэтому $B_r \subset D\langle b\rangle$ и $|B_r| = r^2$. Далее, $[K, B_r] \neq 1$; иначе ввиду метацикличности группы $D\langle b\rangle$ $B_r \cap C_B(B') \neq 1$. Пусть $K_1 \subset K$ и $|K_1| = p$, $[K_1, B_r] \neq 1$, Так как $B_r \cap D \neq 1$, то $[K, B_r] = K_1$. Но тогда, поскольку $B_r \cap D \not\subset C_B(B')$, $[B_r \cap D, \langle D, b\rangle'] \neq 1$. Следовательно, подгруппа $K_1D\langle b\rangle$ неметациклическая ввиду леммы 1 и недополняема в G. Из полученного противоречия следует, что $B/C_B(B')$ — циклическая группа.

Если $b \neq 1$ и $p \| \langle D, b\rangle' |$, то, поскольку $K \subset B'$, подгруппа порядка $p | D \langle b \rangle|$ недополняема в G и неметациклична. Значит, если $b \neq 1$, то $p \nmid |\langle D, b\rangle'|$.

в). $|K| = p^2$ и G содержит минимальный нормальный делитель $L \neq \neq |K|$ непростого порядка. Ясно, что $|L| = q^2$, $q \neq p$. Если $K\langle x\rangle$ — группа Миллера — Морено, а $L\langle x\rangle$ — не группа Миллера — Морено, то берем подгруппу $W = K\overline{L}\langle x\rangle$, где $|\overline{L}| = q$, $|\overline{L}| \subset L$ и $x \in N_G(\overline{L})$. Из дополняемости в G подгруппы W следует ввиду (3), что для любого $x \in M$ группы $K\langle x\rangle$ и $L\langle x\rangle$ обе либо вполне факторизуемы (в частности, абелевы), либо нет. Если $y \in M$ и $K\langle y\rangle$ — неабелева вполне факторизуемая группа, то рассматривая подгруппу $V = K\overline{L}\langle y\rangle$, где $\overline{L}$ — подгруппа порядка q из L, $y \in N_G(\overline{L})$, приходим ввиду (3) к противоречию. Действительно, подгруппа V в G недополняема и неметациклична, $M = \langle a\rangle \times M_1$. Значит, элементы из $\langle a\rangle$ действуют на любом минимальном нормальном делителе L непростого порядка группы G неприводимо, причем $[M_1, L] = 1$. Введя обозначение $D = FM_1$, где F — произведение множителей простых порядков из (1), получим $G = \langle c, d, D\rangle \rtimes \langle a\rangle$, где $\langle c, d\rangle = \langle c\rangle \times \langle d\rangle \lhd G$, $|c| = = |d|$. Очевидно, что G — группа типа VIв.

Достаточность. 1. Пусть G — группа типа II. Тогда $G' \subset \subset \langle a\rangle$ и, значит, G' — циклическая группа. Так как $r \nmid |A|$ и $A = \langle a, b\rangle$ — вполне факторизуемая группа, то силовские подгруппы у G абелевы и метацикличны. Пусть теперь H — подгруппа группы G ($H \subset G$). Если H содержит какую-нибудь силовскую r-подгруппу G_r группы G, то $HA = = G$, и потому ввиду полной факторизуемости группы A подгруппа H в G дополняема. В противном случае $H/C_H(H')$ — циклическая группа и потому ввиду леммы 1 подгруппа H метациклична.

2. Пусть G — группа типа III и $H \subset G$. Из соотношений $p \nmid |a|$, $p^2 \nmid |D|$ следует, что порядок силовской p-подгруппы группы $S = \langle a, D\rangle$ делит p и потому силовские p-подгруппы группы G абелевы. Абелевость остальных силовских подгрупп группы G следует из полной факторизуемости группы S.

Покажем, что G' — абелева группа. В самом деле, $G' \subset S$ и $G'' \subset D'$. Но D — метациклическая и, значит, D' — циклическая группа. Так как в A-группе G с $G'' \neq 1$ последний нециклинчен [6], то отсюда следует $G'' = 1$.

Пусть H — содержит циклическую подгруппу N порядка p^α. Так как порядок силовской p-подгруппы Q из S делит p и Q дополняема в содержащей ее силовской p-подгруппе G_p группы G, то $S \cap N = 1$ и потому $SH = = G$. Ввиду полной факторизуемости группы S подгруппа H дополняема в группе G.

Предположим теперь, что H не содержит циклической подгруппы порядка p^α. Если $H \not\subset \langle S, c^p\rangle$, то $G = \langle S, c^p\rangle H$. Но тогда ввиду теоремы 4.7 гл VI [9] силовская p-подгруппа группы G не содержит элементов порядка p^α. Из полученного противоречия следует, что $H \subset \langle S, c^p\rangle$ и, значит, H — метациклическая группа.

3. Пусть G — группа типа IV. Покажем, что G — A-группа. В самом деле, если T — силовская p-подгруппа из G, то $T = W \rtimes \langle x\rangle$, где W — силовская p-подгруппа из DB', а $|x| = p^\alpha$. Так как T содержится в метациклической группе $\langle D, B', c, d^q\rangle$, то отсюда ввиду элементарной абелевости группы W, следует, что $|W \| p$. Поэтому T — абелева группа. Абелевость силовской q-подгруппы группы G доказывается аналогично. Абелевость остальных силовских подгрупп группы G следует из полной факторизуемости группы DB'. Метацикличность силовских подгрупп группы G очевидна. Так как $G' \subset DB'$ (метациклической группе), то $G'' = 1$, что доказывается аналогично п. 2. Если H содержит циклические подгруппы порядков p^α и q^β, то $HDB' = G$ и потому ввиду полной факторизуемости группы DB' подгруппа H в группе G дополняема. В противном случае H содержится по крайней мере в одной из подгрупп $DB'\langle c, d^q\rangle$ или $DB'\langle c^p, d\rangle$ и, значит, метациклична.

4. Для группы G типа V доказательство аналогично п. 2.

5. Пусть G — группа типа VI и $H \subset G$. Если $H \supset K$, то подгруппа H/K дополняема в фактор-группе G/K. Если B/K — дополнение, то $HB = G$, $H \cap B = K$. Так как подгруппа K дополняема в G, то $B = B_1 K$, $B_1 \cap K = 1$. Тогда B_1 — дополнение к H в G.

Если $H \cap K = 1$, то рассматриваем подгруппу HK и рассуждаем аналогично.

Предположим, что $1 \neq H \cap K = \overline{K} \neq K$.

а). $|K| = p^3$. Тогда $\overline{K} \subset Z(H)$ и потому $H \subset K \times D = C_G(K)$ и, значит, H — метациклическая группа.

б). $|K| = p^2$. Пусть $K = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle \lhd K\langle b \rangle$ и $b \neq 1$. Покажем, что неединичные элементы из $\langle b \rangle$ трансформируют элементы x_1 и x_2 в одну и ту же степень. Действительно, пусть $y \in \langle b \rangle$ и $y^{-1}x_1 y = x_1^{\alpha}$, $y^{-1}x_2 y = x_2^{\beta}$, $\alpha \not\equiv \beta \pmod p$. Тогда если $1 \neq z \in \langle a \rangle$, то $y^{-1}(z^{-1}x_1 z)\, y = z^{-1}(y^{-1}x_1 y)\, z = z^{-1}x_1^{\alpha} z = (z^{-1}x_1 z)^{\alpha}$. Это значит, что $z^{-1}x_1 z \in \langle x_1 \rangle$. Противоречие с условием леммы. Значит, $\alpha \equiv \beta \pmod p$ и все циклические подгруппы порядка p из K нормальны в группе $K\langle b \rangle$.

Покажем теперь, что $H \subset B$. В самом деле, пусть $H \not\subset B$ и $y \in H$, $y \notin B$. Тогда $y = uv$, где $u \in B$, $v \in \langle a \rangle$. Далее $\overline{K} = y^{-1}\overline{K}y = (uv)^{-1}\overline{K}(uv) = v^{-1}u^{-1}\overline{K}uv = v^{-1}\overline{K}v$. Из полученного противоречия следует, что $H \subset B$. Группа $D\langle b \rangle$ метациклическая и, очевидно, силовская p-подгруппа группы KD элементарная абелева порядка p^2 или p^3. Отсюда следует, что силовские подгруппы группы H метациклические. Из условия $p \nmid |\langle D, b \rangle'|$ и метацикличности группы $D\langle b \rangle$ следует, что H'—циклическая группа. Так как из цикличности фактор-группы $B/C_B(B')$ легко получаем, что и фактор-группа $H/C_H(H')$ циклична, то по лемме 1 H — метациклическая группа.

Если $B = 1$, то метацикличность подгруппы H очевидна.

в). $K = \langle c \rangle \times \langle d \rangle$, $|c| = |d|$ — составное число. Если $\overline{K}$ — холловская подгруппа группы K, то рассуждения аналогичны случаю $H \cap K = 1$. В ином случае $H \subset KD$ и, значит, H — метациклическая группа. Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с системами дополняемых подгрупп. // Мат. сб.— 1954.— **35**, № 1.— С. 93—128.
2. *Горчаков Ю. М.* Примитивно факторизуемые группы // Уч. зап. Перм. ун-та.— 1960.— **17**, вып. 1.— С. 15—31.
3. *Зуб О. Н.* Группы, нециклические подгруппы которых дополняемы // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 134—158.
4. *Сысак Я. П.* Конечные элементарно факторизуемые группы // Укр. мат. журн.— 1977.— **29**, № 1.— С. 67—76.
5. *Барышовец П. П.* О конечных группах с дополняемыми неметациклическими подгруппами // Там же.— 1979.— **31**, № 1.— С. 6—12.
6. *Taunt D.* On A-groups // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1949.— **45**, N 1.— P. 24—42.
7. *Curzio M.* Classification of finite minimal non-metacyclic groups // Acta sci. math.— 1984.— **47**.— P. 289—295.
8. *Кузенный Н. Ф., Левищенко С. С.* Строение конечных минимальных недисперсивных групп // Группы и системы их подгрупп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983.— С. 56—66.
9. *Huppert B.* Endliche cruppen I.— Berlin etc. : Springer, 1967.— 793 S.
10. *Маланьина Г. А., Хлебутина В. И., Шевцов Г. С.* Конечные минимальные не вполне факторизуемые группы // Мат. заметки.— 1972.— **12**, № 2.— С. 157—162.

Киев. ин-т инженеров гражд. авиации

Получено 18.04.86