УДК 517.9

Л. Е. Файбусович

QR-алгоритм и обобщенные потоки Тода

1. Установленная в [1] связь между обобщенными потоками Тода и QR-алгоритмом инициировала ряд публикаций [2—5]. С одной стороны, можно надеяться, что использование численных методов интегрирования динамических систем может дать эффективное средство для численного нахождения спектра различных классов матриц (и операторов). С другой стороны, теоретико-групповая природа обобщенных потоков Тода делает содержательным вопрос об абстрактном описании алгоритмов типа QR. В настоящей работе детально изучается асимптотическое поведение одного класса обобщенных потоков Тода Предлагается вариант теоретико-групповой схемы для описания QR-алгоритмов.

Пусть G — группа Ли, G — ее подгруппа Ли. Рассмотрим следующую задачу [5]. Для данного $g \in G$ найти $q \in G$ такое, что

$$q \cdot g \cdot q^{-1} \in G_-. \tag{1}$$

Пусть $P_i : G \to G$, $i = 0, 1, \ldots,$ — функции, определенные по крайней мере на классе сопряженных элементов $C(g) \overset{\Delta}{=} \{\bar{g} g \bar{g}^{-1} : \bar{g} \in G\}$ такие, что

$$P_i(\bar{g} g \bar{g}^{-1}) = \bar{g} P_i(g) \bar{g}^{-1} \quad \forall \bar{g} \in G. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение функции $\xi_i : C(g) \to G$ («обобщенные степенные итерации»)

$$\xi_i(\bar{g}) = P_i(\bar{g}) P_{i-1}(\bar{g}) \ldots P_0(\bar{g}), \quad \bar{g} \in C(g), \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Один из подходов к задаче (1) состоит в рассмотрении асимптотического поведения последовательности $\xi_i(g) \cdot G_-$ на однородном пространстве G/G_-.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть G_- — замкнутая подгруппа в G и существует предел в G/G_- $\lim \xi_i(g) \cdot G_- = q \cdot G_-$, $i \to +\infty$. Пусть еще $\lim \xi_i(g) \cdot g G_- = q \cdot G_-$, $i \to +\infty$. Тогда $q^{-1} g q \in G_-$.*

Пусть G_+ — другая замкнутая подгруппа в G такая, что выполняется условие.

С1. Существуют окрестность U единичного элемента e в G и гладкие функции $\rho_\pm : U \to G_\pm$ такие, что

$$g = \rho_+(g)\,\rho_-(g) \ \ \forall g \in U, \ \rho_\pm(e) = e. \tag{3}$$

Отображение $A: U/G_- \to \rho_+(U)/G_+ \cap G_-$, $A(g\cdot G_-) = \rho_+(g)\cdot(G_+ \cap G_-)$, $g \in U$, является теоретико-множественным изоморфизмом и непрерывным отображением (при условии, что G/G_- и $G_+/G_+ \cap G_-$ наделены фактор-топологиями, а $U/G_- \subset G/G_-$, $\rho_+(U)/G_+ \cap G_- \subset G_+/G_+ \cap G_-$ — индуцированными топологиями).

Предложение 2. *В предположениях предложения* 1 *существует последовательность* $h_i \in G_+ \cap G_-$, $i = 0, 1, \ldots$, *такая, что* $\lim (h_i^{-1} (h_i^{-1} \times \times [\rho_+(\xi_i(g))]^{-1} g\, [\rho_+(\xi_i(g))] \cdot h_i) = \rho_+(q)^{-1} g \rho_+(q) \in G_-$, $i \to +\infty$, *при условии* $\xi_i(g) \in U \ \forall i$, $q \in U$.

Доказательство. По предложению 1 имеем $\lim \xi_i(g)\cdot G_- = q\cdot G_-$, $i \to +\infty$, $q^{-1} g q \in G_-$. Используя непрерывность A, получаем $\lim [\rho_+ \times \times (\xi_i(g))\cdot(G_+ \cap G_-)] = \rho_+(q)\cdot(G_+ \cap G_-)$, $i \to +\infty$. Следовательно (по свойству фактор-топологии) существует последовательность $h_i \in G_+ \cap G_-$, $i = 0, 1, \ldots$, такая, что $\lim \rho_+(\xi_i(g))\cdot h_i = \rho_+(q)$, $i \to +\infty$.

Пусть $g \in G$ таково, что $P_0(g) \in U$ (см. (2) и условие С1). Пусть, далее, $P_0(g) = g_0^+ g_0^-$, где $g_0^\pm = \rho_\pm(P_0(g))$ (см. (3)). Положим $g_0 = g$, $g_1 = (g_0^+)^{-1} g_0 g_0^+$. Если уже построена последовательность $g_0, g_1, \ldots, g_k$ и $P_k(g_k) \in U$, то полагаем

$$P_k(g_k) = g_k^+ g_k^-, \ g_k^\pm = \rho_\pm(P_k(g_k)), \tag{4}$$

$$g_{k+1} = (g_k^+)^{-1} g_k g_k^+ = g_k^- g_k (g_k^-)^{-1}. \tag{5}$$

Пусть еще

$$Q_i = g_0^+ g_1^+ \ldots g_i^+, \ R_i = g_i^- g_{i-1}^- \ldots g_0^-, \ i = 0, 1, \ldots . \tag{6}$$

Стандартными вычислениями [5] получаем следующее предложение.

Предложение 3. *Для последовательности* g_i, *определенной в* (4), (5), *имеет место*

$$g_{i+1} = Q_i^{-1} g_0 Q_i = R_i g_0 R_i^{-1}, \ i = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Из (7) получаем для некоторых $\tilde h_i \in G_+ \cap G_-$

$$\rho_+(\xi_i(g)) = Q_i \tilde h_i, \ i = 0, 1, \ldots . \tag{8}$$

Отсюда и из предложения 2 выводим такое следствие.

Следствие 1. *В предположениях предложения* 1 *существует последовательность* $\bar h_i \in G_+ \cap G_-$, $i = 0, 1, \ldots$, *такая, что*

$$\lim (\bar h_i^{-1} Q_i^{-1} g_0 Q_i \bar h_i) = \rho_+(q)^{-1} g_0 \rho_+(q) \in G_-, \ i \to +\infty. \tag{9}$$

Сравнение (7) и (9) показывает, что изучение асимптотического поведения последовательности g_i приводит в определенных условиях к решению задачи (1). Последовательность g_i рекуррентно строится по схеме (4), (5), которая является теоретико-групповым обобщением обычного QR-алгоритма.

2. Для того чтобы выполнялось уточненное условие (8)

$$\rho_+(\xi_i(g)) = Q_i, \ i = 0, 1, \ldots , \tag{10}$$

достаточно в силу (6), (7) потребовать выполнения следующего свойства факторизации $\rho_\pm : U \to G$.

С2. Для любых $g, h \in U$ таких, что

$$g*h \stackrel{\Delta}{=} \rho_+(g)\, h \rho_-(g) \in U, \tag{11}$$

имеет место равенство

$$\rho_+(g*h) = \rho_+(g)\, \rho_+(h). \tag{12}$$

При выполнении (12) с обобщенным QR-алгоритмом можно связать класс динамических систем (обобщенные потоки Тода). Можно показать, что (12) выполняется в точности для факторизаций, связанных с решениями модифицированного уравнения Янга — Бакстера, введенного в [6]. Ограничимся здесь рассмотрением следующей частной ситуации.

Пусть L и L_+ — алгебры Ли групп G и G_+ соответственно и

$$L = L_+ \oplus L_- \tag{13}$$

— прямая сумма векторных подпространств, причем L_- — алгебра Ли некоторой связной подгруппы $\tilde{G}_- \subset G_-$. Тогда существует, очевидно, факторизация $\rho_\pm : U \to G_\pm$, удовлетворяющая условиям С1, С2 и такая, что $\rho_-(U) \subset \tilde{G}_-$. Пусть, далее, $\psi : L \times \mathbb{R} \to L$ — гладкая функция такая, что

$$[\psi(x, t_1), \psi(x, t_2)] = 0 \ \forall x \in L,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

$$\psi(\mathrm{Ad}(g)\cdot x, t) = \mathrm{Ad}(g)\cdot\psi(x, t) \ \forall g \in G,\ x \in L,\ t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $[,]$ — коммутатор алгебры Ли L, $\mathrm{Ad}(g)$ — присоединенное представление $g \in G$ в L. Введем в рассмотрение нестационарную динамическую систему (обобщенный поток Тода) на L

$$\dot{x} = [x, \pi_+(\psi(x, t))], \tag{14}$$

где $\pi_+ : L \to L_+$ — проекция L на L_+ параллельно L_-. Пусть, наконец для $x_0 \in L$

$$\exp\Big(\int_0^t \psi(x_0, \tau)\, d\tau\Big) = \eta_+(t)\, \eta_-(t), \tag{15}$$

где $\eta_\pm(t) = \rho_\pm\Big(\exp\Big(\int_0^t \psi(x_0, \tau)\, d\tau\Big)\Big)$ — факторизация, ассоциированная с разложением (13) и определенная по крайней мере на $[0, t^*[$ для некоторого $t^* > 0$. Стандартным образом доказывается [6].

П р е д л о ж е н и е 4. *Решение $x(t)$ динамической системы* (14) *с начальным условием $x(0) = x_0$ определено по крайней мере на $[0, t^*[$ и имеет вид*

$$x(t) = \mathrm{Ad}(\eta_+(t)^{-1})\, x_0 = \mathrm{Ad}(\eta_-(t))\, x_0. \tag{16}$$

З а м е ч а н и е. Функции ψ, фигурирующие в динамической системе (14), получаются обычно как градиенты инвариантов присоединенного представления.

Рассмотрим теперь QR-алгоритм, ассоциированный с динамической системой (14). Положим

$$g_0 = \exp(x_0),\ P_i(g_0) = \exp\Big(\int_i^{i+1} \psi(x_0, \tau)\, d\tau\Big),\ i = 0, 1, \ldots \tag{17}$$

Если $x_0 \in L$ таково, что $g \exp(x_0)\, g^{-1} = \exp(x_0)$ влечет $x_0 = \mathrm{Ad}(g)\, x_0$ для любого $g \in G$, то (17) позволяют корректно определить функции P_i, $i = 0, 1, \ldots$, на классе $C(g_0)$ сопряженных элементов очевидной формулой $P_i(g g_0 g^{-1}) = g P_i(g_0)\, g^{-1}$ $\forall g \in G$. Итерации ассоциированного QR-алгоритма строятся теперь по схеме (4), (5).

Теорема 1. *Пусть решение динамической системы* (15) *с начальным условием* $x(0) = x_0$ *определено на* $[0, k]$, *где* k — *целое число. Тогда определены итерации ассоциированного QR-алгоритма* g_i, $0 \leqslant i \leqslant k$, *причем*

$$g_i = \exp(x(i)), \ 0 \leqslant i \leqslant k. \tag{18}$$

Доказательство. В силу (17) соотношение (18) имеет место для $i = 0$. Пусть уже показано, что g_i определены в силу (4), (5) для $0 \leqslant i \leqslant s$ и справедливо (18), причем $s < k$. Если g_{s+1} определено, то ввиду (8) должно быть $g_{s+1} = Q_s^{-1} g_0 Q_s$, где согласно (10) $Q_s = \rho_+(\xi_s(g_0)) = \rho_+(P_s(g_0) P_{s-1}(g_0) \dots P_0(g_0)) = \rho_+\left(\exp\left(\int\limits_0^{s+1} \psi(x_0, \tau)\, d\tau\right)\right)$ ввиду (17). Но тогда $Q_s = \eta_+(s+1)$ в силу (15) и, используя (16), получаем $g_{s+1} = [\eta_+(s+1)]^{-1} \exp(x_0)\, \eta_+(s+1) = \exp(\mathrm{Ad}(\eta_+(s+1))^{-1} x_0) = \exp(x(s+1))$. Далее с учетом (17), (18) и (15) имеем

$$P_s(g_s) = P_s(\exp(x(s))) = \eta_+(s)^{-1} \exp\left(\int\limits_s^{s+1} \psi(x_0, \tau)\, d\tau\right) \eta_+(s) =$$

$$= \eta_+(s)^{-1} \exp\left(\int\limits_0^{s+1} \psi(x_0, \tau)\, d\tau\right) \exp\left(-\int\limits_0^{s} \psi(x_0, \tau)\, d\tau\right) \eta_+(s) =$$

$$= [\eta_+(s)^{-1} \eta_+(s+1)]\, [\eta_-(s+1)\, \eta_-(s)^{-1}].$$

Таким образом, $P_s(g_s)$ допускает факторизацию и в силу (5) g_{s+1} существует.

Замечание. Для факторизации, связанной с произвольным решением уравнения Янга — Бакстера, определяются аналоги систем (14), ассоциированные с ними QR-алгоритмы (17), (4), (5) и справедлив аналог теоремы 1. Условие (12) по существу выделяет этот класс факторизаций.

3. Рассмотрим ситуацию, отвечающую классическому QR-алгоритму: с помощью унитарного преобразования привести произвольную комплексную матрицу к верхнетреугольному виду. Пусть $G = GL(n, \mathbb{C})$, G_- — группа обратимых верхнетреугольных матриц, $\tilde{G}_-$ — ее подгруппа с положительными элементами на главной диагонали, $G_+ = U(n, \mathbb{C})$ — группа унитарных матриц. Известно [7], что $GL(n, \mathbb{C}) = G_+ \cdot \tilde{G}_-$, $G_+ \cap \tilde{G}_- = \{e\}$. На уровне алгебр Ли имеем соответственно $L = L_+ \oplus L_-$, где L_+ — множество косоэрмитовых матриц, а L_- — множество верхнетреугольных матриц с вещественными элементами на главной диагонали. Пусть $\psi : L \to L$ — какая-либо матричная функция такая, что $\psi(g \times x \cdot g^{-1}) = g \psi(x) g^{-1}$, $g \in GL(n, \mathbb{C})$, $x \in L$. Нас интересует асимптотическое поведение решений (14) в рассматриваемой ситуации. Ввиду предложения 2 и теоремы 1 ключевым здесь будет асимптотическое поведение действия однопараметрической группы $\exp(t\psi(x_0))$, $t \in \mathbb{R}$, на однородном пространстве $G/\tilde{G}_-$, которое, очевидно, совпадает с многообразием полных флагов в $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$, $E(\gamma)$ — прямая сумма корневых подпространств матрицы $\psi(x_0)$, соответствующих собственным числам λ с $\mathrm{Re}\,\lambda = \gamma$. Пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_m$ таковы, что $E(\gamma_i) \neq 0$ и $\mathbb{C}^n = \Sigma\{E(\gamma_i) : i \in [1, m]\}$. Положим $M_i = \Sigma\{E(\gamma_j) : j \in [1, i]\}$, $N_i = \Sigma\{E(\gamma_j) : j \in [m+1-i, m]\}$, $i \in [1, m]$. Пусть, далее $\zeta_i : \mathbb{C}^n \to E(\gamma_i)$ — проекция на $E(\gamma_i)$ параллельно $\Sigma\{E\gamma_j) : j \neq i\}$. Для подпространства $V \subset \mathbb{C}^n$ положим $\Pi_+(V) = \Sigma\{\zeta_i(V \cap M_i) : i \in [1, m]\}$, $\Pi_-(V) = \Sigma\{\zeta_{m+1-i}(V \cap N_i) : i \in [1, m]\}$. На множестве векторных подпространств Gr в $\mathbb{C}^n$ введем метрику $\rho : \rho(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = \| p(\mathbb{W}) - p(\mathbb{W}') \|_e$, $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathrm{Gr}$, где $p(\mathbb{W})$ — ортогональный проектор на $\mathbb{W}$, а $\| \ \|_e$ — норма, индуцированная стандартным эрмитовым скалярным произведением на $\mathbb{C}^n$.

Предложение 5. *Для* $V \in \mathrm{Gr}$ *имеем* $\dim V = \dim \Pi_\pm(V)$, $\Pi_\pm(V) = \Sigma\{\Pi_\pm(V) \cap E(\gamma_i) : i \in [1, m]\}$. *Для любой диагонализируемой матрицы*

$x \in L$ *справедливо*

$$\lim \rho(e^{tx} \cdot V, e^{tx}\Pi_{\pm}(V)) = 0, \; t \to \pm\infty. \qquad (19)$$

Предложение 5 доказано в [8]. Перейдем к описанию асимптотического поведения (14). Пусть e_i, $i \in [1, n]$,— канонический базис в $\mathbb{C}^n$, V_i — векторное подпространство в $\mathbb{C}^n$, натянутое на векторы e_j, $j \in [1, i]$. Полагая $\Pi_{\pm}(V_i) = V_i^{\pm}$, определим $Q_{\pm}$ как унитарные операторы, переводящие полный флаг $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n$ в полные флаги $V_1^{\pm} \subset V_2^{\pm} \subset \ldots \subset V_n^{\pm}$ соответственно. ($Q_{\pm}$ определены однозначно с точностью до умножения справа на унитарную диагональную матрицу.) Пусть, наконец,

$$x_{\pm} = Q_{\pm}^* x_0 Q_{\pm} = \| x_{ij}^{\pm} \|. \qquad (20)$$

Теорема 2. *Если $\psi(x_0)$ — диагонализируемая матрица и*

$$\exp(\psi(x_{\pm})\,t) = U_{\pm}(t)\,R_{\pm}(t), \; \exp(\psi(x_0)\,t) = Q(t)\,R(t), \qquad (21)$$

$t \in \mathbb{R}$, — *соответствующие QR-разложения (т. е. $U_{\pm}(t)$, $Q(t) \in G_+$, $R_{\pm}(t)$, $R(t) \in \tilde{G}_-$), то унитарные матрицы $\| t_{ij}^{\pm}(t) \| = T_{\pm}(t) \overset{\Delta}{=} U_{\pm}^*(t)\,Q_{\pm}^* Q(t)$ таковы, что $t_{ij}^{+}(t) \to 0$, $t \to +\infty$, $t_{ij}^{-}(t) \to 0$, $t \to -\infty$, $i \neq j$. Для решения задачи (14) с начальным условием $x(0) = x_0$ имеют место представления*

$$x(t) = T_{\pm}(t)^* U_{\pm}^*(t)\, x_{\pm}\, U_{\pm}(t)\, T_{\pm}(t). \qquad (22)$$

Доказательство. Без потери общности рассмотрим только случай $t \to +\infty$. В силу предложения 5 $\lim\limits_{t \to +\infty} \Delta_i(t) = 0$, $\Delta_i(t) \overset{\Delta}{=} \rho(\exp(\psi(x_0)t)\,V_i$, $\exp(\psi(x_0)\,t)\,V_i^{+})$, $i \in [1, n]$. Но из (21) с учетом $V_i^{+} = Q_+ V_i$, $R(t)\,V_i = V_i$ и очевидного свойства $\rho(QW, QW') = \rho(W, W')$ $\forall Q \in U(n, \mathbb{C})$, $W, W' \in \mathrm{Gr}$, получаем $\Delta_i(t) = \rho(V_i, Q^*(t)\,Q_+ \exp(Q_+^* \psi(x_0)\,Q_+ t)\,V_i) = \rho(V_i, T_+(t)\,U_+^*(t) \exp(\psi(x_{\pm})\,t)\,V_i)$. Отсюда, учитывая (21) и очевидное равенство, $R_+(t)\,V_i = V_i$, получаем, наконец, $\Delta_i(t) = \rho(V_i, T_+(t)\,V_i) \to 0$, $t \to +\infty$, $i \in [1, n]$.

Но тогда с учетом унитарности $T_+(t)$ имеем $t_{ij}^{+}(t) \to 0$, $t \to +\infty$, $i \neq j$. Представление (22) есть в точности (16) для данной ситуации.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 2 V_i^{+} (соответственно V_i^{-}) для $i \in [1, n-1]$ является $\psi(x_0)$-инвариантным подпространством. Тогда, если $x(t)$, $x(0) = x_0$ — решение (14), то $\lim |x_{ij}(t)| = |x_{ij}^{+}|$, $t \to +\infty$ (соответственно $\lim |x_{ij}(t)| = |x_{ij}^{-}|$, $t \to -\infty$), $i \neq j$, а $\lim x_{ii}(t) = x_{ii}^{+}$, $t \to +\infty$ (соответственно $\lim x_{ii}(t) = x_{ii}^{-}$, $t \to -\infty$), $i \in [1, n]$. Если к тому же V_i^{+} (соответственно V_i^{-}), $i \in [1, n-1]$ — x_0-инвариантно, то матрица x_+ (соответственно x_-) верхнетреугольна. Оба эти условия выполнены в следующих двух случаях:* а) *все собственные числа матрицы $\psi(x_0)$ имеют попарно различные вещественные части*; б) *матрица $\psi(x_0)$ имеет только вещественные собственные числа и всякое $\psi(x_0)$-инвариантное подпространство x_0-инвариантно.*

Доказательство. Пусть $\psi(x_0)\,V_i^{+} \subset V_i^{+}$, $i \in [1, n-1]$. Так как $Q_+ \cdot V_i = V_i^{+}$, $i \in [1, n-1]$, то в силу (20) $\psi(x_+) = Q_+^* \psi(x_0)\,Q_+$ и значит $\psi(x_+) \cdot V_i \subset V_i$, $i \in [1, n-1]$, т. е. $\psi(x_+)$ верхнетреугольна. Но тогда (см. (21)), $U_+(t)$ — унитарна и диагональна. Тогда для $\tilde{T}(t) \overset{\Delta}{=} U_+(t)\,T_+(t)$ в силу теоремы 2 имеем $\tilde{t}_{ij}(t) \to 0$, $t \to +\infty$, $i \neq j$, $|\tilde{t}_{ii}(t)| \to 1$, $t \to +\infty$, $i \in [1, n]$. Первое утверждение следует теперь из (22). Если $x_0 V_i^{+} \subset V_i^{+}$, $i \in [1, n-1]$, то $x_+ \cdot V_i < V_i$ для $i \in [1, n-1]$ и x_+ верхнетреугольна. Ввиду предложения 5 подпространство V_i^{+} — x_0-инвариантно, если и только если для каждого этим свойством обладает $V_i^{+} \cap E(\gamma_j)$. Но в случае а) $\dim E(\gamma_j) = 1$, $j \in [1, m]$ и либо $V_i^{+} \cap E(\gamma_i) = 0$ либо $V_i^{+} \cap E(\gamma_j) = E(\gamma_j)$; в случае б) $\psi(x_0)\,|\,E(\gamma_j)$ — скалярный оператор и значит любое подпространство в $E(\gamma_j)$ — $\psi(x_0)$-инвариантно.

Следствие 3. *Если* $\dim E(\gamma_i)=1$ *для всех* i *и матрица* x_0 *нормальна, то матрицы* $x_\pm$ *диагональны и* $\lim x(t)=x_\pm$ *при* $t\to\pm\infty$.

Доказательство. Ввиду следствия 2 п. а) матрицы $x_\pm$ верхнетреугольны и одновременно нормальны. Отсюда следует диагональность $x_\pm$. Остается сослаться на следствие 2.

Теорема 3. *Пусть* $E_1=\Sigma\{E(\gamma_i): i\in[p+1,n]\}$, $E_2=\Sigma\{E(\gamma_i): i\in\in[1,p]\}$, $\dim E_1=r$. *Пусть, далее,* $V_r\cap E_2=0$. *Если* $x(t)=\|x_{ij}(t)\|$ — *решение* (14) *с начальным условием* $x(0)=x_0$, *то* $\lim x_{ij}(t)=0$, $t\to+\infty$, $i\in[r+1,n]$, $j\in[1,r]$.

Доказательство. Имеем $\lim\exp(\psi(x_0)t)\cdot V_r=E_1$ в топологии грассманиана Gr (см., например, [9]). Но тогда в силу (21) $\lim Q(t)\cdot V_r==E_1$, $t\to+\infty$. Пусть $\det x_0\neq 0$. При $t\to+\infty$ $\lim\rho(Q^*(t)x_0Q(t)\cdot V_r, V_r)=\lim\rho(x_0Q(t)\cdot V_r, Q(t)\cdot V_r)=\rho(x_0\lim Q(t)\cdot V_r, \lim Q(t)\cdot V_r)=\rho(x_0\cdot E_1, E_1)=\rho(E_1,E_1)=0$, так как $x_0\cdot E_1=E_1$. С учетом унитарности $Q(t)$ получаем $\lim(e_i, Q^*(t)x_0Q(t)e_j)=0$, $t\to+\infty$, $j\in[1,r]$, $i\in[r+1,n]$, где $(,)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Случай $\det x_0=0$ сводится к рассмотренному возмущением $x_0+\varepsilon I_n$, где $\varepsilon>0$ и I_n — единичная матрица.

Переходим к детальному описанию фазового портрета динамической системы (14). Пусть $\nu_1,\ldots,\nu_n$ — попарно различные комплексные числа, $\psi: O\to\mathbb{C}$ — аналитическая функция, определенная на открытой окрестности множества $\{\nu_1,\ldots,\nu_n\}$, причем $f(\nu_i)=\lambda_i$, где $\gamma_1=\operatorname{Re}\lambda_1<\gamma_2=\operatorname{Re}\lambda_2<\ldots\ldots<\gamma_n=\operatorname{Re}\lambda_n$. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x}=[x,\pi_+(\psi(x))],\quad x(0)=x_0, \tag{23}$$

определенную на открытом подмножестве матриц x со спектром в O. Введем в рассмотрение множество матриц $\Lambda(\nu)$ из L со спектром $\nu=\{\nu_1,\ldots,\ldots,\nu_n\}$. Пусть еще $N\Lambda(\nu)$ — множество нормальных матриц из $\Lambda(\nu)$. Ясно, что $\Lambda(\nu)$ и $N\Lambda(\nu)$ — инвариантные подмножества (23). Для $x\in\in\Lambda(\nu)$ корневые подпространства x и $\psi(x)$ совпадают. Как и выше, обозначим их $E(x;\gamma_i)$, $i\in[1,n]$. Ясно, что $\dim E(x;\gamma_i)=1$. Определим флаги $M(x)$, $N(x)$, $x\in\Lambda(\nu)$:

$$M(x)=(M^1(x)\subset M^2(x)\subset\ldots\subset M^n(x)),$$

$$N(x)=(N^1(x)\subset N^2(x)\subset\ldots\subset N^n(x)),$$

$$M^i(x)=\Sigma\{E(x;\gamma_j): j\in[1,i]\},\quad N^i(x)=\Sigma\{E(x;\gamma_j): j\in[m+1-i,m]\} \tag{24}$$

Для стандартного флага $V=(V_1\subset V_2\subset\ldots\subset V_n)$ определяем, как и выше, флаги $V^\pm(x)=(V_1^\pm(x)\subset V_2^\pm(x)\subset\ldots\subset V_n^\pm(x))$, где

$$V_i^\pm(x)=\Sigma\{V_i^\pm(x)\cap E(x;\gamma_j): j\in[1,n]\},$$

$$V_i^\mp(x)\cap E(x;\gamma_j)=\zeta_j(x)(V_i\cap M_j(x)),\quad j\in[1,n],\quad i\in[1,n], \tag{25}$$

где $\zeta_j(x):\mathbb{C}^n\to E(x;\gamma_j)$ — проекция на $E(x;\gamma_j)$ параллельно $\Sigma\{E(x;\gamma_i): i\neq j\}$. Для $x\in\Lambda(\nu)$ полагаем

$$l_{ij}(x)=\dim(M^i(x)\cap V_j)-\dim(M^{i-1}(x)\cap V_j), \tag{26}$$

$i\in[1,n]$, $j\in[1,n-1]$, $x\in L$, где $M^0(x)\overset{\Delta}{=}0$. Ясно, что $l_{ij}(x)\in\{0,1\}$. Пусть, далее, для $j\in[1,n-1]$ $I_x(j)\overset{\Delta}{=}\{i\in[1,n]: l_{ij}(x)=1\}$. Очевидно, что $|I_x(j)|==\dim V_j=j$, $I_x(1)\subset I_x(2)\subset\ldots\subset I_x(n-1)\subset I_x(n)\overset{\Delta}{=}[1,n]$. Определим перестановки $\sigma_{\pm x}$ множества $[1,n]$ следующим образом:

$$I_x(1)=\{\sigma_{+x}(1)\},\quad I_x(k)\setminus I_x(k-1)=\{\sigma_{+x}(k)\},\quad k\in[2,n]. \tag{27}$$

Аналогичным образом с заменой $M^i(x)$ на $N^i(x)$ в (26) определяем σ_{-x}. Для $x_0 \in \Lambda(\nu)$ в силу (20) определены верхнетреугольные матрицы $x_\pm$, где $Q_\pm$ — унитарные матрицы, переводящие флаг V в флаг $V^\pm(x_0)$ соответственно.

Теорема 4. *Для $x_0 \in \Lambda(\nu)$ диагональные части верхнетреугольных матриц $x_\pm$ суть матрицы* $\operatorname{diag}(\mu^1_\pm, \mu^2_\pm, \dots \mu^n_\pm)$, *где* $\mu^i_+ = \nu_{\sigma+x_0(i)}$, $\mu^i_- = \nu_{\sigma-x_0(n+1-i)}$, $i \in [1, n]$.

Доказательство. Так как $\dim E(x_0; \gamma_i) = 1$, то либо $V^+_j(x_0) \cap E(x_0; \gamma_i)$ есть нулевое подпространство либо совпадает с $E(x_0; \gamma_i)$. Последнее в силу (25) имеет место тогда и только тогда, когда существует вектор в $V_j \cap M^i(x_0)$, не принадлежащий $M^{i-1}(x_0)$. Итак, (см. (26)) $(V^+_j(x_0) \cap E(x_0; \gamma_i) = E(x_0; \gamma_i)) \Leftrightarrow l_{ij}(x_0) = 1$, или

$$V^+_j(x_0) = \sum_{i=1}^{j}{}^{\oplus} E(x_0; \gamma_{\sigma+x_0(i)}). \tag{28}$$

Так как $Q_+ \cdot V_j = V^+_j(x_0)$, то это в точности утверждение теоремы (случай x_- полностью аналогичен).

Следствие 4. *Пусть x_0, $x_1 \in \Lambda(\nu)$, $x^0_\pm$, $x^1_\pm$ — соответствующие предельные матрицы для (23) с начальными условиями x_0, x_1 соответственно. Диагональные части матриц x^0_+, x^1_+ (соответственно x^0_-, x^1_-) совпадают тогда и только тогда, когда*

$$m_{ij}(x_0) \overset{\Delta}{=} \dim(M^i(x_0) \cap V_j) = m_{ij}(x_1) \overset{\Delta}{=} \dim(M^i(x_1) \cap V_j) \tag{29}$$

(*соответственно* $\dim(N^i(x_0) \cap V_j) = \dim(N^i(x_1) \cap V_j)$), $i \in [1, n-1]$, $j \in [1, n-1]$.

Доказательство. Из (29) следует $l_{ij}(x_0) = l_{ij}(x_1)$. Но тогда $\sigma_{+x_0} = \sigma_{+x_1}$ и результат следует из теоремы 4. Обратно, если $\sigma_{+x_0} = \sigma_{+x_1}$, то множества $I_{x_0}(k)$ и $I_{x_1}(k)$ совпадают для всех k и, значит, $l_{ij}(x_0) = l_{ij}(x_1)$ для всех i, j. Но из (26) $\dim(M^i(x) \cap V_j)$ однозначно восстанавливаются по $l_{ij}(x)$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — множество перестановок $[1, n]$. Для $\sigma \in \mathfrak{S}$ пусть $\Lambda^\pm(\sigma; \nu)$ есть множество $x \in \Lambda(\nu)$ таких, что диагональ соответствующей матрицы $x_\pm$ совпадает с $\operatorname{diag}(\nu_{\sigma(1)}, \nu_{\sigma(2)}, \dots \nu_{\sigma(n)})$. Ясно, что $\Lambda(\nu) = \bigcup\{\Lambda^+(\sigma; \nu) : \sigma \in \mathfrak{S}\}$, $\Lambda^+(\sigma; \nu) \cap \Lambda^+(\sigma', \nu) = \varnothing$ при $\sigma \neq \sigma'$ и аналогично для $\Lambda^-(\sigma, \nu)$. Для $\sigma \in \mathfrak{S}$ определим также матрицу $S(\sigma)$ такую, что $S(\sigma) \cdot e_i = e_{\sigma(i)}$, $i \in [1, n]$, где e_i — стандартный базис $\mathbb{C}^n$.

Теорема 5. *Множество $\Lambda^+(\sigma; \nu)$ (соответственно $\Lambda^-(\sigma; \nu)$) суть множество матриц вида $T \cdot S(\sigma^{-1}) \cdot G \cdot S(\sigma) \cdot T^{-1}$, где T — произвольная верхнетреугольная обратимая матрица, а G — произвольная верхнетреугольная матрица с диагональю* $\operatorname{diag}(\nu_1, \dots \nu_n)$ (*соответственно* $\operatorname{diag}(\nu_n, \nu_{n-1}, \dots \nu_1)$).

Доказательство. Пусть $x \in \Lambda(\nu)$ имеет указанный выше вид и $f_i \in \mathbb{C}^n$ таковы, что $x f_i = \nu_i f_i$, $i \in [1, n]$. Ясно, что $M(x) = (\langle f_1 \rangle \subset \langle f_1, f_2 \rangle \subset \dots \subset \mathbb{C}^n)$, где $\langle f_1, \dots, f_i \rangle$ — линейная оболочка векторов $f_1, \dots, f_i$. Имеем $G \cdot S(\sigma) \cdot T^{-1} f_i = \nu_i S(\sigma) \cdot T^{-1} f_i$. Отсюда с учетом условий, наложенных на G, имеем $S(\sigma) \cdot T^{-1} \cdot M(x) = V$ или $M(x) = T \cdot S(\sigma^{-1}) \cdot V$. С другой стороны, для $x(\sigma) = \operatorname{diag}(\nu_{\sigma(1)}, \dots \nu_{\sigma(n)})$ имеем, очевидно, $M(x(\sigma)) = S(\sigma^{-1}) \cdot V$, $x(\sigma) \in \Lambda^+(\sigma, \nu)$. Но $\dim(M^i(x) \cap V_j) = \dim((T \cdot S(\sigma^{-1}) \cdot V)^i \cap V_j) = \dim((S(\sigma^{-1}) \cdot V)^i \cap V_j)$, так как $T \cdot V = V$. В силу следствия 4 получаем $x \in \Lambda^+(\sigma, \nu)$.

Обратное утверждение доказывается с использованием следующего факта. Условия (29) задают разбиение многообразия полных флагов на $n!$ подмножеств (клеток). Принадлежность флага F той или иной клетке определяется набором чисел $\dim\ (F^i \cap V_j)$, $i, j \in [1, n-1]$. Стабилизатор флага V при действии полной линейной группы (т. е. множество верхнетреугольных обратимых матриц) действует транзитивно на каждой из клеток. Это легко следует из разложения Брюа для $GL(n, \mathbb{C})$ (см., например, [5]). Указанное выше разложение многообразия флагов называется также разложением Брюа. Если $x \in \Lambda^+(\sigma, \nu)$, то согласно сказанному выше $M(x) = T \cdot S(\sigma^{-1}) \cdot V$ для некоторой верхнетреугольной обратимой матрицы T. Достаточно провести приведенное выше рассуждение в обратном порядке.

Пусть $\bar{\sigma} \in \mathfrak{S}$, $\bar{\sigma}(i) = n + i - 1$, $i \in [1, n]$.

Следствие 5. *Для того чтобы $x \in \Lambda^+(\bar{\sigma}, \nu)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$M^{n-i}(x) \cap V_i = 0 \quad \forall\, i \in [1, n-1]. \tag{30}$$

Доказательство. Это непосредственное следствие теоремы 4.

Замечание. Условия (30) — это условия «общего положения» и выделяют в разложении Брюа многообразия флагов так называемую «большую клетку».

Рассмотрим динамическую систему (23) на инвариантном многообразии $N\Lambda(\nu)$ нормальных матриц из $\Lambda(\nu)$. Отображение $x \to M(x)$ задает диффеоморфизм $N\Lambda(\nu)$ на многообразие флагов. Согласно следствию 3 для $x \in N\Lambda^{\pm}(\sigma, \nu) \overset{\Delta}{=} \Lambda^{\pm}(\sigma, \nu) \cap N\Lambda(\nu)$ соответствующие $x^{\pm}$ есть диагональная матрицы $\operatorname{diag}(\nu_{\sigma(1)}, \ldots, \nu_{\sigma(n)})$, причем $\lim x(t) = x^+$, $t \to +\infty$ при $x \in N\Lambda^+(\sigma, \nu)$ и аналогично для $N\Lambda^-(\sigma, \nu)$. Далее, $N^i(x) = [M^{n-i}(x)]^{\perp}$ (ортогальное дополнение относительно стандартного эрмитова произведения в $\mathbb{C}^n$).

Таким образом, размерности $\dim(N^i(x) \cap V_j)$ однозначно восстанавливаются по числам $\dim(M^i(x) \cap W_j)$, где $W_j = V_{n-j}^{\perp}$. Поскольку $x(\sigma) = \operatorname{diag}(\nu_{\sigma(1)}, \ldots, \nu_{\sigma(n)}) \in N\Lambda^+(\sigma, \nu) \cap N\Lambda^-(\sigma, \nu)$ и $M(x(\sigma)) = S(\sigma^{-1}) \cdot V$, из следствия 4 получаем такое следствие.

Следствие 6. *Пусть $x \in N\Lambda(\nu)$. Матрица $x \in N\Lambda^+(\sigma, \nu)$ (соответственно $N\Lambda^-(\sigma, \nu)$) тогда и только тогда, когда*

$$\dim(M^i(x) \cap V_j) = \dim(M^i(x(\sigma)) \cap V_j) \tag{31}$$

(*соответственно* $\dim(M^i(x) \cap W_j) = \dim(M^i(x(\sigma)) \cap W_j)$), $\forall\, i, j \in [1, n-1]$, $W_j = V_{n-j}^{\perp}$.

Теорема 6. *Множество $N\Lambda^+(\sigma, \nu)$ (соответственно $N\Lambda^-(\sigma, \nu)$) суть множество матриц вида $O(T, \sigma) D O^*(T, \sigma)$, где T — произвольная верхнетреугольная обратимая матрица, $O(T, \sigma)$ — унитарная компонента в QR-разложении матрицы $T \cdot S(\sigma^{-1})$ и $D = \operatorname{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ (соответственно $\operatorname{diag}(\nu_n, \nu_{n-1}, \ldots, \nu_1)$).*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 5.

Теорема 7. *Векторное поле, определяемое динамической системой* (23) *на инвариантном многообразии $N\Lambda(\nu)$, является векторным полем Морса — Смейла.*

Доказательство. Рассматриваемое векторное поле имеет $n!$ неподвижных точек (диагональных матриц), причем всякая траектория сходится при $t \to \pm\infty$ к одной из этих точек (следствие 3). Каждая из этих точек гиперболична на L (это доказывается простым вычислением) и тем более на $N\Lambda(\nu)$. Само $N\Lambda(\nu)$ диффеоморфно многообразию флагов, в частности компактное многообразие. Осталось доказать, что устойчивое и неустойчивое многообразия любой пары неподвижных точек пересекаются трансверсально (см., например, [5] для определения векторных полей Морса — Смейла). Или (следствие 5) нужно доказать, что две клетки C_1, C_2 в разложениях Брюа, определяемых флагами V и W, пересекаются трансверсально. Пусть $p \in C_1 \cap C_2$. Но $C_1 = \{Tp : T \in St(V)\}$, $C_2 = \{Fp : F \in$

$\in St(W)\}$, где $St(V)$ — стабилизатор флага V при действии $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ на многообразии флагов. Но $St(V)$ — группа обратимых верхнетреугольных, а $St(W)$ — группа обратимых нижнетреугольных матриц. Поскольку $St(V)$ и $St(W)$ пересекаются трансверсально в единице, то это же верно для клеток C_1 и C_2 в p.

4. В настоящей работе рассмотрена теоретико-групповая схема для QR-алгоритмов и связанных с ними обобщенных потоков Тода. Детально изучено асимптотическое поведение решений потоков Тода, связанных с классическим QR-алгоритмом. Описан фазовый портрет решений этого класса динамических систем. На бесконечности элементы, лежащие ниже главной диагонали матриц этих решений, стремятся к нулю, что открывает возможность для нахождения спектра различных классов матриц с помощью численного интегрирования потоков Тода. Для нормальных матриц фазовый портрет этого класса потоков Тода оказывается структурно устойчивым. Интересно было бы перенести эти результаты на бесконечномерную ситуацию в духе работ [10, 11].

1. *Symes W. W.* The QR-algorithm for the nonperiodic Toda lattice // Physica.— 1982.— **4D.**— P. 275—280.
2. *Deift P., Nanda T., Fomei C.* Differential equations for the symmetric eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal.— 1983.— **20.** — P. 1—22.
3. *Chu M. T.* The generalized Toda flow, the QR-algorithm and the center manifold theory // SIAM J. Alg. Discr. Meth.— 1984.— **5**, N 2.— P. 187—201.
4. *Watkins D. S.* Isospectral floow// SIAM Rev.— 1984.— **26**, N 3.— P. 379—391.
5. *Shub M., Vasquez A. T.* Some linearly induced Morse—Smale systems, QR-algorithm and the Toda lattice // Contemp. Math.— 1987.— **64**.— P. 181—194.
6. *Семенов-Тянь-Шанский М. А.* Что такое классическая r-матрица // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— **17**, № 4.— С. 17—33.
7. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.— М. : Наука, 1984.— 319 с.
8. *Shayman M.* Phase portrait of the matrix Riccati equation // SIAM J. Contr. Opt.— 1986.— **24**, N 1.— P. 1—65.
9. *Файбусович Л. Е.* О симплектической структуре операторного уравнения Риккати // Кибернетика и вычислит. техника.— 1985.— Вып. 65.— С. 62—68.
10. *Berezansky Ju. M.* The integration of semi-infinite Toda chain by means of inverse spectral problem.— Kiew, 1984.— 42 p. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.79).
11. *Deift P., Li L. C., Tomei C.* Toda flows with infinitely many variables // J. Funct. Anal.— 1985.— **64**, N 3.— P. 358—402.

Воен. ордена Ленина академия тыла и транспорта, Ленинград

Получено 18.06.86