УДК 517.982.224

Т. Я. Азизов

О расширении инвариантных дуальных пар

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^+ \oplus \mathfrak{H}^-$ — J-пространство*, V — J-несжимающий, A — максимальный J-диссипативный операторы, V^c и A^c — их J-сопряженные соответственно. Следуя [1], будем считать подпространство $\mathfrak{L}$ инвариантным относительно, вообще говоря, неограниченного оператора T ($T = V$ или $T = A$), если $\overline{\mathfrak{D}_T \cap \mathfrak{L}} = \mathfrak{L}$ и $T(\mathfrak{D}_T \cap \mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L}$, и вполне инвариантным, если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{D}_T$ и $T\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$, где $\mathfrak{D}_T$ — область определения оператора T. Пара подпространств $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ называется дуальной, если $\mathfrak{L}_+$ — неотрицательное, $\mathfrak{L}_-$ — неположительное подпространства и $\mathfrak{L}_+$ J-ортогонально $\mathfrak{L}_-$; если $\mathfrak{L}_+$ и $\mathfrak{L}_-$ — максимальные семидефинитные подпространства соответствующих знаков, то $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ называют максимальной дуальной парой. Будем говорить, что дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ инвариантна относительно пары операторов $\{T, T^c\}$, если $\mathfrak{L}_+$ инвариантно относительно T, а $\mathfrak{L}_-$ — относительно T^c. Каждому семидефинитному подпространству $\mathfrak{L}$ соответствует угловой оператор: неотрицательному — $P^-(P^+ \mid \mathfrak{L})^{-1}$, неположительному — $P^+(P^- | \mathfrak{L})^{-1}$, где P^+ — ортопроектор на $\mathfrak{H}^+$, P^- — на $\mathfrak{H}^-$; множество угловых операторов семейства $\mathfrak{M}^+$ максимальных неотрицательных подпространств совпадает с операторным шаром $\mathfrak{K}_+ = \{K \mid K : \mathfrak{H}^+ \to \mathfrak{H}^-, \|K\| \leqslant 1\}$, а семейства $\mathfrak{M}^-$ максимальных неположительных подпространств — с операторным шаром $\mathfrak{K}_+ = \{K \mid K : \mathfrak{H}^+ \to \mathfrak{H}^-, \|K\| \leqslant 1\}$, а семейства $\mathfrak{M}^-$ максимальных неположительных подпространств с операторным шаром $\mathfrak{K}_- = \{K \mid K : \mathfrak{X}^+ — \mathfrak{X}^-, \|K\| \leqslant 1\}$. Символами $\mathring{\mathfrak{M}}^+$, $\mathring{\mathfrak{M}}^-$, $\mathring{\mathfrak{K}}_+$ и $\mathring{\mathfrak{K}}_-$ будем обозначать внутренность множеств $\mathfrak{M}^+$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{K}_+$ и $\mathfrak{K}_-$ соответственно.

Начиная с известной работы Л. С. Понтрягина одной из центральных проблем теории операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой, является проблема существования максимальных семидефинитных подпространств, инвариантных относительно рассматриваемых операторов. Достаточно подробно этот вопрос освещен в [1]. Здесь же мы лишь напомним, что М. Г. Крейн поставил задачу о возможности расширения заданного инвариантного относительно J-несжимающего оператора V неотрицательного подпространства до максимального неотрицательного подпространства, инвариантного относительно V. Аналогичный вопрос о расширении дуальных пар, инвариантных относительно J-унитарного оператора, поставлен Р. С. Филлипсом. Целью данной работы являются, с одной стороны, объединение постановок М. Г. Крейна и Р. С. Филлипса: рассматривается задача о расширении дуальной пары, инвариантной относительно пары операторов, а с другой — усиление соответствующих результатов М. Г. Крейна [2] и Лангера [3] даже в прежних постановках.

Ниже будем считать J-несжимающий оператор V непрерывным и $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{H}$. Напомним [1], что оператор V удовлетворяет условию Λ_- (соответственно Λ_+), если существует такой оператор $K_- \in \mathring{\mathfrak{K}}_-$ (соответственно $K_+ \in \mathring{\mathfrak{K}}_+$), что $K_-V_{22} + K_-V_{21}K_- - V_{12} - V_{11}K_- \in \mathfrak{S}_\infty$ (соответственно $K_+V_{11} + K_+V_{12}K_+ - V_{21} - V_{22}K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$), где $V = \|V_{ij}\|_{i,j=1}^2$ — матричное

* Здесь и ниже мы придерживаемся общепринятых «индефинитной» терминологии и обозначений (см., например, [1]).

представление оператора V относительно разложения $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^+\oplus\mathfrak{H}^-$, а $\mathfrak{S}_\infty$ — множество вполне непрерывных операторов; при этом будем соответственно писать $V\in\Lambda_-$ или $V\in\Lambda_+$. Заметим [1], что включения $V\in\Lambda_+$ или $V\in\Lambda_-$ не зависят от конкретного канонического разложения J-пространства.

Теорема 1. *Пусть $V\in\Lambda_-$ — J-несжимающий оператор. Тогда какова бы ни была дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$, инвариантная относительно пары операторов $\{V, V^c\}$, причем $\mathfrak{L}_+$ — вполне инвариантное относительно V подпространство, существует максимальная дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$, являющаяся расширением $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ и инвариантная относительно $\{V, V^c\}$.*

Доказательство основано на известной теореме Гликсберга о неподвижной точке многозначных отображений и использует тот факт, что подмножество из $\mathfrak{K}_+$, состоящее из угловых операторов подпространств из $\mathfrak{M}^+$, являющихся расширениями для $\mathfrak{L}_+$ и J-ортогональных $\mathfrak{L}_-$, оказывается замкнутым в слабой операторной топологии и выпуклым.

Заметим, что если $V\in\Lambda_+$ — J-бинесжимающий оператор, то теорема 1 справедлива для пары $\{V^c, V\}$, а поскольку J-бинесжимающий оператор $V\in\Lambda_+\cap\Lambda_-$, то она справедлива как для пары $\{V, V^c\}$, так и для пары $\{V^c, V\}$.

Далее, как обычно, символами $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\breve{\sigma}_p(T)$, $\sigma_r(T)$, $\rho(T)$ обозначены соответственно спектр, точечный спектр, нормальные собственные значения, остаточный спектр и резольвентное множество оператора T; $\mathbf{D}=\{\lambda\,|\,|\lambda|\leqslant 1\}$, $\mathring{\mathbf{D}}$ — внутренность $\mathbf{D}$, а через Ω^{-1} и Ω^* обозначим множества $\Omega^{-1}=\{\lambda^{-1}\,|\,\lambda\in\Omega\}$ и $\Omega^*=\{\bar\lambda\,|\,\lambda\in\Omega\}$.

Теорема 2. *Пусть $V\in\Lambda_-$ — J-бинесжимающий оператор, $\sigma_p(V)\cap\cap(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})\subset\breve{\sigma}_p(V)$ и $\sigma_r(V)\cap(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})=\varnothing$. Поскольку $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ — инвариантная относительно $\{V, V^c\}$ дуальная пара, причем $\sigma(V\,|\,\mathfrak{L}_+)\subset\mathbf{C}\setminus\mathring{\mathbf{D}}$ и $\sigma(V^c\,|\,\mathfrak{L}_-)\subset\mathbf{D}$, то существует максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$, инвариантная относительно $\{V, V^c\}$ и такая, что $\sigma(V\,|\,\tilde{\mathfrak{L}}_+)\subset\mathbf{C}\setminus\mathring{\mathbf{D}}$, $\sigma(V^c\,|\,\tilde{\mathfrak{L}}_-)\subset\mathbf{D}$, $\mathfrak{L}_\pm\subset\tilde{\mathfrak{L}}_\pm$.*

Доказательство проводится в три этапа. Сперва доказывается, что подпространство з. л. о. $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_\lambda(V)\,|\,\lambda\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{D}\}$, где $\mathfrak{L}_\lambda(V)$ — корневой линеал оператора V, соответствующий точке λ, неотрицательно, вполне инвариантно относительно V и J-ортогонально $\mathfrak{L}_-$. Затем можно воспользоваться теоремой 1, в силу которой существует максимальная дуальная пара $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$, инвариантная относительно $\{V, V^c\}$. Наконец, используя условия $\sigma_p(V)\cap(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})\subset\breve{\sigma}_p(V)$ и $\sigma_r(V)\cap(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})=\varnothing$, заключаем, что $\sigma(V\,|\,\tilde{\mathfrak{L}}_+)\subset\mathbf{C}\setminus\mathring{\mathbf{D}}$ и $\sigma(V\,|\,\tilde{\mathfrak{L}}_-)\subset\mathbf{D}$.

Отметим, что если в условиях теоремы 2 $V\in\Lambda_+$, то ее заключение справедливо для пары $\{V^c, V\}$, а если $V\in\Lambda_+\cap\Lambda_-$, — для $\{V, V^c\}$ и $\{V^c, V\}$. В связи с теоремой 2 и сделанным замечанием представляет интерес следующая лемма.

Лемма. *Пусть V — J-бинесжимающий оператор, V_{21} и $V_{11}^*V_{11}-I$ — вполне непрерывные операторы. Тогда $V\in\Lambda_+\cap\Lambda_-$ и $\sigma(V)\cap(\mathbf{C}\setminus\mathbf{D})\subset\subset\breve{\sigma}_p(V)$.*

Доказательство непосредственно вытекает из известных теорем теории возмущений и следующего простого обобщения соответствующих утверждений [1] И. С. Иохвидова, М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна о параметрическом представлении J-полуунитарных J-бинесжимающих операторов: между всеми J-бинесжимающими операторами $V=\|V_{ij}\|_{i,j=1}^2$ и четверками сжатий $\{W_+, W_-, \Gamma, \mathcal{J}\}$, где: а) $W_+:\mathfrak{H}^+\to\mathfrak{H}^+$, $0\in\rho(W_+)$; б) $W_-:\mathfrak{H}^-\to\mathfrak{H}^-$; в) $\Gamma:\mathfrak{H}^-\to\mathfrak{H}^-$ — равномерное сжатие; г) $\mathcal{J}:\mathfrak{H}^-\to\mathfrak{H}^+$,

$\operatorname{Ker} \mathscr{I} \supset \operatorname{Ker}(I - W_-^* W_-)$, $\operatorname{Ker} \mathscr{I}^* \supset \operatorname{Ker}(W_+^{-1} W_+^{*-1} - I)$, существует взаимно однозначное соответствие, при котором

$$V = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} W_+^{-1} & (W_+^{-1} W_+^{*-1} - I)^{1/2} \mathscr{I} (I - W_-^* W_-)^{1/2} \\ 0 & W_- \end{pmatrix}.$$

Поскольку $V \in \Lambda_+$ — J-полуунитарный J-бинесжимающий оператор, $\Omega = [\sigma(V) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{D})] \cup [\sigma^*(V) \cap (\mathbf{C} \setminus \mathbf{D})]^{-1}$ и $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ и $\Omega_1^{-1} = \Omega_2^*$, а $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ — такая инвариантная относительно $\{V^c, V\}$ дуальная пара, что неунитарный спектр $\sigma_{\text{неун}}(V^c \mid \mathfrak{L}_+)$ оператора $V^c \mid \mathfrak{L}_+$ включен в Ω_1^*, а $\sigma_{\text{неун}}(V \mid \mathfrak{L}_-) \subset \Omega_2$, то справедливо следующее усиление теоремы 2.

Теорема 3. *Существует такое расширение дуальной пары $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ до максимальной дуальной пары $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$, инвариантной относительно $\{V^c, V\}$, что $\sigma_{\text{неун}}(V^c \mid \tilde{\mathfrak{L}}_+) = \Omega_1^*$, а $\sigma_{\text{неун}}(V \mid \tilde{\mathfrak{L}}_-)$ состоит из точек регулярного типа, расположенных в $\mathbf{D}$, и конечнократных собственных значений, включенных в Ω_2. При этом оператор V J-унитарен тогда и только тогда, когда $\sigma_{\text{неун}}(V \mid \tilde{\mathfrak{L}}_-) = \Omega_2$.*

При условиях V — J-унитарный оператор, $V_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L}_- = \{\theta\}$ теорема 3 совпадает с соответствующим результатом М. Г. Крейна [2].

Перейдем теперь к исследованию вопроса об инвариантных дуальных парах операторов $\{A, A^c\}$, где A — максимальный замкнутый J-диссипативный оператор. Далее будем предполагать, что оператор A удовлетворяет условию (L) $(A \in (L))$, т. е. в $\mathfrak{D}_A$ есть хотя бы одно максимальное равномерно дефинитное подпространство. Заметим, что тогда и $A^c \in (L)$. В самом деле, будем считать, что $\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{D}_A$ и $A = \| A_{ij} \|_{i,j=1}^2$ — матричное разложение оператора A. Тогда в $\mathfrak{D}_{A^c}$ содержатся все подпространства $\mathfrak{L}_\xi$ с угловыми операторами $(A_{12}(A_{22} - \xi I)^{-1})^*$. Остается заметить, что $\| A_{12} \times (A_{22} - \xi I)^{-1} \| \to 0$ при $\operatorname{Im} \xi \to +\infty$ и при малых ξ подпространства $\mathfrak{L}_\xi$ равномерно положительны. Из этого замечания вытекает, что поскольку $\mathfrak{L}_+$ — максимальное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно оператора A, то $\mathfrak{L}_- = \mathfrak{L}_+^{[\perp]}$ — максимальное неположительное подпространство, инвариантное относительно оператора A^c. В самом деле, включение $A^c(\mathfrak{L}_- \cap \mathfrak{D}_{A^c}) \subset \mathfrak{L}_-$ тривиально, а равенство $\overline{\mathfrak{L}_- \cap \mathfrak{D}_{A^c}} = \mathfrak{L}_-$ вытекает из того, что $A^c \in (L)$.

В формулируемых ниже следствиях принята следующая терминология: плотно определенный оператор $A \in (L)$ удовлетворяет условию Λ'_- (соответственно условию Λ'_+), если существует такое равномерное сжатие $K_+ : \mathfrak{H}^+ \to \mathfrak{H}^-$, $K_+\mathfrak{H}^+ \subset \mathfrak{D}_A$, что B_1 является B_2-вполне непрерывным оператором (соответственно $B_3 \in \mathfrak{S}_\infty$), где $B_1 = A_{11}K_+^* + A_{12} - K_+^* A_{21} K_+^* - K_+^* A_{22}$, $B_2 = A_{22} + A_{21}K_+^* - K_+A_{12} - K_+A_{11}K_+^*$, $B_3 = K_+A_{11} + K_+A_{12}K_+ - A_{21} - A_{22}K_+$. Символом $\rho(A; +i\infty)$ обозначена связная компонента множества $\rho(A)$, содержащая множество $\{\zeta \mid \operatorname{Im} \zeta > 2 \| AP^+ \| \}$.

Следствие 1. *Пусть $A \in (L)$ — максимальный J-диссипативный оператор, удовлетворяющий условию Λ_-. Тогда какова бы ни была дуальная пара $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$, инвариантная относительно $\{A, A^c\}$, $\mathfrak{L}_+ \subset \mathfrak{D}_A$ и $\rho(A; +i\infty) \cap \rho(-A^c \mid \mathfrak{L}_-) \neq \varnothing$, существует ее расширение $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$ до максимальной дуальной пары, удовлетворяющей тем же условиям.*

Доказательство. Введем J-бинесжимающий оператор $V = (A - \bar{\zeta} I)(A - \zeta I)^{-1}$. Так как $\rho(A; +i\infty) \cap \rho(A \mid \mathfrak{L}_+) \cap \rho(-A^c \mid \mathfrak{L}_-) = \varnothing$, то существует такая точка ζ, что $\zeta \in \rho(A \mid \mathfrak{L}_+)$, а $-\zeta \in \rho(-A^c \mid \mathfrak{L}_-)$. Следовательно, $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ — инвариантная относительно $\{V, V^c\}$ дуальная пара. Остается воспользоваться теоремой 1 и обратным преобразованием Кэли — Неймана.

Аналогично, исходя из теоремы 2, леммы и теоремы 3 можно доказать следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть* $A \in (L)$ — *максимальный* J-*диссипативный оператор, удовлетворяющий условию* Λ_-', $\sigma_r(A) \cap \mathbf{C}^+ = \varnothing$ *и* $\sigma_p(A) \cap \mathbf{C}^+ \subset \tilde{\sigma}_p(A)$. *Поскольку* $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$—*дуальная пара, инвариантная относительно* $\{A, A^c\}$, *причем* $\sigma(A|\mathfrak{L}_+) \subset \mathbf{R} \cup \mathbf{C}^+$, $\sigma(A^c|\mathfrak{L}_-) \subset \mathbf{R} \cup \mathbf{C}^+$, $\rho(A|\mathfrak{L}_+) \cap \rho(A; +i\infty) \neq \varnothing$, *то существует максимальная дуальнаа пара* $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$, *являющаяся расширением* $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ *и удовлетворяющая аналогичным условиям. Более того,* $\tilde{\mathfrak{L}}_+ \subset \mathfrak{D}_A$.

Следствие 3. *усть* $A \in (L)$ — *максимальный* J-*диссипативный оператор,* A_{21} *и* $\operatorname{Im} A_{11}$ —*вполне непрерывные операторы. Тогда* $A \in \Lambda_+' \cap \Lambda_-'$ *и* $\sigma(A) \cap \mathbf{C}^+ \subset \tilde{\sigma}_p(A)$.

Следствие 4. *Пусть* $A \in (L)$ — *максимальный* J-*диссипативный* J-*симметрический оператор, удовлетворяющий условию* Λ_+', $\Omega = [\sigma(A) \cap \mathbf{C}^+] \cup [\sigma(A) \cap \mathbf{C}^+]^*$ *и* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, *где* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$, $\Omega_1 = \Omega_2^*$. *Поскольку* $\{\mathfrak{L}_+, \mathfrak{L}_-\}$ — *такая инвариантная относительно* $\{A^c, A\}$ *дуальная пара, что невещественный спектр* $\sigma_{\text{нев}}(A^c \mid \mathfrak{L}_+)$ *и* $\sigma_{\text{нев}}(A \mid \mathfrak{L}_-)$ *операторов* $A^c \mid \mathfrak{L}_+$ *и* $A \mid \mathfrak{L}_-$ *включены в* Ω_1, *то существует такое ее расширение* $\{\tilde{\mathfrak{L}}_+, \tilde{\mathfrak{L}}_-\}$ *до максимальной дуальной пары, инвариантной относительно* $\{A^c, A\}$, *что* $\sigma_{\text{нев}}(A^c \mid \mathfrak{L}_+) = \Omega_1$, *а* $\sigma_{\text{нев}}(A (\tilde{\mathfrak{L}}_-)$ *состоит из точек регулярного типа, расположенных в нижней полуплоскости и конечнократных собственных значений, заключенных в* Ω_1. *При это* A — J-*самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда* $\sigma_{\text{нев}}(A \mid \tilde{\mathfrak{L}}_-) = \Omega_1$.

В заключение отметим, что если A — J-самосопряженный оператор, $A_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{L}_+ = \mathfrak{L}_- = \{\theta\}$, то следствие 4 совпадает с соответствующим результатом Лангера [3].

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М. : Наука, 1986.— 352 с.
2. *Крейн М. Г.* Об одном новом применении принципа неподвижной точки в теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР.— 1964.— **154**, № 5.— С. 1023—1026.
3. *Langer H.* Eine Verallgemeinerung eines Satzes von L. S. Pontrjagin // Math. Ann.— 1963.— **152**, N 5.— S. 434—436.

НИИ математики Воронеж. ун-та — Получено 17.11.86