УДК 519.21

**Г. А. Сохадзе,** д-р физ.-мат. наук. (Кутаис. техн. ун-т)

# ФОРМУЛЫ ФИЛЬТРАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Explicit filtration formulas are obtained for the solutions of nonlinear equations with a random right-hand side. In the case of a Gaussian random process, a formulas are simplified.

Одержані явні формули фільтрації розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь з випадковою правою частиною. Формули спрощуються, якщо випадковий процес є гауссівським.

Получение явных формул для решения задач фильтрации является актуальной задачей статистики случайных процессов (полей). В данной работе такая задача решается для группы случайных полей, являющихся решениями нелинейных дифференциальных систем со случайной правой частью. При этом случайный шум в уравнениях является достаточно общим. Возможность такого подхода обусловлена идеями и исследованиями Ю. Л. Далецкого, общение с которым содействовало появлению этой работы.

**1.** Задачи фильтрации [1] решаем, опираясь на лемму Ю. Л. Далецкого и А. Д. Шаташвили [2] и на результаты автора [3, 4].

Пусть $G$ — ограниченная открытая область в $R^n$ класса $A^{(1)}$ (по терминологии [5]) и $W_2^{2p}(G) \subset W_2^p(G) \subset \mathfrak{L}_2(G)$ — тройка соболевских пространств [6]; $\xi_i = \xi_i(x)$, $x \in G$, $i = 1, 2$, — случайные поля, с вероятностью 1 принадлежащие $\mathfrak{L}_2(G)$ и имеющие распределения $\mu_1$ и $\mu_2$ соответственно. Предположим, что $\mu_i$, $i = 1, 2$, имеют в $\mathfrak{L}_2(G)$ логарифмические производные вдоль $W_2^{2p}$ вида $\lambda_i(\cdot)\colon \mathfrak{L}_2(G) \to \mathfrak{L}_2(G)$. Рассмотрим общее дифференциальное выражение

$$L_i u = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha^i(x) D^\alpha u, \quad i = 1, 2,$$

для которого и для формально сопряженного выражения выполнены энергетические неравенства

$$\| L_i u \|_{\mathfrak{L}_2(G)} \ge C_i \| u \|_{\mathfrak{L}_2(G)}, \quad \| L' v \|_{\mathfrak{L}_2(G)} \ge C_i \| v \|_{\mathfrak{L}_2(G)}, \tag{1}$$

где $C_i > 0$, $u, v \in C_0^\infty(G)$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$(L_1 \eta_1)(x) + g_1(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) = \xi_1(x), \tag{2}$$

$$(L_2 \eta_2)(x) + g_2(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) = \xi_2(x), \quad \eta_i \in \overline{W}_2^\alpha(\partial G). \tag{3}$$

Здесь пространство $\overline{W}_2^\alpha(\partial G)$, содержащее $\overset{\circ}{W}_2^\alpha(\partial G)$ и содержащееся в $W_2^\alpha(G)$ как подпространство функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям (подробнее см. в [6]). Теперь объясним, как понимаются равенства (2) и (3). Как известно [6], при выполнении (1) существует разрешимое расширение $L$, имеющее непрерывное обратное, определенное во всем $\mathfrak{L}_2(G)$. Разрешимое расширение $L$ будем записывать через $L$. Под решением системы (2), (3) будем понимать решение системы

$$\eta_1(x) + L_1^{-1} g_1(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) = L_1^{-1} \xi_1(x),$$

$$\eta_2(x) + L_2^{-1} g_2(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) = L_2^{-1} \xi_2(x).$$

Пусть первая компонента $\eta_1(x)$ решения системы (2), (3) $(\eta_1(x), \eta_2(x))$ наблюдается в области $G$, а вторая компонента $\eta_2(x)$ не наблюдается. Найдем оптимальный среднеквадратический фильтр функционала $\Phi(\cdot, \cdot)$ от решения системы (2), (3).

Для решения этой задачи наряду с системой (2), (3) рассмотрим линейную систему

$$(L_1\zeta_1)(x) = \xi_1(x), \tag{4}$$

$$(L_2\zeta_2)(x) = \xi_2(x), \quad \zeta_i \in \overline{W}_2^{\alpha}(\partial G). \tag{5}$$

Запишем системы (2), (3) и (4), (5) в векторном виде

$$(L\eta)(x) + F(x, \eta(x)) = \xi(x), \quad \eta \in (\overline{W}_2^{\alpha}(\partial G))^2, \tag{6}$$

и $(L\zeta)(x) = \xi(x), \quad \zeta \in (\overline{W}_2^{\alpha}(\partial G))^2$, где

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_1(x) \\ \eta_2(x) \end{pmatrix}, \quad \zeta(x) = \begin{pmatrix} \zeta_1(x) \\ \zeta_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\left(\overline{W}_2^{\alpha}(\partial G)\right)^2 = \overline{W}_2^{\alpha}(\partial G) \otimes \overline{W}_2^{\alpha}(\partial G), \quad L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix},$$

$$F(x, \eta(x)) = \begin{pmatrix} g_1(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) \\ g_2(x, \eta_1(x), \eta_2(x)) \end{pmatrix}, \quad \xi(x) = \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \end{pmatrix}.$$

Применяя результаты работ [1] и [3], получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть $G$ — открытая ограниченная область класса $A^{(1)}$ с границей $\partial G$. Пусть в $G$ рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений (2), (3) с общими краевыми условиями, для которых выполняются условия:*

1) *для коэффициентов дифференциальных операторов $L_1$ и $L_2$ выполнены требования:* $a_{\alpha}^{i}(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \partial G)$, $i = 1, 2$;

2) *для любых $u, v \in C_0^{\infty}(G)$ выполнены энергетические неравенства* (1);

3) *для случайных полей $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$ справедливо неравенство*

$$\int_G E\xi_i^2(x)dx < \infty, \quad i = 1, 2,$$

*и для любого гладкого функционала $\varphi \in C^1(\mathfrak{L}_2(G))$ выполнены равенства*

$$E(\varphi'(\xi_i), h)_{W_2^p(G)} = E\varphi(\xi_i)(\lambda_i(\xi_i), h)_{W_2^p(G)}, \quad i = 1, 2,$$

*где $\lambda_i \colon \mathfrak{L}_2(G) \to \mathfrak{L}_2(G)$, а $h \in W_2^{2p}(G)$;*

4) *функции $g_i(x, u_1, u_2)$, $i = 1, 2$, определены на $G \times (\mathfrak{L}_2(G))^2$ и имеют обобщенные в смысле Соболева производные порядка $p$ по каждой из переменных $u_1$ и $u_2$ и, кроме того, оператор $S = \partial F / \partial u$ удовлетворяет соотношению $\| S \| < \beta$, где $\beta = \| L^{-1} \|^{-1}$.*

*Тогда оптимальный нелинейный фильтр функционала $\Phi(\cdot, \cdot)$ от решения системы (2), (3) по наблюдениям за первой компонентой $\eta_1(x)$ определяется формулой*

$$\Phi^*(\eta_1(x), \eta_2(x)) = \Big\{ E\Phi(z_1(x), \zeta_2(x)) \,\widetilde{\det}\, \big( I +$$

$$+ \; L^{-1}F'_{\zeta}(x,\overline{\zeta})\Big) \exp \int_0^1 \beta_{\mu_\xi}^{W_2^p}\Big(t, F\Big(x, L^{-1}\overline{\zeta}\Big), L\overline{\zeta}\Big)\,dt \,/\, \Sigma_0^1 \Big\}\Big\{ E\,\widetilde{\det}\,\Big(I \; +$$

$$+ \; L^{-1}F'_{\zeta}(x,\overline{\zeta})\Big) \exp \int_0^1 \beta_{\mu_\zeta}^{W_2^p}\Big(t, F\Big(x, L^{-1}\overline{\zeta}\Big), L\overline{\zeta}\Big)\,dt \,/\, \Sigma_0^1 \Big\}^{-1}\Bigg|_{z_1(x)=\zeta_1(x)},$$

*где* $\Sigma_\theta^1$ *обозначает* $\sigma$*-алгебру, порожденным случайным элементом* $\zeta_1(x)$, $x \in G$, *а* $\overline{\zeta}(x) = (z_1(x), \; \zeta_2(x))$. *Если же дополнительно известно, что для любых* $u_i \in \mathfrak{L}_2(G)$, $i = 1, 2$, *функции* $g_i(x, u_1, u_2)$, $i = 1, 2$, $2p$*-раз дифференцируемы в обобщенном смысле Соболева, то*

$$\Phi^*(\eta_1(x), \eta_2(x)) = \Big\{ E\Phi(z_1(x), \zeta_2(x)) \det \Big(I \; +$$

$$+ \; L^{-1}F'_{\zeta}(\overline{\zeta})\Big) \exp\Big\{ \int_0^1 \int_G \lambda_1 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(1)}(x) D^\alpha z_1(x) \; +$$

$$+ \; t g_1(x_1, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^1 \int_G \lambda_2 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(2)}(x) D^\alpha \zeta_2(x) + t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \; +$$

$$+ \; (-1)^p \int_0^1 \int_G \lambda_1 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(1)}(x) D^\alpha z_1(x) \; +$$

$$+ \; t g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) \sum_{|\lambda| = p} D^{2\alpha} g_1(x z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \; +$$

$$+ \; (-1)^p \int_0^1 \int_G \lambda_2 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(2)}(x) D^\alpha \zeta_2(x) \; +$$

$$+ \; t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) \sum_{|\alpha| = p} D^{2\alpha} g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \Big\} \,/\, \Sigma_0^1 \Big\}\Big\{ E\det\Big(I \; +$$

$$+ \; L^{-1}F'_{\zeta}(\overline{\zeta})\Big) \exp\Big\{ \int_0^1 \int_G \lambda_1 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(1)}(x) D^\alpha z_1(x) \; +$$

$$+ \; t g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \; +$$

$$+ \int_0^1 \int_G \lambda_2 \Big( \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(2)}(x) D^\alpha \zeta_2(x) \; +$$

$$+ \; t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Big) g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dx\,dt \; +$$

$$+ \; (-1)^p \int_0^1 \int_G \lambda_1 \sum_{|\alpha| \le p} \Big( a_\alpha^{(1)}(x) D^\alpha z_1(x) \; +$$

$$+ \; t g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Bigg) \sum_{|\alpha|=p} D^{2\alpha} g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \, dx \, dt \; +$$

$$+ \; (-1)^p \int_0^1 \int_G \lambda_2 \sum_{|\alpha| \le p} \Bigg( a_\alpha^{(2)}(x) D^\alpha \zeta_2(x) \; +$$

$$+ \; t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \Bigg) \sum_{|\alpha|=p} D^{2\alpha} g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x)) \, dx \, dt \Bigg\} \Big/ \Sigma_0^1 \Bigg\}^{-1} \Bigg|_{z_1(x)=\zeta_1(x)},$$

*где* $\overline{\zeta}(x) = (z_1(x), \zeta_2(x))$.

**2.** Рассмотрим модели с обобщенной правой частью. Пусть

$$W_2^p(G) \subset \mathfrak{L}_2(G) \subset W_2^{-p}(G) \tag{7}$$

— оснащенное гильбертово пространство. Здесь $G$ — ограниченная открытая область класса $A^{(1)}$ с границей $\partial G$. Так же, как и выше, предположим, что коэффициенты дифференциальных выражений

$$L_i u = \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(i)}(x) D^\alpha u, \quad i = 1, 2,$$

являются достаточно гладкими:

$$a_\alpha^{(i)}(x) \in C^{|\alpha|}(G \cup \partial G), \quad i = 1, 2. \tag{8}$$

Рассмотрим краевую задачу для системы

$$\begin{gathered} \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(1)}(x) D^\alpha u_1 + g_1(x, u_1(x), u_2(x)) = \xi_1(x), \\ \sum_{|\alpha| \le p} a_\alpha^{(2)}(x) D^\alpha u_2 + g_2(x, u_1(x), u_2(x)) = \xi_2(x), \end{gathered} \tag{9}$$

$$u_i \in \overline{W}_2^p(\partial G), \quad i = 1, 2.$$

Пусть выполнены следующие условия.

1) Для дифференциальных выражений $L_i$, $i = 1, 2$, при $u \in \overline{W}_2^p(\partial G)$ справедливы энергетические неравенства

$$\| L_i u \|_{\mathfrak{L}_2(G)} \ge C \| u \|_{\mathfrak{L}_2(G)}, \quad \| L_i' v \|_{\mathfrak{L}_2(G)} \ge C \| v \|_{\mathfrak{L}_2(G)}, \quad i = 1, 2,$$

$C > 0$ при $u, v \in C_0^\infty(G)$, и минимальный и максимальный операторы $\Lambda$ и $\overline{\Lambda}$ имеют обратные являющиеся операторами Гильберта – Шмидта в $\mathfrak{L}_2(G)$;

2) Функции $g_i(x, u_1, u_2)$, $i = 1, 2$, определены на $G \times (\mathfrak{L}_2(G))^2$ и для любых $u_1$ и $u_2$ имеют обобщенные в смысле Соболева производные $p$-порядка по $x$. Пусть, кроме того, оператор

$$F(u) = F(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \partial g_1 / \partial u_1 & \partial g_1 / \partial u_2 \\ \partial g_2 / \partial u_1 & \partial g_2 / \partial u_2 \end{pmatrix}$$

оставляет инвариантным пространство $\left(W_2^p(G)\right)^2$;

3) Пусть $\xi_i = \xi_i(x)$ — случайные элементы в $W_2^{-p}(G)$, удовлетворяющие для любой гладкой функции $\Phi \in C^1\left(W_2^{-p}(G)\right)$ равенству

$$E\int_G (\Phi'(\xi_i))(x)h(x)\,dx = E\Phi(\xi_i)\int_G [\lambda_i(\xi_i)](x)h(x)\,dx,$$

где $\lambda : W_2^{-p}(G) \to W_2^{-p}(G)$, а $h = h(x) \in W_2^p(G)$. Пусть первая компонента $u_1(x)$ наблюдается в области $G$, а вторая $u_2(x)$ не наблюдается. Требуется найти оптимальный в среднеквадратическом смысле фильтр функционала $\Phi(\cdot,\cdot)$ от решения системы (8), (9). Для этого наряду с указанной системой рассмотрим линейную систему

$$\sum_{|\alpha|\le p} a_\alpha^{(1)}(x)D^\alpha v_1 = \xi_1(x), \quad \sum_{|\alpha|\le p} a_\alpha^{(2)}(x)D^\alpha v_2 = \xi_2(x).$$

Пусть, далее, $\Sigma_1$ обозначает $\sigma$-алгебру, порожденную случайным полем $\zeta_1(x)$, $x \in G$, и $\overline{\zeta}(x) = (z_1(x), \zeta_2(x))$.

**Теорема 2.** *Пусть для общих краевых задач* (8), (9) *выполнены условия* 1) – 3), *перечисленные выше. Тогда оптимальные фильтры функционала* $\Phi(\cdot,\cdot)$ *определяются формулой*

$$\Phi^*(u_1(x), u_2(x)) = \Big\{ E\Phi(z_1(x), v_2(x))\det\big(I + L^{-1}F(\overline{\zeta})\big)\exp\int_G\int_0^1 \lambda_1\big(\tilde{L}_1 z_1(x) + t g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x))\big)\, g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dt\,dx +$$

$$+ \int_G\int_0^1 \lambda_2\big(\tilde{L}_2\zeta_2(x) + t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\big) g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dt\,dx / \Sigma_1 \Big\} +$$

$$+ \Big\{ E\det\big(I + L^{-1}F(\overline{\zeta})\big)\exp\int_G\int_0^1 \lambda_1\big(\tilde{L}_1 z_1(x) + t g_1(x, z_1(x), \overline{\zeta}_2(x))\big)\, g_1(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dt\,dx \int_G\int_0^1 \lambda_2\big(\tilde{L}_2\zeta_2(x) +$$

$$+ t g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\big)\, g_2(x, z_1(x), \zeta_2(x))\,dt\,dx / \Sigma_1 \Big\}^{-1} \Bigg|_{\substack{z_1(x) = u_1(x) \\ \zeta_2(x) = u_2^*(x)}},$$

*где* $u_2^*(x) = E\{u_2(x)/\Sigma_1\}$.

**Следствие 1.** *Пусть* $\xi(x)$ *является гауссовым „белым шумом". Тогда справедливо равенство*

$$\Phi^*(u_1(x), u_2(x)) = \Big\{ E\Phi\big(z_1(x), z_2(x) + u_2^0(x)\big)\det\big(I + L^{-1}F(\overline{\zeta})\big)\exp\Big\{ -\int_G g_1\big(x, z_1(x), z_2(x) + u_2^0(x)\big)\tilde{L}_1 z_1(x)\,dx -$$

$$- \int_G g_2\big(x, z_1(x), z_2(x) + u_2^0(x)\big)\tilde{L}_2\big(z_1(x) + u_2^0(x)\big)\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int_G g_1^2\left(x, z_1(x), z_2(x)+u_2^0(x)\right)dx-\frac{1}{2}\int_G \left(g_2^2 x, z_1(x), z_2(x)+\right.$$

$$\left.\left.+u_2^0(x)\right)dx\right\}\left\{E\det\left(I+L^{-1}F(\overline{\zeta})\right)\exp\left\{-\int_G g_1\left(x, z_1(x), z_2(x)+\right.\right.\right.$$

$$+u_2^0(x)\Big)\tilde{L}_1 z_1(x)dx-\int_G g_2\left(x, z_1(x), z_2(x)+u_2^0(x)\right)\tilde{L}_2\left(z_2(x)+u_2^0(x)\right)dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_G\left[g_1^2\left(x, z_1(x), z_2(x)+u_2^0(x)\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\;g_2^2\left(x, z_1(x), z_2(x)+u_2^0(x)\right)\right]dx\right\}^{-1}\Bigg|_{\substack{z_1(x)=u_1(x)\\ z_2(x)=u_2^*(x)}}$$

**3.** Рассмотрим эволюционные уравнения. Пусть дана тройка гильбертовых пространств $H_+\subset H\subset H_-$ с гильбертово-шмидтовским вложением. Построим тройку оснащенных гильбертовых пространств $\mathfrak{L}_2^+\subset\mathfrak{L}_2\subset\mathfrak{L}_2^-$, и в пространстве $H_-$ рассмотрим систему эволюционных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_1(t)}{dt}-A_1(t)y_1(t)+f_1(t, y_1(t), y_2(t))=\xi_1(t), \tag{10}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt}-A_2(t)y_2(t)+f_2(t, y_1(t), y_2(t))=\xi_2(t) \tag{11}$$

с начальными условиями

$$0\le t\le a,\quad y_i(0)=\xi_i(0)=0\ (\mathrm{mod}\,P),\quad i=1,2. \tag{12}$$

Пусть выполнены условия:

MI) $A_i(t)$, $i=1,2$, — линейные, может быть, непрерывные операторы с плотной не зависящей от $t$ областью определения $\mathcal{D}(A_i)\subset H_-$; кроме того, $A_i(t)$, $i=1,2$, являются производящими операторами эволюционных семейств $u_i(t,s)$, $i=1,2$, которые сильно непрерывны по совокупности переменных;

NI) функции $f_i(t,x,y)$, $i=1,2$, ограниченные и определенные на $[0,a]\times\times H_-$, свои значения принимают в $H_+$; существуют $\partial f_i/\partial x$ и $\partial f_i/\partial y$, $i=1,2$, и удовлетворяют неравенствам

$$\int_0^a\left\|\frac{\partial}{\partial x}f_i+\frac{\partial}{\partial y}f_i\right\|_{H_-}^2 d_i<\left(\int_0^a\|u(t,i)\|_{H_-}^2\,di\right)^{-1},\quad i=1,2;$$

PI) $\xi_i=\xi_i(t)$, $i=1,2$, — случайные процессы на $[0,a]$ со значениями в $H_-$, почти все траектории которых непрерывны; кроме того, существуют функции $\lambda_i(t,x)\colon[0,a]\times H_-\to H_-$ такие, что для каждого гладкого функционала $\varphi\in\in C^1\left(\mathfrak{L}_2^-\right)$ выполняется равенство

$$E\int_0^a([\varphi'(\xi_i)](t), h(t))_H\,dt=E\varphi(\xi)\int_0^a(\lambda_i(t,\xi_i(t)), h(t))_H\,dt,$$

$i = 1, 2$, где $h(t) \in [0, a] \to H_+$ являются любыми элементами из $\mathfrak{L}_2^+$.

Пусть первая компонента $y_1(t)$ решения системы (10) – (12) наблюдается в $[0, a]$ и требуется оценить значение функционала $\Phi(\cdot,\cdot)$ от решения всей системы. Для этого наряду с данной рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx_1(t)}{dt} - A_1(t)x_1(t) = \xi_1(t), \tag{13}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} - A_2(t)x_2(t) = \xi_2(t), \tag{14}$$

$$0 \le t \le a, \quad x_i(0) = \xi_i(0) = 0 \pmod P, \quad i = 1, 2. \tag{15}$$

Пусть $\Sigma^1$ обозначает $\sigma$-алгебру, порожденную случайным процессом $x_1(t)$, $t \in [0, a]$, и $\bar{x}(t) = (a(t), x_2(t))$.

**Теорема 3.** *Пусть для системы дифференциальных уравнений* (10), (11) *с начальным условием* (12) *выполнены условия* MI), NI) *и* PI). *Тогда формула оптимального фильтра функционала* $\Phi(\cdot,\cdot)$ *от решения системы по наблюдениям за первой компонентой* $y_1(t)$ *имеет вид*

$$\Phi^*(y_1(t), y_2(t)) = \left\{ E\Phi(a(t), \tilde{x}_2(t)) \exp\left[ \int_0^a\int_0^1 \left( \lambda_1\left( t, \frac{da(t)}{dt} - A_1(t)a(t) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau f_1(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right) f_1(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right)_H d\tau dt +$$

$$+ \int_0^a\int_0^1 \left( \lambda_2\left( t, \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} - A_2(t)\tilde{x}_2(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + \tau f_2(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right) \right)_H d\tau dt / \Sigma^1 \right]\right\} \left\{ E \exp\left[ \int_0^a\int_0^1 \left( \lambda_1\left( t, \frac{da(t)}{dt} - A_1(t)a(t) + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \tau f_1(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right) f_2(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right)_H d\tau dt + \int_0^a\int_0^1 \left( \lambda_2\left( t, \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} - A_2(t)\tilde{x}_2(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. + \tau f_2(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right) f_2(t, a(t), \tilde{x}_2(t)) \right)_H d\tau dt / \Sigma^1 \right]\right\}^{-1} \Bigg|_{\substack{a(t) = y_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) = x_2^*(t)}},$$

*где* $x_2^*(t) = E\{y_2(t)/\Sigma^1\}$.

**4.** Упростим теперь полученные формулы для случая, когда $\xi_i(t)$, $i = 1, 2$, являются гаусовскими процессами на $[0, a]$. Итак, пусть для уравнений (10), (11) с начальными условиями (12) выполнены условия:

MIG) $A_i(t)$ — линейные, может быть, непрерывные операторы, с плотной не зависящей от $t$ областью определения $\mathcal{D}(A_i) \subset H_-$; $A_i(t)$, $i = 1, 2$, являются производящими операторами эволюционных семейств $u_i(t, s)$, $i = 1, 2$, которые сильно непрерывно зависят от параметров $t, s \in [0, a]$. Тогда матрица

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{pmatrix}$$

будет производящим оператором-матрицей семейства

$$u(t,s) = \begin{pmatrix} u_1(t,s) & 0 \\ 0 & u_2(t,s) \end{pmatrix};$$

NIG) функции $f_i(t,x,s)$, $i=1,2$, определенные на $[0,a]\times H$, свои значения принимают в $H$. Они непрерывны по совокупности переменных, и существуют производные $\partial f_i/\partial x$, $\partial f_i/\partial y$, $i=1,2$, являющиеся операторами Гильберта – Шмидта в $H$;

PIG) $\xi_i(t)$, $i=1,2$, — гауссовские случайные процессы на $[0,a]$ со значениями в $H$, почти все траектории которых непрерывны и $E\xi_i(t)=0$, $i=1,2$; корреляционное матричное операторное ядро двумерного процесса $\xi(t) = (\xi_1(t),\xi_2(t))$ имеет вид

$$R(t,s) = \begin{pmatrix} R_{11}(t,s) & R_{12}(t,s) \\ R_{21}(t,s) & R_{22}(t,s) \end{pmatrix};$$

матрица

$$K(t,s) = \begin{pmatrix} K_{11}(t,s) & K_{12}(t,s) \\ K_{21}(t,s) & K_{22}(t,s) \end{pmatrix}$$

— решение интегрального уравнения

$$R(t,s) = \int_0^a K(t,\tau)K^*(s,\tau)\,d\tau.$$

Пусть на отрезке $[0,a]$ наблюдается первая компонента $y_1(t)$ решения системы (10) – (12). Требуется по этим наблюдениям оптимальным образом оценить значения некоторого функционала $\Phi(\cdot,\cdot)$ от решения системы.

Как обычно, кроме заданной системы рассмотрим линейную задачу (13), (14) с начальным условием (15).

Тогда меры $\mu_y$ и $\mu_x$ эквивалентны при выполнении условий MIG, NIG и PIG, если только имеет решение уравнение

$$f(t,y(t)) = \int_0^a K(t,s)\,g(s,y(\cdot))\,ds. \tag{16}$$

В этом случае

$$\frac{d\mu_s}{d\mu_x}(x(\cdot)) = \exp\left\{-\int_0^a \langle g(s,x(\cdot)), dw(s)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^a \|g(s,x(\cdot))\|^2_{H\times H}\,ds\right\},$$

где $w(s) = (w_1(s), w_2(s))$ определяются из систем

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int_0^a H_{11}(t,s)\,dw_1(t) + \int_0^a H_{12}(t,s)\,dw_2(s), \\ x_2(t) &= \int_0^a H_{21}(t,s)\,dw_1(t) + \int_0^a H_{22}(t,s)\,dw_2(1), \end{aligned} \tag{17}$$

а $H_{ij}(t,s)$ вычисляется по формуле

$$H_{ij}(t,s) = \int_0^a u_i^*(t,\tau)K_{ij}(\tau,s)\,d\tau, \quad i,j=1,2.$$

**Конечно, уравнение (16) эквивалентно следующей системе интегральных уравнений:**

$$f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = \int_0^a K_{11}(t,s)\, g_1(s, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\, ds +$$
$$+ \int_0^a K_{12}(t,s)\, g_2(s, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\, ds; \tag{18}$$
$$f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = \int_0^a K_{21}(t,s)\, g_1(s, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\, ds +$$
$$+ \int_0^a K_{22}(t,s)\, g_2(s, y_1(\cdot), y_2(\cdot))\, ds. \tag{19}$$

Обозначим через $\Sigma^1$ $\sigma$-алгебру, порожденную случайным процессом $x_1(t)$, и представим $x_2(t)$ в виде $x_2(t) = x_2^*(t) + x_2^0(t)$, где $x_2^*(t) = E\{x_2(t)/\Sigma^1\}$, а $x_2^0(t)$ не зависит от $\Sigma^1$. Тогда вектор $x(t)$ представим в виде $x(t) = x^*(t) + x^0(t)$, где

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix}, \quad x^0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0(t) \end{pmatrix}.$$

Определим оператор $\theta$ на векторах $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ таким образом: $\theta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1$. Тогда можно написать:

$$\Phi^*(y_1(t), y_2(t)) = E\Bigg\{\Phi\big(z_1(t), z_2(t) + x_2^0(t)\big) \exp\Bigg\{ -\int_0^a \Big\langle g_1\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) +$$
$$+ x_2^0(\cdot)\big), dw_1(t)\Big\rangle + \int_0^a \Big\langle g_2\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big), dw_2(t)\Big\rangle -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^a \Big\| g_1\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big)\Big\|_H^2 dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^a \Big\| g_2\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big)\Big\|_H^2 dt \Bigg\}\Bigg\{E\exp\Bigg\{-\int_0^a \Big\langle g_1\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big), dw_1(t)\Big\rangle -$$
$$- \int_0^a \Big\langle g_2\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big), dw_2(t)\Big\rangle - \frac{1}{2}\int_0^a \Big\| g_1\big(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)\big)\Big\|_H^2 dt -$$
$$- \frac{1}{2}\int_0^a \| g_2(t, z_1(\cdot), z_2(\cdot) + x_2^0(\cdot)) \|_{H_-}^2 dt\Bigg\}\Bigg]^{-1}\Bigg|_{\substack{z_1(\cdot)=y_1(\cdot) \\ z_2(\cdot)=x_2^*(\cdot)}}. \tag{20}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть в гильбертовом пространстве* $H_1 \times H_2$ *рассматривается система дифференциальных уравнений* (10), (11) *с начальным условием*

(12), *для которых выполнены условия* MIG, NIG *и* PIG. *Тогда если существует решение системы интегральных уравнений* (18), (19), *то оптимальный нелинейный фильтр второй ненаблюдаемой компоненты* $y_2$ *решения уравнения* (11) $(y_1, y_2)$ *по наблюдению первой компоненты* $y_1$ *определяется формулой* (20), *где* $g_1(t, x_1, x_2)$ *и* $g_2(t, x_1, x_2)$ — *решения системы* (18), (19), *а винеровские процессы* $w_1(t)$ *и* $w_2(t)$ *определяются из уравнений* (17).

**5.** Рассмотрим случай, когда правая часть является обобщенным „белым шумом", хотя эти результаты можно несколько обобщить подобно тому, как это делалось в предыдущем пункте.

Пусть $H_+ \subset H \subset H_-$ — оснащенное гильбертово пространство с квази-ядерным вложением. В $H$ рассмотрим систему стохастических эволюционных уравнений

$$dy_1/dt - A_1(t)y_1(t) + f_1(t, y_1(t), y_2(t)) = \xi_1(t), \tag{21}$$

$$dy_2/dt - A_2(t)y_2(t) + f_2(t, y_1(t), y_2(t)) = \xi_2(t) \tag{22}$$

с начальными условиями

$$0 \le t \le a, \quad y_1(0) = y_2(0) = \xi_1(0) = \xi_2(0) = 0 \pmod P. \tag{23}$$

Предположим, что выполнены условия:

*i*) $A_1(t)$, $i = 1, 2$, — линейные, может быть, непрерывные операторы в $H_i$ с плотной не зависящей от $t$ областью определения $\mathcal{D}(A_i) \subset H_i$; $A_i(t)$ является произведением операторов эволюционных семейств $u_i(t, s)$, сильно непрерывно зависящих от параметров $t, s \in [0, a]$. Предположим, что

$$\int_0^a\int_0^a \|u_i(t, s)\|^2_{H_i}\, dt\, ds < \infty, \quad i = 1, 2;$$

*ii*) $f_i(t, y_1, y_2)$ — нелинейные функции, определенные на $[0, a] \times H_1 \times H_2$ и имеющие значения в $\mathcal{D}(A_1) \times \mathcal{D}(A_2)$. Пусть, кроме того, существуют производные $\partial f_i / \partial y_j$, $i, j = 1, 2$.

Систему (21), (22) запишем в стохастическом виде

$$dy_1(t) - A_1(t)y_1(t)dt + f_1(t, y_1(t), y_2(t))\, dt = dw_1(t), \tag{24}$$

$$dy_2(t) - A_2(t)y_2(t)dt + f_2(t, y_1(t), y_2(t))\, dt = dw_2(t). \tag{25}$$

Уравнения (24) и (25) будем понимать как эквивалентную запись стохастических интегральных уравнений

$$y_1(t) + \int_0^t u_1(t, s) f_1(t, y_1(t), y_2(t))\, dt = \int_0^t u_1(t, s)\, dw_1(t), \tag{26}$$

$$y_2(t) + \int_0^t u_2(t, s) f_2(t, y_1(t), y_2(t))\, dt = \int_0^t u_2(t, s)\, dw_2(t). \tag{27}$$

Нужно найти формулу для оптимального прогноза функционала $\Phi(\cdot, \cdot)$ от решения системы (24), (25) по наблюдениям $y_1(t)$ в $[0, a]$.

Рассмотрим линейную систему

$$dx_1(t) - A_1(t)x_1(t) = dw_1(t), \quad dx_2(t) - A_2(t)x_2(t) = dw_2(t),$$
$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \pmod P,$$

и обозначим через $\Sigma^1$ $\sigma$-алгебру, порожденную случайным процессом $x_1(t)$. Пусть $x_2^*(t) = E\{x_2(t)/\Sigma^1\}$. Тогда вектор $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ записывается в виде $x(t) = x^*(t) + x^0(t)$, где

$$x^*(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix}, \quad x^0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^0(t) \end{pmatrix},$$

и $x_2^0(t)$ не зависит от $\Sigma^1$, так как $x(t)$ является гауссовым векторным процессом.

**Теорема 6.** *Пусть для стохастических дифференциальных уравнений* (24), (25) *выполняются условия* i) *и* ii). *Тогда формула оптимального нелинейного фильтра по наблюдениям за компонентой* $y_1(t)$ *имеет вид*

$$\Phi^*(y_1(t), y_2(t)) = E\Bigg\{\Phi\big(a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big) \exp\Bigg\{-\int_0^a \big(f_1(t, a_1(t), a_2(t) +$$

$$+ x_2^0(t)\big), dw_1(t)\big)_H - \int_0^a \big(f_2\big(t, a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big), dw_1(t)\big)_H -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^a \big\| f_1\big(t, a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big)\big\|_H^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^a \| f_2(t, a_1(t), a_2(t) +$$

$$+ x_2^0(t))\|_H^2 dt\Bigg\}\Bigg\}\Bigg\{E \exp\Bigg\{-\int_0^a \big(f_1\big(t, a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big), dw_1(t)\big)_H -$$

$$- \int_0^a \big(f_2\big(t, a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big), dw_2\big)_H - \frac{1}{2}\int_0^a \| f_1(t, a_1(t), a_2(t) +$$

$$+ x_2^0(t)\|_H^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^a \big\| f_2\big(t, a_1(t), a_2(t) + x_2^0(t)\big)\big\|_H^2 dt\Bigg\}\Bigg\}^{-1}\Bigg|_{\substack{a_1(t) = y_1(t) \\ a_2(t) = x_2^*(t)}},$$

*где* $x_2^*(t) = E\{x_2(t)/\Sigma^1\}$.


1 *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М., Наука, 1974. – 696 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Шаташвили А. Д.* Об оптимальном прогнозировании случайных величин, нелинейно связанных с гауссовскими // Теория случайн. процессов. – 1975. – Вып. 3. – С. 30 – 33.
3. *Сохадзе Г. А.* Эквивалентность мер, соответствующих решениям некоторых краевых задач математической физики со случайными гауссовскими возмущениями // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1988. – Вып. 39. – С. 116 – 123.
4. *Sokhadze G.* Absolute continuity of measures generated with nonlinear equations // New Trends in Probability and Statistics, Vol. 1. Proceedings of Bakuriani Colloquium in Honour of Yu. V. Prohorov. – Bakuriani, Georgia. – 1990. – P. 540 – 549.
5. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 256 с.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1968. – 795 с.


Получено 24. 12. 91