УДК 519.21

Ю. С. Мишура

Преобразования мартингальных полей при замене вероятностной меры

В настоящей работе получены формулы преобразования разрывных случайных двупараметрических функций с различными мартингальными свойствами при замене исходной вероятностной меры эквивалентной. Аналогичные вопросы для непрерывных функций, порожденных винеровским случайным полем, рассматривались в [1], для произвольных непрерывных полей — в [2].

Пусть $t=(t_1, t_2) \in R_+^2$; $s \leqslant t$, если $s_1 \leqslant t_1$, $s_2 \leqslant t_2$, $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ — поток σ-алгебр, удовлетворяющих условиям Каироли и Уолша $(F1 - F4)$ [3], $\gamma^1_{t_1} = \bigvee_{t_2 \geqslant 0} \mathfrak{F}_t, \gamma^2_{t_2} = \bigvee_{t_1 \geqslant 0} \mathfrak{F}_t$, $\gamma_t = \gamma^1_{t_1} \vee \gamma^2_{t_2}$, $\mathfrak{F}_t$ пополнены P-нулевыми множествами $\mathfrak{F}$.

Обозначим $\Gamma = (\{0\} \times [0, \infty)) \cup ([0, \infty) \times \{0\})$, $R^2_0 = R^2_+ \setminus \Gamma$, $\mathbf{D}$—пространство функций, постоянных на Γ и имеющих в каждой точке $t \in R^2_0$ 4 предела по квадрантам, в каждой точке $t \in \Gamma$ 2 предела по квадрантам, причем $x_t = \lim_{s \downarrow t, s \geqslant t} x_s$.

Далее рассматриваются $\mathfrak{F}_t$ -согласованные случайные поля $(x_t, t \in R^2_+)$, траектории которых п. н. (почти наверное) принадлежат $\mathbf{D}$. Будем использовать понятия двупараметрического мартингала (сильного мартингала), введенного в [3], и предсказуемого поля ограниченной вариации [4]. Классы мартингалов (сильных мартингалов), интегрируемых со степенью $p \geqslant 1$, обозначим через $\mathfrak{W}^p$ $(\mathfrak{W}^p_s)$, класс предсказуемых полей ограниченной вариации — через B. Через $l\mathfrak{W}_i$ обозначим класс полей m^i_t, $i = 1, 2$, являющихся локальными мартингалами по t_i при любом фиксированном t_j (относительно некоторой фиксированной последовательности $\tau^i_{m_i}$ $\gamma^i_{t_i}$-измеримых моментов остановки), через B_i — класс предсказуемых процессов ограниченной вариации по t_i при фиксированном t_j. Слабым семимартингалом назовем поле $x_t = m_t + m^1_t + m^2_t + b_t$, где $m \in l\mathfrak{M}_1 \cap l\mathfrak{M}_2$, $m^i \in l\mathfrak{M}_i \cap \cap B_j$, $b \in B$, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$. Если $x_t = m^1_t + m^2_t$, $m^i \in l\mathfrak{M}_i$, такое поле назовем слабым мартингалом $(x \in l\mathfrak{M}_w)$.

Введем обозначения: $[0, T] \subset R^2_+$—фиксированный прямоугольник, $\lambda_i = \{0 = t^0_i < t^1_i < \ldots < t^n_i = T_i\}$ — разбиения его сторон, $i = 1, 2$; $\lambda = \lambda_1 \times \lambda_2$, $t_{jk} = (t^j_1, t^k_2)$, $\Delta^1_{jk} x = x_{t_{jk}} - x_{t_{j-1\,k}}$, $\Delta^2_{jk} x = x_{t_{jk}} - x_{t_{j\,k-1}}$, $\square_{jk} x = \Delta^1_{jk} x - \Delta^1_{j\,k-1} x$, $x]\,s, t] = x_t - x_{s_1 t_2} - x_{t_1 s_2} + x_s$, $s \leqslant t$, $\Delta^1_s x = x_s - x_{s_1 - s_2}$, $\Delta^2_s x = x_s - x_{s_1 s_2 -}$. Пусть x и y — слабые семимартингалы, $[x, y]^i_t$ — однопараметрические квадратические вариации, взятые при фиксированном t_j, $\langle x, y \rangle^i_t = \pi^i [x, y]^i_t$, $\langle x \rangle^i = \langle x, x \rangle^i$ (π^i — оператор дуальной предсказуемой проекции по t_i). Заметим, что для $x, y \in \mathfrak{M}^2$ существует двухпараметрическая квадратическая вариация $[x, y]_T = P - \lim_{|\lambda| \to 0} \Sigma^n_{j,k=1} \square_{jk} x \square_{jk} y$.

Пусть Q — вероятностная мера на $(\Omega, \mathfrak{F})$, $Q \sim P$. Обозначим $M_\infty = dQ/dP$. Согласно [5], при условии $M_\infty \in L \log L$ поле $M_t = E(M_\infty / \mathfrak{F}_t)$ является положительным равномерно интегрируемым мартингалом и имеет модификацию, траектории которой п. н. принадлежат D. Мартингальные поля по соответствующим мерам будем помечать символами (P) и (Q). Заметим, что условие Каироли и Уолша $(F4)$ [3] по мере Q, вообще говоря, выполняться не будет.

Лемма 1. *Случайное поле $(x_t, \mathfrak{F}_t)$ является локальным (слабым) Q-мартингалом тогда и только тогда, когда $x_t M_t$—локальный (слабый) P-мартингал.*

2. *Пусть условие $(F4)$ [3] выполняется по мере Q. В этом случае $(x_t, \mathfrak{F}_t)$ — сильный Q-мартингал тогда и только тогда, когда для любых $s \leqslant t$ и любого множества $A \in \gamma_{s,t}$ $\int_A x]\,s, t]\, M_t dP = 0$, где $\gamma_{s,t} = \mathfrak{F}_{s_1 t_2} \vee \vee \mathfrak{F}_{t_1 s_2}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе. Пусть $A \in \gamma_{s,t}$, $s \leqslant t$. Тогда, учитывая, что $\gamma_{s,t} \subset \mathfrak{F}_t$, получаем $\int_A x]s, t]\, dQ = \int_A x]\,s, t]\, E\left(\frac{dQ}{dP} / \mathfrak{F}_t\right) dP = \int_A x]\,s, t]\, M_t dP$. Теперь достаточно заметить, что при выполнении по мере Q условия $(F4)$ [3] поле $(x_t, \mathfrak{F}_t)$— сильный мартингал тогда и только тогда, когда $\int_A x]\,s, t]\, dQ = 0$ для любого $A \in \gamma_{s,t}$.

Далее будем предполагать, что $E\left(\frac{dQ}{dP}\right)^2 < \infty$, т. е. $M_t \in \mathfrak{M}^2$. Введем стохастические интегралы

$$(x\bigcirc y)_T = P\text{-}\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{j,k=1}^{n} x_{jk} \square_{jk} y,$$

$$(x*y)_T = P\text{-}\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{jk}^1 x \Delta_{jk}^2 y,$$

$$(1\text{-}]\, x]\bigcirc y)_T = P\text{-}\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{j,k=1}^{n} \square_{jk} x \Delta_{j\,k-1}^1 y,$$

$$(2 -]\, x]\bigcirc y)_T = P\text{-}\lim_{|\lambda|\to 0} \sum_{j,k=1}^{n} \square_{jk} x \Delta_{jk-1}^2 y,$$

(при условии, что указанные пределы существуют).

Теорема 1. *Пусть* $x \in \mathfrak{M}^{2+\delta}(P)$, $\delta > 0$. *Тогда существует единственный слабый семимартингал* $r_t = m_t^1 + m_t^2 + b_t$, *где* $m^i \in lM_i \cap B_j$, $b \in B$, *такой, что* $x - r \in l\mathfrak{M}(Q)$, *причем* m^i *и* b *удовлетворяют системе стохастических уравнений*

$$m_t^i + b_t = \int_0^{t_j} M_{t_i s_j -}^{-1} d_j \langle x - m^j, M\rangle_{t_i s_j}^j, \tag{1}$$

$$(i, j) = (1, 2), (2, 1).$$

Замечание. Поле r_t — единственное, не имеющее «мартингальной» компоненты и удовлетворяющее условиям теоремы.

Доказательство. Пусть поле r_t имеет вид, указанный в условии. Согласно лемме $x - r \in l\,\mathfrak{M}(Q)$ тогда и только тогда, когда $z = (x - r) M \in l\mathfrak{M}(P)$. Заметим, что $x_t M_t = x_0 M_0 + (x\bigcirc M + M\bigcirc x + x*M + M*x + [x, M]^1 + [x, M]^2 - [x, M])_t$, причем $x_0 M_0 + (x\bigcirc M + M\bigcirc x + M*x + x*M) \in \mathfrak{M}^1(P)$. Следовательно, $z \in l\mathfrak{M}(P)$ тогда и только тогда, когда $(m^1 + m^2 + b) M - [x, M]^1 - [x, M]^2 + [x, M] \in l\mathfrak{M}(P)$. Аналогично [6] нетрудно показать, что $[x, M]^i - [x, M] \in M_j^1$, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$, значит, $z \in l\mathfrak{M}(P)$ тогда и только тогда, когда $q^i = (m^1 + m^2 + b) M - [x, M]^i \in l\mathfrak{M}_i^1$. Пусть, например, $i = 1$, координата $t_2 > 0$ фиксирована. Применим к q_t^1 формулу Ито для семимартингалов:

$$q_t^1 = \int_0^{t_1} (m_{s_1 - t_2}^1 + m_{s_1 - t_2}^2 + b_{s_1 - t_2}) d_1 M_{s_1 t_2} + \int_0^{t_1} M_{s_1 - t_2} d_1 m_{s_1 t_2}^1 +$$

$$+ \int_0^{t_1} M_{s_1 - t_2} d_1 (m_{s_1 t_2}^2 + b_{s_1 t_2}) + [m^1 - x, M]_t^1 + [m^2 + b, M]_t^1.$$

Поскольку $[m_1 - x, M]^1 - \langle m^1 - x, M\rangle^1 \in l\mathfrak{M}^1, [m^2 + b, M]^1 \in l\mathfrak{M}^1$, то q_t^1 — локальный мартингал тогда и только тогда, когда

$$u_t^1 = \langle m^1 - x, M\rangle^1 + \int_0^{t_1} M_{s_1 - t_2} d_1 (m^2 + b)_{s_1 t_2} \in l\mathfrak{M}^1.$$

Так как это предсказуемый процесс ограниченной вариации по t_1, то $u_t^1 = 0$. Таким образом, имеет место система (1). Покажем, что эта система имеет единственное решение. Прежде всего заметим, что $\langle b, M\rangle_t^1 = 0$. Поэтому, обозначив $m_t^i + b_t = \eta_t^i$, приведем (1) к виду

$$\eta_t^i = \int_0^{t_j} M_{s_j - t_i}^{-1} d_j \langle x - \eta^j, M\rangle_{s_j t_i}^j. \tag{2}$$

Рассмотрим поле $\tilde{N}_t = \ln M_t$. Применяя к $M_t = \exp \tilde{N}_t$ формулу Ито для однопараметрических семимартингалов, систему (2) приведем к виду

$$\eta_t^i = \langle x - \eta^j, N^j \rangle_t^j, \tag{3}$$

где $N_t^1 = \tilde{N}_t + \sum_{s_1 \leqslant t_1} (\exp(\Delta_{s_1 t_2}^1 \tilde{N}) - 1 - \Delta_{s_1 t_2}^1 \tilde{N}), N_t^2$ определяется аналогично.

Систему (3) будем рассматривать на произвольном, но фиксированном прямоугольнике $[0, T] = \hat{T}$. Дальнейшее доказательство разобьем на ряд этапов.

1. Пусть решение системы существует и единственно при условии $\sup |\Delta_s^1 \langle N^1 \rangle^1| \leqslant \alpha$. Тогда решение существует и единственно на $\hat{T}$. В самом деле, пусть

$$\tau_1 = \inf \{ s_1 : \sup_{s_2 \leqslant T_2} |\Delta_s^1 \langle N^1 \rangle^1 | > \alpha \} \wedge T_1,$$

$$\tau_2 = \inf \{ s_1 > \tau_1 : \sup_{s_2 \leqslant T_2} |\Delta_s^1 \langle N^1 \rangle^1 | > \alpha \} \wedge T_1$$

и т. д. Пусть также $\bar{z}_t = z_t I \{ t_1 < \tau_1 \} + z_{\tau_1 -, t_2} I \{ t_1 \geqslant \tau_1 \}$, $z = \eta^i, N^i, x, i = 1, 2$. Поля η^1 и η^2 являются решением системы (3) на $[0, \tau_1) \times [0, T_2]$ тогда и только тогда, когда поля $\bar{\eta}_t^1$ и $\bar{\eta}_t^2$ образуют решение системы $\bar{\eta}_t^i = \langle x - \bar{\eta}^j, N^j \rangle_t^j$ на $\hat{T}$. Но решение этой системы существует и единственно, по предположению. Положим теперь $\Delta_{\tau_1 t_2}^1 \eta^2 = \lambda (\tau_1 -, t_2, \eta^1) \Delta_{\tau t_2}^1 \langle N^1 \rangle^1$, где $\lambda (t, \eta^1) = \dfrac{d \langle x - \eta^1, N^1 \rangle^1}{d \langle N^1 \rangle^1}$ — производная Радона — Никодима, $\Delta_{\tau_1 t_2}^1 \eta^1 = \langle x_{\tau_1 -,} - \eta_{\tau_1 -,}^2, \Delta^1 N^2 \rangle^2 \cdot t_2$. Мы получим единственное решение на $[0, \tau_1] \times [0, T_2]$. Аналогично доказывается существование и единственность решения на $[\tau_1, \tau_2] \times [0, T_2]$ и т. д.

2. Пусть решение системы (3) существует и единственно при условии $\langle N^i \rangle_t^i \leqslant \alpha$, $i = 1, 2$. Тогда решение этой системы существует и единственно без указанного условия.

3. Обозначим $\alpha^1 = \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{j=1}^n \langle \Delta_{jn}^1 N^2 \rangle^2$, $\alpha^2 = \lim_{|\lambda| \to 0} \sum_{k=1}^r \langle \Delta_{nk}^2 N^1 \rangle^1$. Пусть решение системы (3) существует и единственно при условии $\alpha^i \leqslant \alpha$, $i = 1, 2$. Тогда решение этой системы существует и единственно без указанного условия. Доказательство утверждений 2 и 3 аналогично доказательству утверждения 1.

4. Пусть теперь $\langle N^i \rangle_t^i \leqslant \alpha < 1/2$, $\alpha^i \leqslant \alpha < 1/2$, $i = 1, 2$, $t \in \hat{T}$. Применим к системе (3) метод последовательных приближений. Положим $\eta_t^{1,0} = \eta_t^{2,0} = 0$,

$$\begin{gathered} \eta_t^{1,m} = \langle x, N^2 \rangle_t^2 - \langle \eta^{2, m-1}, N^2 \rangle_t^2, \\ \eta_t^{2,m} = \langle x, N^1 \rangle_t^1 - \langle \eta^{1,m}, N^1 \rangle_t^1, \; m \geqslant 1. \end{gathered} \tag{4}$$

Заметим, что

$$A_1 = E \sup_{s \in \hat{T}} (\langle x, N^2 \rangle_s^2)^2 \leqslant E \sup_{s_1 \in \hat{T}_1} \langle x \rangle_s^2 \langle N^2 \rangle_s^2 \leqslant \alpha E \sup_{s_1 \leqslant T_1} \langle x \rangle_{s_1 T_2}^2 =$$

$$= \alpha E \sup_{s_1 \leqslant T_1} (\pi^2 [x]_{s_1 T_2}^2) \leqslant \alpha E \pi^2 (\sup_{s_1 \leqslant T_1} [x]_{s_1 T_2}^2) = \alpha E \sup_{s_1 \leqslant T_1} [x]_{s_1 T_2}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha C (E ([x]_T^2)^{1 + \delta/2})^{2/2+\delta} \leqslant \alpha C (E |x_T|^{2+\delta})^{2/2+\delta} < \infty$$

(последние неравенства имеют место в силу субмартингального свойства $[x]_{s_1 T_2}^2$ как процесса по s_1, а также неравенства Буркхолдера — Ганди.

Аналогично, $A_2 = E \sup_{s \in \hat{T}} (\langle x, N^1 \rangle_s^1)^2 < \infty$, $A_3 = \underline{\lim}_{|\lambda_2| \to 0} E \sum_{k=1}^n [\Delta_{nk}^2 \langle x, N^2 \rangle^2]^1 < \infty$,

$A_4 = \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} E \sum_{j=1}^{n} [\Delta_{jn}^1 \langle x, N^1\rangle^1]^2 < \infty$. Приведем теперь следующие оценки:

$$\beta_{m,1} = \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} E \sum_{k=1}^{n} \langle \Delta_{nk}^2 \eta^{1,m}\rangle^1 = \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} E \sum_{k=1}^{n} [\Delta_{nk}^2 \eta^{1,m}]^1 = \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} E \sum_{k=1}^{n} [\Delta_{nk}^2 \langle x, N^2\rangle^2 -$$

$$- \Delta_{nk}^2 \langle \eta^{2,m-1}, N^2\rangle^2]^1 \leqslant 2A_3 + 2 \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} E \sum_{k=1}^{n} [\Delta_{nk}^2 \langle \eta^{2,m-1}, N^2\rangle^2]^1 \leqslant$$

$$\leqslant 2A_3 + 2 \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} E \sum_{j,k=1}^{n} (\square_{jk} \langle \eta^{2,m-1}, N^2\rangle^2)^2 =$$

$$= 2A_3 + 2 \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} E \sum_{j,k=1}^{n} (\Delta_{jk}^2 \langle \Delta_{jk}^1 \eta^{2,m-1}, N^2\rangle^2 +$$

$$+ \Delta_{jk}^2 \langle \eta^{2,m-1}, \Delta_{jk}^1 N^2\rangle^2)^2 \leqslant 2A_3 + 4 \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} \Big(E \sum_{j,k=0}^{n} (\Delta_{jk}^2 \langle \Delta_{jk}^1 \eta^{2,m-1}, N^2\rangle^2)^2 +$$

$$+ E \sum_{j,k=1}^{n} (\Delta_{jk}^2 \langle \eta^{2,m-1}, \Delta_{jk}^1 N^2\rangle^2)^2 \Big) \leqslant 2A_3 +$$

$$+ 4 \varlimsup_{|\lambda_2|\to 0} \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} \Big(E \sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{jk}^2 \langle \Delta_{jk}^1 \eta^{2,m-1}\rangle^2 \Delta_{jk}^2 \langle N^2\rangle^2 + E \sum_{j,k=1}^{n} \Delta_{jk}^2 \langle \eta^{2,m-1}\rangle^2 \times$$

$$\times \Delta_{jk}^2 \langle \Delta_{jk}^1 N^2\rangle^2 \Big) \leqslant 2A_3 + 4\alpha \varlimsup_{|\lambda_1|\to 0} \Big(E \sum_{j=1}^{n} \langle \Delta_{jn}^1 \eta^{2,m-1}\rangle^2 +$$

$$+ E \sup_{s_1 \leqslant T_1} \langle \eta^{2,m-1}\rangle_{s_1 T_2}^2 \Big) = 2A_3 + 4\alpha\beta_{m-1,2} + 4\alpha\gamma_{m-1,2}, \tag{5}$$

где $\gamma_{m,i} = E \sup_{s_j \leqslant T_j} \langle \eta^{i,m}\rangle_{s_j T_i}^i$, $(i, j) = (1, 2), (2, 1)$.

С помощью аналогичных оценок получим

$$\begin{aligned} \beta_{m,2} &\leqslant 2A_4 + 4\alpha\beta_{m-1,1} + 4\alpha\gamma_{m-1,1}, \\ \gamma_{m,1} &\leqslant 2A_3 + 4\alpha\beta_{m-1,2} + 4\alpha\gamma_{m-1,2}, \\ \gamma_{m,2} &\leqslant 2A_4 + 4\alpha\beta_{m-1,1} + 4\alpha\gamma_{m-1,1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} E \sup_{s\in\hat{T}} (\eta_s^{1,m})^2 &\leqslant 2A_1 + 2E \sup_{s\in\hat{T}} (\langle \eta^{2,m-1}, N^2\rangle_s^2)^2 \leqslant \\ &\leqslant 2A_1 + 2E \sup_{s\in\hat{T}} \langle \eta^{2,m-1}\rangle_s^2 \langle N^2\rangle_s^2 \leqslant 2A_1 + 2\alpha\gamma_{m-1,2}, \\ E \sup_{s\in\hat{T}} (\eta_s^{2,m}) &\leqslant 2A_2 + 2\alpha\gamma_{m-1,2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку $\gamma_{0,i} < \infty$, $\beta_{0,i} < \infty$, $i = 1, 2$, то из оценок (5), (6) следует $\gamma_{m,i} < \infty$, $\beta_{m,i} < \infty$ для всех m и, кроме того, из (7) следует $E \sup_{s\in\hat{T}} (\eta_s^{m,i})^2 < \infty$, $i = 1, 2$. Положим $u_t^{i,m} = \eta_t^{i,m} - \eta_t^{i,m-1}$, $m \geqslant 1$. Тогда $u_t^{1,m} = -\langle u^{2,m-1}, N^2\rangle_t^2$, $u_t^{2,m} = -\langle u^{1,m}, N^1\rangle_t^1$. С помощью оценок, аналогичных (5) — (7), получим $\delta_{m,i} \leqslant 2\alpha\delta_{m-1,j} + 2\alpha\varepsilon_{m-1,j}$, $\varepsilon_{m,i} \leqslant 2\alpha\delta_{m-1,j} + 2\alpha\varepsilon_{m-1,j}$, $m \geqslant 2$, где

$$\delta_{m,i} = E \sup_{s_j \leqslant T_j} \langle u^{i,m}\rangle_{s_j T_i}^i, \qquad \varepsilon_{m,i} = \varlimsup_{|\lambda_j|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \langle \Delta_{nk}^k u^{i,m}\rangle^i.$$

Кроме того, $E\sup_{s\in\hat{T}}(u_s^{i,m})^2 \leqslant 2\alpha\delta_{m-1,j}$. Применяя эти оценки последовательно, получаем $E\sup_{s\in\hat{T}}(u_s^{i,m})^2 \leqslant (2\alpha)^m(\delta_{1,1}+\varepsilon_{1,1}+\delta_{1,2}+\varepsilon_{1,2}) < \infty$. Таким образом, $\sum_{m=1}^{\infty}\sup_{s\in\hat{T}}|u_s^{i,m}| < \infty$ п. н., $\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_{m,i} < \infty$, $\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{m,i} < \infty$. Полученные неравенства означают, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty}(\eta_t^{i,m}-\eta_t^{i,m-1})$ сходится равномерно на $\hat{T}$, его сумма η_t^i удовлетворяет соотношениям $\sup_{s\in\hat{T}}(|\eta_s^i-\eta_s^{i,m}|+\langle\eta^i - \eta^{i,m}\rangle_s^i) \to 0$ п. н. и, значит, в системе (4) возможен предельный переход при $m\to\infty$. Единственность решения системы (3) доказывается с помощью аналогичных оценок.

Заметим, что решение системы (3) действительно можно представить в виде $\eta_t^i = m_t^i + b_t$, где $m^i \in l\mathfrak{M}_i \cap B_j$, $b\in B$. Для этого достаточно положить

$$b = M^{-2}\circ(\langle M^{c1}\rangle^1 * \eta^1 + \eta^2 * \langle M^{c2}\rangle^2 + M^{-1}\circ(\pi_{M^1}*\eta^1 + \eta^2 * \pi_{M^2}) +$$
$$+ \pi(M^{-1}\circ[x, M] - M^{-2}\circ[x, M^{c1}*M + M*M^{c2}] - M^{-2}\circ[M, (x-\eta^1)*M^{c2} +$$
$$+ M^{c1}*(x-\eta^2)] + (M^{d2})^{-1}*\langle x-\eta^1, M\rangle^1 + (M^{d1})^{-1}*\langle x-\eta^2, M\rangle^2 +$$
$$+ M^{-1}\circ(((\langle x-\eta^1, M\rangle^1)^{d2} + (\langle x-\eta^2, M\rangle^2)^{d1}),$$

где π_{M^1} и π_{M^2} — непрерывные компенсаторы чисто скачкообразной части мартингалов $M_{t_1\cdot}$ и $M_{\cdot t_2}$, π — оператор дуальной предсказуемой проекции, $\pi = (\pi^1)^2 = (\pi^2)^1$ ([7]), x^{ci} и x^{di} означают, что рассматриваются непрерывная и чисто скачкообразная компоненты соответствующего поля при фиксированной координате t_j. (Все поля под знаком π, как нетрудно заметить, имеют ограниченную вариацию.)

Теорема 2. 1). *Пусть $x\in\mathfrak{M}^2(P)$. Тогда $x - M^{-1}\circ[x, M]$ — слабый Q-мартингал.*

2). *Пусть $x\in\mathfrak{M}_w^2(P)$. Тогда $(x-q)$ — слабый Q-мартингал, где* $q_t = \int_0^{t_1} M_{s_1-t_2}^{-1} d_1\langle x, M\rangle_{s_1 t_2}^1 + \int_0^{t_2} M_{t_1 s_2-}^{-1} d_2\langle x, M\rangle_{t_1 s_2}^2 - (M^{-1}\circ[x, M])_t$.

Теорема 2 доказывается с учетом леммы непосредственными вычислениями.

Рассмотрим теперь случай, когда условие Каироли и Уолша ($F4$) выполняется по мере Q. Для этого, в частности, достаточно, чтобы поле M_t удовлетворяло уравнению типа уравнения Долеан

$$M_t = (M\circ(m + m*m))_t, \tag{8}$$

где m_t — сильный мартингал, $m\in M_s^2$.

Теорема 3. *Пусть $x\in\mathfrak{M}_s^2(P)$, поле M_t удовлетворяет уравнению (8) и $Er_t^2 < \infty$, где $r_t = \int_{[0,t]} M_s^{-1} d[x, M]_s$.*

Тогда поле $y = x - r \in M_s^2(Q)$.

Доказательство. Согласно лемме достаточно проверить, что $E(y]s,t]M_t/\gamma_{s,t}) = 0, s\leqslant t, \gamma_{s,t} = \mathfrak{F}_{s_1t_2}\vee\mathfrak{F}_{t_1s_2}$. Но, очевидно, поле $M_{(s)}^t = M_t M_s(M_{s_1t_2}M_{t_1s_2})^{-1}$ удовлетворяет уравнению $M_{(s)}^t = (M_{(s)}\circ(m_{(s)} + m_{(s)} * m_{(s)}))_t$, где $m_{(s)}^u = m]s, u]$.

Интегрируя указанное уравнение по частям, имеем $M_{(s)}^t y]s, t] = M_{(s)}^t x_{(s)}^t - M_{(s)}^t \int_{[s,t]} M_u^{-1} d[x, M]_u = (M_{(s)}\circ x_{(s)} + x_{(s)}\circ M_{(s)} + M_{(s)} * x_{(s)} + x_{(s)} *$

$*M_{(s)} + [x_{(s)}, M_{(s)}]^1 + [x_{(s)}, M_{(s)}]^2 - [x_{(s)}, M_{(s)}] - r_{(s)} \circ M_{(s)} - [x_{(s)}, M_{(s)}] - r_{(s)} * * M_{(s)} - M_{(s)} * r_{(s)} - (1 -] M_{(s)}] \circ r_{(s)}) - (2 -] M_{(s)}] \circ r_{(s)}))_t$. Заметим теперь, что в силу уравнения (9) и сильного мартингального свойства x_t $E((M_{(s)} \circ \circ x_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((x_{(s)} \circ M_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((M_{(s)} * x_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((x_{(x)} * M_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = = E((r_{(s)} \circ M_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((r_{(s)} * M_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((M_{(s)} * r_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((1 -] M_{(s)}] \circ \circ r_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = E((2 \text{-}] M_{(s)}] \circ r_{(s)})_t / \gamma_{s,t}) = 0$. Кроме того, $[x_{(s)}, M_{(s)}]_t^i - [x_{(s)}, M_{(s)}]_t = (i \text{-}] M_{(s)}] \circ x_{(s)})_t + (i \text{-}] x_{(s)}] \circ M_{(s)})_t$, $i = 1, 2$, откуда $E([x_{(s)}, M_{(s)}]_t^i - [x_{(s)}, M_{(s)}]_t / \gamma_{s,t}) = 0$. Из полученных равенств вытекает доказательство.

Непосредственным следствием теоремы 3 является обобщение теоремы Гирсанова для винеровских случайных полей, полученное в работе [1].

1. *Hajek B., Wong E.* Representation and transformation of two-parameter martingales under a change of measure // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1980.— **54**, N 3.— P. 313—330.
2. *Мишура Ю. С.* О замене меры для двупараметрических процессов // Теория вероятностей и ее применения.— 1985.— **30**, вып. 3.— С. 612—613.
3. *Cairoli R., Walsh J. B.* Stochastic integrals in the plane // Acta Math.— 1975.— **134**, N 1-2.— P. 111—183.
4. *Гущин А. А.* К общей теории случайных полей на плоскости // Успехи мат. наук. — 1982.— **37**, вып. 6.— С. 53—74.
5. *Bakry D.* Limites «quadrantales» des martingales // Lect. Notes Math.— 1981.— **863**.— P. 40—49.
6. *Nualart D.* On the quadratic variation of two-parameter continuous martingales.— Barselona, 1982.— 26 p.— (Preprint / Univ. de Barselona, N 12).
7. *Merzbach E.* Predictable and dual predictable projections of two-parameter processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.— 1980.— **53**, N 3.— P. 263—269.

Киев. ун-т

Получено 11.11.86