УДК 512.394

М. В. Радиолло, А. А. Шухат

Об одном способе построения асимптотических приближений корней степенно-показательных уравнений

Наиболее полное исследование асимптотики корней квазиполиномов без главного члена проведено в [1] на основе работ [2, 3]. Такие же главные (возрастающие с номером) члены асимптотики получены отличным от [1] методом в работах [4, 5]. В [1] предложена также итеративная схема, позволяющая для больших по модулю корней в случае квазиполиномов простой структуры строить асимптотические формулы в принципе с любым числом членов. Такие же формулы для корней некоторых квазиполиномов, встречающихся в теории упругости, получены в статье [6].

В настоящей работе предложен метод построения асимптотических приближений, обобщающий схему [1] на случай произвольных квазиполиномов. Кроме того, к проблеме отыскания корней квазиполиномов сведена аналогичная задача для степенно-показательных функций более общего вида, допускающих комплексные коэффициенты в экспонентах. Трансцендентные уравнения, содержащие такие функции, встречаются, например, при решении задач плоской теории упругости для кусочно-однородных анизотропных сред с различного рода тонкостенными включениями [7].

1. Рассмотрим уравнение

$$w(z) \equiv \sum_{m=N}^{M} w_m(z) = 0, \quad w_m(z) = e^{mz} P_m(z), \quad P_m(z) = \sum_{k=0}^{l_m} a_{mk} z^k. \tag{1}$$

Здесь M и N — целые числа, $M \neq N$; a_{mk} — комплексные коэффициенты, $a_{Ml_M} \neq 0$, $a_{Nl_N} \neq 0$.

Зафиксируем главную ветвь логарифмической функции и обозначим корень, лежащий в области значений n-й ветви логарифма, через z_n. Тогда его можно представить в виде

$$z_n = i2\pi n + \ln t_n. \tag{2}$$

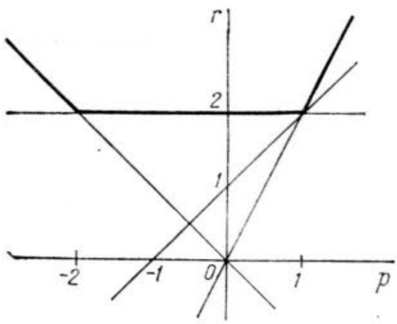
Предполагая, что $t_n \sim (2\pi n)^p x$ при $n \to \pm\infty$, где p — вещественная, а x — комплексная константы, первое приближение к корням z_n уравнения (1) будем строить в виде

$$z_n^{(1)} = i2\pi n + \ln [(2\pi n)^p x]. \tag{3}$$

Определим значения p и x, для которых числа, даваемые формулой (3), могут быть асимптотическими приближениями к корням уравнения (1). Рассматривая далее только те значения m, для которых $w_m(z) \not\equiv 0$, можем записать

$$w_m(z_n^{(1)}) \sim a_{ml_m} i^{l_m} x^m (2\pi n)^{mp+l_m} = O(n^{mp+l_m}).$$

Допустим, что при некотором фиксированном p $\max\limits_m (mp + l_m)$ достигается лишь при одном значении $m = \mu$. Тогда для достаточно больших n в окрестности $z_n^{(1)}$ слагаемое $w_\mu(z)$ будет превышать по модулю все остальные слагаемые в левой части (1), и корней в окрестности $z_n^{(1)}$ уравнение (1) иметь не будет. Следовательно, p должно принимать лишь такие значения p_s, $p_1 < p_2 < \ldots < p_S$, для каждого из которых $\max\limits_m (mp_s + l_m) = r_s$ достигается при нескольких (хотя бы двух) значениях $m = m_{sk}$, $m_{s1} < m_{s2} < \ldots < m_{sj_s}$, $j_s \geqslant 2$,



$$mp_s + l_m \begin{cases} = r_s, & m = m_{sk}, \\ < r_s, & m \neq m_{sk}, \end{cases} \quad k = \overline{1, j_s}. \tag{4}$$

При этом x выбирается таким, чтобы в выражении $w(z_n^{(1)})$ коэффициент при $(2\pi n)^{r_s}$ был равен нулю:

$$\sum_{m=m_{sk}} a_{ml_m} i^{l_m} x^m = 0, \quad k = \overline{1, j_s}. \tag{5}$$

Таким образом, для каждого p_s, определяемого условием (4), x может принимать значения x_{sq}, $q = \overline{1, Q}$, $Q \leqslant m_{sj_s} - m_{s1}$, являющиеся ненулевыми решениями уравнения (5). Следуя представлению (3), первые приближения к корням при этом примут вид

$$z_{n,s,q}^{(1)} = i2\pi n + \ln [(2\pi n)^{p_s} x_{sq}], \quad s = \overline{1, j_s}, \quad q = \overline{1, Q}. \tag{6}$$

Условие (4) допускает простую геометрическую интерпретацию. Проведем в плоскости переменных p и r прямые $r = mp + l_m$ для всех m из (1) и рассмотрим фигуру, получающуюся в результате пересечения полуплоскостей, ограниченных построенными прямыми и лежащими над ними. Это — выпуклая бесконечная многоугольная фигура, вершины которой имеют координаты (p_s, r_s), а угловые коэффициенты участков границы равны

$$m_{11} = N, \quad m_{sj_s} = m_{s+1,1}, \quad s = \overline{1, S-1}, \quad m_{Sj_S} = M. \tag{7}$$

Пример. На рисунке изображена геометрическая интерпретация условия (4) для уравнения $ae^{-z} + (bz^2 + cz + d) + (fz + g)e^{z} + he^{2z} = 0$. Бесконечный многоугольник, выделенный утолщенной линией, имеет вершины $(-2, 2)$, $(1, 2)$.

Подставляя в уравнение (5) значения $m_{11} = -1$, $m_{12} = 0$, соответствующие $p_1 = -2$, придем к уравнению $ax^{-1} - b = 0$. Следовательно, приближения к первой последовательности корней будут иметь вид $z_{n,1}^{(1)} = i2\pi n + \ln\left[(2\pi n)^{-2} \dfrac{a}{b}\right]$. Аналогично, для $p_2 = 1$ $(m_{21} = 0,\ m_{22} = 1,\ m_{23} = 2)$

получаем уравнение $-b+ifx+hx^2=0$, откуда находим еще две последовательности $z^{(1)}_{n,2,k}=i2\pi n+\ln(2\pi n x_{2,k})$, $k=1,2$, где $x_{2,k}=[-if+(-1)^k\times\times\sqrt{-f^2+4bh}]/(2h)$.

2. Перейдем к обоснованию изложенной схемы. Для упрощения записи индексы s и q, где это возможно, будем опускать.

Теорема 1. *Для больших n в окрестности $z_n^{(1)}$ находится столько корней уравнения* (1) (*с учетом их кратностей*), *какова кратность соответствующего корня x в уравнении* (5). *При этом выполнено асимптотическое соотношение*

$$|z_n^{(1)}-z_n|=o(1),\quad n\to\infty. \tag{8}$$

Пусть ρ — положительная константа, не очень большая — такая, чтобы окружность Γ радиуса ρ с центром $z_n^{(1)}$ охватывала лишь одно из чисел, задаваемых формулой (6). Тогда для $z\in\Gamma$ $(z=z_n^{(1)}+t,\ |t|=\rho)$ можно получить $w(z)=(2\pi n)^r E(t)+F_n(t)$, где $E(t)=\sum\limits_{m=m_{sk}} a_{ml_m} i^{l_m}(xe^t)^m$, $F_n(t)=o(n^r)$.

Отсюда, так как $E(t)\neq 0$ при $|t|=\rho>0$, следует, согласно теореме Руше [8], утверждение теоремы. Произвол выбора постоянной ρ доказывает соотношение (8).

Как видно из предыдущих рассуждений, каждому значению p_s, $s=\overline{1,S}$, соответствует столько корней уравнения (1), сколько ненулевых корней имеет алгебраическое уравнение (5), а именно $m_{sj_s}-m_{s1}$. Суммирование по s с учетом (7) доказывает следующее важное утверждение.

Следствие. *В области значений n-й ветви логарифма* (n — *большое*) *лежит $M-N$ корней уравнения* (1), *задаваемых приближениями* (6).

Покажем, что при больших n внутри этой полосы уравнение (1) не имеет других корней, кроме тех, приближения к которым получены.

Воспользуемся представлением (2). В нем фигурирует главная ветвь логарифма, а значит величина $\mathrm{Im}[\ln t_n]$ ограничена при $n\to\infty$. Кроме того, $\mathrm{Re}[\ln t_n]=o(n)$, ибо в противном случае при $n\to\infty$ одно из слагаемых $w_M(z_y)$ или $w_N(z_n)$ превышало бы по модулю все остальные слагаемые в левой части уравнения (1), и числа z_n не могли бы быть его корнями. Следовательно, существует последовательность $\gamma_n>0$ такая, что $\gamma_n=o(n)$, $|\ln t_n|<\gamma_n$.

В области комплексного переменного t зафиксируем n-ю ветвь логарифма, проведя разрез так, чтобы он не проходил через числа $t_n^{(1)}=(2\pi n)^p x$, где p и x определяются условиями (4), (5). Рассмотрим контур G_n, состоящий из разреза и двух окружностей радиусами e^{γ_n} и $e^{-\gamma_n}$. Пусть $t\in G_n$. Тогда, так как $\ln t=o(n)$,

$$w(i2\pi n+\ln t)\sim\sum_{m=N}^{M} t^m a_{ml_m}(i2\pi n)^{l_m},\quad n\to\infty.$$

Последняя сумма отлична от нуля всюду на контуре G_n (в силу выбора разреза). Следовательно, по теореме Руше внутри G_n уравнение (1) имеет столько же корней, столько алгебраическое уравнение

$$\sum_{m=N}^{M} t^m a_{ml_m}(i2\pi n)^{l_m}=0.$$

При этом принято, что все корни последнего уравнения попадают внутрь контура G_n. Тем самым показано, что внутри области значений n-й ветви логарифма (для большого n) уравнение (1) имеет ровно $M-N$ корней.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Изложенная в п. 1 схема дает приближения ко всем достаточно большим по модулю корням уравнения* (1).

Отметим, что, кроме найденных корней, уравнение (1) может иметь также конечное число корней, которые следует искать численно. Их количество может быть установлено, например, с помощью принципа аргумента [8].

3. Укажем способ построения последующих приближений, сходящихся к корням уравнения (1) при $n \to \infty$ быстрее, чем $z_n^{(1)}$. Второе приближение будем искать в виде $z_n^{(2)} = z_n^{(1)} + \tau$, $\tau = \tau(n) = o(1)$. Легко показать, что если x является корнем уравнения (5) кратности k, то $w(z_n^{(1)} + \tau)$ после разложения в ряды входящих в это выражение экспонент примет вид

$$w(z_n^{(1)} + \tau) = w'' + w', \quad w'' = o(w'), \quad n \to \infty,$$

$$w' = A_0 (2\pi n)^r \tau^k + A_1 (2\pi n)^{r_1} \tau^{k_1} + \ldots + A_{\nu-1} (2\pi n)^{r_{\nu-1}} \tau^{k_{\nu-1}} + A_\nu (2\pi n)^{r_\nu},$$

$$r > r_1 > r_2 > \ldots > r_\nu, \quad k > k_1 > k_2 > \ldots > k_\nu > 0, \tag{9}$$

$$A_i = A_i(n) = O((\ln n)^{\alpha_i}), \quad i = \overline{0, \nu}.$$

Неизвестное $\tau(n)$ выбирается так, чтобы оно было корнем уравнения

$$w' = 0 \tag{10}$$

либо приближением к нему, разыскиваемым в форме $\tau(n) = (2\pi n)^{p_1} x_1(n)$. Здесь p_1 и x_1 ищутся по изложенной выше схеме путем составления соотношений, аналогичных условиям (4), (5). При этом $x_1(n)$ может иметь логарифмический рост.

Нетрудно показать, что для построенного второго приближения выполняется асимптотическое соотношение $|z_n^{(2)} - z_n| = o(n^{p_1})$, причем, как видно из (9), p_1 может принимать лишь отрицательные значения.

Заметим, что уравнение (10) имеет при каждом n ровно k корней, и, следовательно, уточнены будут все k корней уравнения (1), приближение к которым давалось числом $z_n^{(1)}$.

Аналогично строятся третье и последующие приближения.

4. Предлагаемый метод допускает обобщение на уравнения вида (1) с нецелыми коэффициентами в показателях экспонент. Непосредственное применение к таким уравнениям схемы п. 1 приводит к достаточно сложной проблеме отыскания корней уравнения, аналогичного (5), но с нецелыми показателями. Однако часто, проводя в исходном уравнении линейную замену переменных, можно привести его к рассмотренному в п. 1 типу (например, это возможно при рациональных коэффициентах).

В случае произвольных вещественных коэффициентов, находя по схеме п. 1 значение p и соответствующие ему $m_1, m_2, \ldots, m_j$ и оставляя в исходном уравнении лишь члены, отвечающие за асимптотику корней при этом p, приходим к уравнению, которое делением на $e^{m_k z}$ и заменой

$$(m_i - m_k) z = \zeta, \quad 1 \leqslant i, \ k \leqslant j, \ i \neq k, \tag{11}$$

обычно может быть сведено к уравнению с рациональными коэффициентами в экспонентах.

Введем, как это делается для квазиполиномов [1, 3], понятие главного члена рассматриваемых уравнений, понимая под этим то слагаемое (если оно содержится в уравнении), в котором одновременно достигается максимум коэффициентов в показателях экспонент и максимум степеней полиномиальных множителей. Вторым главным членом будем называть слагаемое, в котором достигаются соответственно минимум и максимум. Указанная замена (11) будет неэффективна лишь при $p = 0$ в случае, если уравнение содержит главный или второй главный член и еще хотя бы два слагаемых с полиномами максимальной степени (в работе [1] условием для замены (11) ошибочно предполагалось только отсутствие главного члена). Во всех остальных случаях нетрудно заметить, что первая часть формулы (4) влечет за собой соотношение $\dfrac{m_i - m_k}{m_\nu - m_k} = \dfrac{l_{m_i} - l_{m_k}}{l_{m_\nu} - l_{m_k}}$, $1 \leqslant \nu \leqslant j$, $\nu \neq k$, правая, а значит и левая части которого — конечные ненулевые рациональные числа. Следовательно, замена (11) приводит к желаемому результату.

5. При соответствующей модификации изложенный метод позволяет исследовать также трансцендентные уравнения вида (1) с комплексными коэффициентами в экспонентах

$$w(z) \equiv \sum_{m=1}^{M} w_m(z) = 0, \; w_m(z) = e^{c_m z} P_m(z), \; c_m = \mu_m + i\nu_m. \tag{12}$$

Корни (12) представим в виде

$$z_n = \lambda (i2\pi n + v_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где λ — некоторое действительное число. Тогда

$$w_m(z_n) \sim a_{ml_m} e^{c_m \lambda (i2\pi n + v_n)} [\lambda (i2\pi n + v_n)]^{l_m}, \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Сравнивая асимптотическое поведение $w_m(z_n)$, заключаем, что $\lambda v_n \sim \varkappa 2\pi n$ ($n \to \infty$, $\varkappa$ — действительное), а числа λ и $\varkappa$ могут принимать только такие значения λ_σ, $\varkappa_\sigma$, $\sigma = \overline{1, \Sigma}$, для которых $\max_m \{\mathrm{Re}\,[c_m(\varkappa_\sigma + i\lambda_\sigma)]\} = \max_m (\mu_m \varkappa_\sigma - \nu_m \lambda_\sigma) = \rho_\sigma$ достигается при нескольких значениях $m_{\sigma k}$ ($1 \leqslant m_{\sigma k} \leqslant M$, $k = \overline{1, j_\sigma}$, $j_\sigma \geqslant 2$). То есть должно быть выполнено условие

$$\mu_m \varkappa_\sigma - \nu_m \lambda_\sigma \begin{cases} = \rho_\sigma, & m = m_{\sigma k}, \\ < \rho_\sigma, & m \neq m_{\sigma k}, \end{cases} \quad k = \overline{1, j_\sigma}. \tag{15}$$

Из (15) числа $\varkappa_\sigma$ и λ_σ определяются с точностью до произвольного положительного общего множителя, и $\dfrac{\varkappa_\sigma}{\lambda_\sigma} = \dfrac{\nu^{(1)} - \nu^{(2)}}{\mu^{(1)} - \mu^{(2)}}$ для любых $c^{(l)} = \mu^{(l)} + i\nu^{(l)} \in \{c_{m_{\sigma k}}, \; k = \overline{1, j_\sigma}\}$, $l = 1, 2$, $c^{(1)} \neq c^{(2)}$. Если при этом $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$, то следует положить $\lambda_\sigma = 0$, а $\varkappa_\sigma$ — произвольным.

Как следует из (13) — (15), соответствующая конкретному σ последовательность корней уравнения (12) $z_{n,\sigma} = (\lambda_\sigma - i\varkappa_\sigma)(i2\pi n + \ln \tau_n)$, $\ln \tau_n = o(n)$, $n \to +\infty$, может быть приближена при больших n корнями уравнения $\sum\limits_{m = m_{\sigma k}} e^{c_m z} P_m(z) = 0$, $k = 1, j_\sigma$.

Нетрудно заметить, что последнее заменой $z = \zeta/(c^{(1)} - c^{(2)})$ приводится к уравнению с действительными коэффициентами при ζ в экспонентах (такой замене соответствуют

$$\varkappa_\sigma = \pm (\nu^{(1)} - \nu^{(2)})/|c^{(1)} - c^{(2)}|^2, \quad \lambda_\sigma = \pm (\mu^{(1)} - \mu^{(2)})/|c^{(1)} - c^{(2)}|^2,$$

где знак выбирается таким, чтобы выполнялось неравенство в (15)). Применяя изложенную ранее схему к полученному уравнению, находим асимптотику его корней $\zeta_k^{(1)} = i2\pi k + \ln [(2\pi k)^{\nu} x]$, $k \to \pm\infty$. Тогда асимптотические приближения к соответствующей последовательности корней уравнения (12) будут иметь вид $z_{n,\sigma}^{(1)} = (c^{(1)} - c^{(2)})^{-1} \zeta_{\pm n}^{(1)}$, $n \to +\infty$. Здесь знак совпадает с $\mathrm{sign}\,[(\lambda_\sigma - i\varkappa_\sigma)(c^{(1)} - c^{(2)})]$.

6. Приведем результаты численного анализа эффективности метода на примере трансцендентного уравнения

$$w(z) \equiv 2\,[B \,\mathrm{ch}\,(\alpha_2 + \alpha_1) z + (Cz^2 + D)\,\mathrm{ch}\,\alpha_2 z + (Ez^2 + F)\,\mathrm{ch}\,\alpha_1 z + \\ + G\,\mathrm{ch}\,(\alpha_2 - \alpha_1) z] + Hz^4 + Iz^2 + J = 0. \tag{16}$$

Последнее возникает при решении первой основной задачи плоской теории упругости для двухсоставного клина с упругими постоянными E_1, ν_1,

Таблица 1

n	$z_{n,1}^{(1)}$	$z_{n,1}^{(2)}$	$z_{n,1}^{(3)}$	z_n
1	$2,52+i8$	$2,52+i7,20$	$3,888+i7,20$	$4,184+i7,60$
2	4,29 16	4,29 15,32	2,705 15,32	4,723 14,09
3	5,33 24	5,33 23,43	4,830 23,43	4,783 23,24
4	6,06 32	6,06 31,52	5,673 31,52	5,548 31,43
5	6,63 40	6,63 39,58	6,383 39,58	6,397 39,45
10	8,39 80	8,39 79,73	8,335 79,73	8,337 79,72

Таблица 2

n	$z_{n,2}^{(1)}$	$z_{n,2}^{(2)}$	$z_{n,2}^{(3)}$	z_n
1	$8,9+i36$	$12,70+i33,17$	$11,13+i33,37$	$11,75+i33,33$
2	14,2 60	16,08 57,74	15,76 58,00	15,85 57,94
3	17,3 84	18,54 82,17	18,43 82,34	18,46 82,31
4	19,5 108	20,42 106,45	20,38 106,57	20,39 106,55
5	21,2 132	21,94 130,65	21,92 130,74	21,92 130,73
10	26,5 252	26,85 251,16	26,86 251,19	26,86 251,19

$0 < \varphi < \alpha_1$, E_2, ν_2, $-\alpha_2 < \varphi < 0$, которые определяют коэффициенты в (16). Из структуры уравнения (16) видно, что его корни расположены в комплексной плоскости симметрично относительно обеих координатных осей. Ввиду этого достаточно ограничиться отысканием корней, лежащих в первом квадранте. Полагая для определенности $\alpha_2 > 2\alpha_1$ и выполняя замены $\alpha_k z = \zeta$, $k = 1, 2$ (см. § 4), получаем последовательные приближения корней

$$
\begin{aligned}
& z_{n,1}^{(1)} = \frac{1}{\alpha_2}(i2\pi n + \ln u_{n,1}), \quad u_{n,1} = \left(\frac{2\pi n}{\alpha_2}\right)^2 \frac{H}{C}, \\
& z_{n,1}^{(2)} = z_{n,1}^{(1)} - \frac{i}{\alpha_2 \pi n} \ln u_{n,1}, \\
& z_{n,1}^{(3)} = z_{n,1}^{(2)} + \frac{1}{(2\pi n)^2}\left[\frac{\ln^2 u_{n,1} - 4\ln u_{n,1}}{\alpha_2} + \left(\frac{D}{C} - \frac{I}{H}\right)\alpha_2\right], \\
& z_{n,2}^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1}(i2\pi n + \ln u_{n,2}), \quad u_{n,2} = \left(\frac{2\pi n}{\alpha_1}\right)^2 \frac{C}{B}, \\
& z_{n,2}^{(2)} = z_{n,2}^{(1)} - \frac{i}{\alpha_1 \pi n} \ln u_{n,2}, \\
& z_{n,2}^{(3)} = z_{n,2}^{(2)} + \frac{1}{(2\pi n)^2}\left[\frac{\ln^2 u_{n,2} - 4\ln u_{n,2}}{\alpha_1} - \alpha_1 \frac{D}{C}\right].
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Приближения (17) и точные значения корней, вычисленные по ним методом Мюллера [9] при $\alpha_1 = \pi/12$, $\alpha_2 = \pi/4$, $\nu_1 = 0,25$, $\nu_2 = 0,30$, $E_1 = 2E_2$ приведены в табл. 1 и 2. Отметим, что численная реализация принципа аргумента позволила локализовать четыре корня уравнения (17), не охваченные асимптотическими формулами (17): $\pm 2,300167\, i$ и $\pm 17,88704\, i$.

1. *Дыхнов А. Е.* Контактная задача для упругих клиньев при наличии трения вдоль примыкающего к общей вершине участка граней // Докл. АН УССР.— 1979.— **249**, № 4.— С. 804—808.
2. *Мейман Н. Н., Чеботарев Н. Г.* Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1949.— **26**.— 332 с.

3. *Понтрягин Л. С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1942.— **6**.— С. 115—134.
4. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М. : Мир, 1967.— 548 с.
5. *Langer R. E.* On the geros of exponential sums and integrals // Bull. Amer. Math. Soc.— 1931.— **37**.— P. 213—239.
6. *Златин А. Н.* О корнях некоторых трансцендентных уравнений, встречающихся в теории упругости // Прикл. механика.— 1980.— **16**, № 12.— С. 69—74.
7. *Кривой А. Ф.* Плоские краевые задачи для дифференциальных уравнений анизотропной упругости при наличии дефектов и неоднородностей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1985.— 16 с.
8. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ.— М. : Наука, 1985.— Ч. 1.— 336 с.

Одес. ун-т

Получено 11.07.86