УДК 512.542

А. Н. Фомин

О классах конечных простых групп

В настоящей работе модифицируется понятие β-широкой подгруппы и на этой основе усиливается основной результат из [1]. Как обычно, под классом групп $\mathfrak{M}$ понимается множество $\mathfrak{M}$ групп, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, т. е. если $A \cong B$ и $B \in \mathfrak{M}$, то $A \in \mathfrak{M}$. Через $\mathfrak{A}$ обозначается класс всех знакопеременных простых неабелевых групп конечной степени, $\mathfrak{M}_2$ — класс всех конечных простых неабелевых групп, каждая из которых обладает 2-транзитивным подстановочным представлением на множестве всех правых смежных классов по некоторой собственной подгруппе наименьшего индекса. Ясно, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_2$, N — множество всех натуральных чисел, T — подмножество всех чисел из N, каждое из которых есть степень простого числа. Запись $X \to Y$ означает, что X есть секция группы Y, т. е. $X \cong A/B$ для некоторых подгрупп A, B группы Y с условием $B \leqslant A$, $B \lhd A$. Пусть G — конечная группа. Тогда $\beta(G)$ обозначает β-степень группы G, т. е. $\beta(G)$ есть наименьшее среди натуральных чисел n, для которых существует такое q из T, что $G \to L_n(q)$. Подгруппа A конечной группы B называется β^*-широкой, если A не лежит в $\mathfrak{A}$ и A — β-широкая подгруппа группы B, т. е. A — простая неабелева группа, $A \neq B$, $\beta(A) = \beta(B)$, и если X — простая неабелева группа и $A \leqslant X \leqslant B$, то либо $X = A$, либо $X = B$. Наконец, класс конечных групп $\mathfrak{M}$ называется β^*-замкнутым, если для каждой группы G из $\mathfrak{M}$ классу $\mathfrak{M}$ принадлежит и любая простая неабелева подгруппа X группы G, удовлетворяющая следующим условиям: 1) X не лежит в $\mathfrak{A}$; 2) $M \equiv N_G(X)$ — максимальная подгруппа группы G; 3) $C_G(X) = 1$; 4) M — единственная максимальная подгруппа группы G, содержащая X; 5) $\beta(X) = \beta(G)$.

Т е о р е м а. *Пусть $\mathfrak{M}_1$ — класс конечных простых неабелевых групп, содержащий каждую простую неабелеву группу из множества $\{L_n(q) \mid n \in N, q \in T\}$, не лежащую в $\mathfrak{A}$. Тогда, если $\mathfrak{M}_1$ β^*-замкнут, то объединение классов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ совпадает с классом всех конечных простых неабелевых групп.*

Для доказательства теоремы понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1. *Пусть A_n — знакопеременная группа конечной степени n. Тогда $\beta(A_5) = \beta(A_6) = 2$, $\beta(A_7) = 3$, $\beta(A_8) = 4$, $\beta(A_n) = n - 2$ при $n \geqslant 9$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 6 работы [1] и того, что при $n \geqslant 8$ порядок мультипликатора Шура группы A_n равен двум, при $n \geqslant 8$ имеем $\beta(A_n) = \min\{d(A_n), d(\hat{A}_n)\}$, где $d(G)$ — минимальная среди степеней точных матричных представлений группы G над конечными полями, $\hat{A}_n$ — накрывающая группы A_n. Из результатов работ [2—4] следует, что при $n \geqslant 9$ $d(A_n) = n - 2$ и при $n \geqslant 8$ $d(\hat{A}_n) \geqslant 2^{k_n}$, где $k_n = [(n - s - 1)/2]$ и s определяется из условий $n = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_s}$, $a_1 > \ldots > a_s$, a_i — неотрицательное целое число, $1 \leqslant i \leqslant s$. Нетрудно показать, что $d(\hat{A}_8) \geqslant 8$ и при $n \geqslant 9$, $n \neq 11$ справедливо неравенство $2^{k_n} \geqslant n - 2$; $2^{k_{11}} = 8$.

Далее, $A_5 \cong L_2(4)$, $A_6 \cong L_2(9)$, $A_8 \cong L_4(2)$. Поэтому $\beta(A_5) = \beta(A_6) = 2$. Так как $A_7 \to L_3(25)$, то согласно известной теоремы Диксона о подгруппах $L_2(q)$, $\beta(A_7) = 3$. Из [3] следует, что степень любого точного матричного представления A_8 над полем нечетной характеристики больше или равна 7. Нетрудно показать, что A_8 не является секцией группы $L_3(q)$, где q — степень числа 2. Следовательно, $\beta(A_8) = 4$.

Пусть теперь $X \leqslant \mathrm{GL}(8, q)$, $q \in T$ и $X \cong \hat{A}_{11}$. Тогда в X есть такой элемент x порядка 3, что $C_X(x)$ содержит подгруппу Y, изоморфную $\hat{A}_8$.

Так как $d(\hat{A}_8) \geqslant 8$, то Y — неприводимая группа матриц. Расширяя, если необходимо, основное поле F мощности q, можно считать, что либо q — степень числа 3, либо в F есть первообразный корень третьей степени из 1. Рассматривая теперь естественное действие GL $(8, q)$ на линейное пространство V размерности 8 над полем F, легко установить существование собственного нетривиального подпространства из V, допустимого относительно $C_X(x)$. Это противоречит неприводимости группы Y. Следовательно, $\beta(A_{11}) = 9$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть G — транзитивная простая неабелева группа подстановок конечного множества Ω и G не 2-транзитивна. Тогда $\beta(G) \leqslant \leqslant (n-1)/2$, где $n = |\Omega|$.*

Доказательство. По действию группы G на Ω естественным образом определяется ее матричное представление φ степени n над полем комплексных чисел C. Из условия леммы следует, что φ есть прямая сумма не менее трех неприводимых матричных представлений G над C, среди которых точно одно является одномерным. Значит, G обладает точным неприводимым матричным представлением ψ над C, степень которого не превышает $(n-1)/2$. Пусть p — любое простое число, не делящее $|G|$ нацело. Тогда редуцирование представления ψ по модулю p дает неприводимое точное представление группы G над некоторым конечным полем характеристики p. Поэтому $\beta(G) \leqslant (n-1)/2$. Лемма 2 доказана.

Предложение. *Пусть $\mathfrak{M}_1$ — класс конечных простых неабелевых групп, содержащий каждую простую неабелеву группу из множества $\{L_n(q) \mid n \in N, q \in T\}$, не лежащую в $\mathfrak{A}$, и пусть каждая β^*-широкая подгруппа любой группы из $\mathfrak{M}_1$ лежит в $\mathfrak{M}_1$. Тогда объединение классов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ есть класс всех конечных неабелевых групп.*

Доказательство. Предположим, что есть конечные простые неабелевы группы, не принадлежащие $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. Тогда существует такое натуральное число n, что в знакопеременной группе A_n степени n есть простая неабелева подгруппа X, не принадлежащая $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, а все простые неабелевы подгруппы из A_{n-1} принадлежат $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. В частности, X не изоморфна ни одной подгруппе из A_{n-1}. Отсюда следует, что n равно наименьшему среди индексов собственных подгрупп группы X. Пусть $Y \leqslant X$ и $|X:Y| = n$. Тогда подстановочное представление группы X на множестве всех ее правых смежных классов по подгруппе Y не является 2-транзитивным, так как X не принадлежит классу $\mathfrak{M}_2$. Теперь из лемм 1 и 2 следует $\beta(X) < \beta(A_n)$. Пусть $\beta(X) = m$. Тогда $X \to L_m(q)$ для некоторого q из T. В силу леммы 6 из [1] в $L_m(q)$ существует подгруппа B, изоморфная X.

Если $B \leqslant D \leqslant L_m(q)$, то D не лежит в $\mathfrak{A}$. Действительно, если $D \cong A_k$, где A_k — знакопеременная группа степени k, то в силу выбора X имеем $k \geqslant n$. Последнее невозможно, так как $\beta(A_n) > m$. Следовательно, $L_m(q) \in \mathfrak{M}_1$. Теперь среди простых неабелевых подгрупп группы $L_m(q)$, содержащих B и не принадлежащих $\mathfrak{M}_1$, выберем подгруппу A наибольшего порядка. Среди простых подгрупп группы $L_m(q)$, содержащих A и принадлежащих $\mathfrak{M}_1$, возьмем подгруппу G наименьшего порядка. Легко видеть, что A — β^*-широкая подгруппа группы G. Это невозможно, так как A не лежит в $\mathfrak{M}_1$. Предложение доказано.

Из этого утверждения и предложения 2 работы [1] непосредственно следует справедливость теоремы.

1. *Фомин А. Н.* О минимальной степени линейности конечных простых групп // Алгебра и логика.— 1986.— **25**, № 1.— С. 103—110.
2. *Wagner A.* The faithful linear representation of least degree of S_n and A_n over a field of characteristic 2 // Math. Z. — 1976.— **151**, N 2.— P. 127—137.
3. *Wagner A.* The faithful linear representation of least degree of S_n and A_n over a field of odd characteristic // Ibid.— 1977.— **154**, N 2.— P. 103—114.
4. *Wagner A.* An observation on the degrees of projective representations of the symmetric and alternating group over an arbitrary field // Arch. Math.— 1977.— **29**, N 6.— P. 583—589.

Ин-т математики и механики
УНЦ АН СССР, Свердловск

Получено 15.12.87