УДК 517.5

А. В. Бондарь, В. Ю. Романенко

О производных операторах и условиях голоморфности отображений гильбертовых пространств

Для отображений областей бесконечномерных гильбертовых пространств введены понятия производных операторов, получено их параметрическое представление, доказаны критерий совпадения операторов вдоль двух подпространств и одна теорема о голоморфности.

Для відображень областей нескінченновимірних гільбертових просторів введені поняття похідних операторів, одержано їх параметричне зображення, доведені критерій збігу операторів вздовж двох підпросторів та одна теорема про голоморфність.

В настоящей статье понятия, методы и результаты, восходящие в своей основе к классическим работам Д. Е. Меньшова [1] и Г Бора [2] по проблемам моногенности и голоморфности комплексных функций, переносятся на бесконечномерный случай. Предлагаемый подход позволяет получить в этом направлении и ряд других результатов, которые будут представлены в последующих публикациях.

Рассмотрим комплексное гильбертово пространство H со скалярным произведением (z, ζ) и нормой $\| z \| = \sqrt{(z, z)}$. Обозначим через $\mathcal{O}(H)$ множество всех ортонормированных базисов $\mathcal{E} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ пространства H. Каждый такой базис $\mathcal{E}$ называем репером в H.

Пусть $a \in H$ и $\mathcal{E} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in \mathcal{O}(H)$.

Определение 1. *Семейство последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, где $z_\alpha^k \neq a$ $\forall \alpha, k$, называется репером последовательностей в точке a с касательным репером $\mathcal{E}$, если выполняются равенства*:

а) $\lim\limits_{k \to \infty} z_\alpha^k = a \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

б) $\lim\limits_{k \to \infty} (z_\alpha^k - a) \| z_\alpha^k - a \|^{-1} = e_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}$.

Пусть H, H_1 — комплексные гильбертовы пространства, $\mathcal{L}(H, H_1)$ — пространство $\mathbb{C}$-линейных непрерывных операторов из H в H_1, снабженное нормой $\| A \| = \sup\limits_{\|z\|=1} \| Az \|$, $f : D \to H_1$ — отображение области $D \subset H$ и $\widetilde{\mathcal{E}} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ — репер последовательностей в точке $a \in D$ с касательным репером $\mathcal{E} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ такой, что $z_\alpha^k \in D$ $\forall \alpha, k$.

Определение 2. *Будем говорить, что в точке a существует производный оператор $L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a)$ отображения f вдоль репера последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}$, если выполнены следующие условия*:

а) $\lim\limits_{k \to \infty} (f(z_\alpha^k) - f(a)) \| z_\alpha^k - a \|^{-1} = \zeta_\alpha \in H_1 \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}$;

б) *существует оператор $L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a) \in \mathcal{L}(H, H_1)$, принимающий на базисных векторах e_α значения ζ_α, т. е.*

$$L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a) e_\alpha = \zeta_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathfrak{A}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}(f, a)$ и $\mathcal{P}(f, a)$ соответственно множество всех реперов последовательностей $\widetilde{\mathcal{E}}$ в точке a (со всевозможными касательными реперами $\mathcal{E} \in \mathcal{O}(H)$), вдоль которых существуют производные операторы отображения f, и множество всех производных операторов $L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a)$, где $\widetilde{\mathcal{E}}$ пробегает $\mathcal{R}(f, a)$. Множество $\mathcal{P}(f, a)$ будем называть множеством производных операторов отображения f в точке a.

Пусть $E(\mathfrak{E})$ — замкнутая вещественная линейная оболочка множества $\mathfrak{E}$ и $\mathcal{K}(H)=\{E=E(\mathfrak{E}):\mathfrak{E}\in\mathcal{O}(H)\}$. Поскольку $E\oplus iE=H \quad \forall E\in\mathcal{K}(H)$, то с каждым замкнутым вещественным подпространством $E\in\mathcal{K}(H)$ связан $\mathbb{R}$-линейный непрерывный оператор сопряжения $J_E: H\to H$, определяемый следующим образом: $J_E z=J_E(z'+iz'')=z'-iz''$, где $z', z''\in E$. Зафиксируем произвольно выбранное подпространство E^0, принадлежащее $\mathcal{K}(H)$. Для любого $E\in\mathcal{K}(H)$ определим оператор $T_{E,E^0}: H\to H$ по формуле $T_{E,E^0}\zeta=T_{E,E^0}(\zeta'+i\zeta'')=J_{E^0}\zeta'+iJ_{E^0}\zeta''$, где $\zeta', \zeta''\in E$. Непосредственно из определений операторов J_E, T_{E,E^0} вытекает, что J_E^2 — тождественный оператор, $J_E(\lambda z)=\bar{\lambda}J_E z \quad \forall\lambda\in\mathbb{C}$, T_{E,E^0} — унитарный оператор и $T_{iE,E^0}=-T_{E,E^0}$. Кроме того, если $L: H\to H_1$ — $\mathbb{R}$-линейный оператор, то для любого $E\in\mathcal{K}(H)$ операторы A и B_E, определяемые по формулам

$$Az=\frac{1}{2}(Lz-iLiz), \tag{1}$$

$$B_E z=\frac{1}{2i}(iLJ_E z-LiJ_E z), \tag{2}$$

являются $\mathbb{C}$-линейными и справедливо равенство $L=A+B_E J_E$.

Пусть $f: D\to H_1$ — отображение, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке a области $D\subset H$, E^0 — произвольное, но фиксированное подпространство, принадлежащее $\mathcal{K}(H)$, и $J=J_{E^0}$. Тогда для производной отображения f в точке a, т. е. для $\mathbb{R}$-линейного непрерывного оператора $f'(a): H\to H_1$ существуют $\mathbb{C}$-линейные непрерывные операторы A и $B=B_{E^0}$, определяемые формулами (1) и (2), такие, что

$$f'(a)=A+BJ. \tag{3}$$

При фиксированном E^0, чтобы отметить зависимость этих операторов от f и по аналогии с плоским случаем, введем для операторов A и B из (3) специальные обозначения: $A=f_z(a)$, $B=f_{\bar{z}}(a)$.

Отметим, что согласно (1) и (2) оператор $f_{\bar{z}}(a)$ зависит от выбора $E^0\in\mathcal{K}(H)$, в то время как оператор $f_z(a)$ от E^0 не зависит.

Теорема 1. *Пусть $f: D\to H_1$ — отображение, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке a области $D\subset H$. Тогда для любого репера $\mathfrak{E}\in\mathcal{O}(H)$ и любого репера последовательностей $\widetilde{\mathfrak{E}}=\{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^\infty\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ в точке a с касательным репером $\mathfrak{E}$ существует производный оператор $L(f,\widetilde{\mathfrak{E}},a)$ отображения f в точке a вдоль $\widetilde{\mathfrak{E}}$ и имеет место представление*

$$L(f,\widetilde{\mathfrak{E}},a)=f_z(a)+f_{\bar{z}}(a)T_E, \tag{4}$$

где E — замкнутая вещественная линейная оболочка $\mathfrak{E}$ и $T_E=T_{E,E^0}$.

Следствие 1. *Из формулы (4) вытекает, что если $E\in\mathcal{K}(H)$ и $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ — такие реперы из $\mathcal{O}(H)$, что $\mathfrak{E}_1\subset E$ и $\mathfrak{E}_2\subset E$, то для любых реперов последовательностей $\widetilde{\mathfrak{E}}_1$ и $\widetilde{\mathfrak{E}}_2$ в точке a с касательными реперами $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ соответственно производные операторы $L(f,\widetilde{\mathfrak{E}}_1,a)$ и $L(f,\widetilde{\mathfrak{E}}_2,a)$ совпадают. Поэтому оператор*

$$L_E=L(f,E,a)=f_z(a)+f_{\bar{z}}(a)T_E \tag{5}$$

естественно назвать производным оператором отображения f в точке a вдоль E. При этом множество производных операторов $\mathcal{P}(f,a)$ отображения f в точке a состоит из операторов L_E, определяемых формулой (5), и только из них.

Следствие 2. *Если $f: D\to H_1$ $\mathbb{R}$-дифференцируемо в точке $a\in D$, то множество производных операторов $\mathcal{P}(f,a)$ отображения f в точке a со-*

держится в сфере пространства $\mathcal{L}(H, H_1)$ с центром в точке $f_{\bar z}(a)$ и радиуса $\| f_{\bar z}(a)\|$. Действительно, из (5), учитывая унитарность операторов T_E, получаем

$$\| L(f, E, a) - f_z(a) \| = \| f_{\bar z}(a) T_E \| = \| f_{\bar z}(a) \|.$$

Доказательство теоремы 1. Из $\mathbb{R}$-дифференцируемости f в точке $a \in D$ и определения репера последовательностей вытекает существование пределов

$$\zeta_\alpha = \lim_{k\to\infty} \frac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{\| z_\alpha^k - a \|} = \lim_{k\to\infty} f'(a) \left(\frac{z_\alpha^k - a}{\| z_\alpha^k - a \|} \right) = f'(a) e_\alpha = f_z(a) e_\alpha +$$

$$+ f_{\bar z}(a) J e_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) T_E e_\alpha = (f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E) e_\alpha. \quad (6)$$

Отсюда следует, что $\mathbb{C}$-линейный непрерывный оператор $L_E = f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E$ принимает на базисных векторах e_α значение ζ_α и из первого равенства в (6) и определения 2 вытекает, что L_E является производным оператором отображения f в точке a вдоль $\widetilde{\mathcal{E}}$, т. е. $L_E = L(f, \widetilde{\mathcal{E}}, a)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть D — область в H и $f: D \to H_1$ — отображение, $\mathbb{R}$-дифференцируемое в точке $a \in D$. Тогда для того чтобы производные операторы L_{E_1} и L_{E_2} отображения f в точке a вдоль подпространств $E_1, E_2 \in \mathcal{K}(H)$ совпадали, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$E_1 + i[E_1 \cap \operatorname{Ker}(f_{\bar z}(a) J)) = E_2 + i[E_2 \cap \operatorname{Ker}(f_{\bar z}(a) J)]. \quad (7)$$

Доказательство. Обозначим

$$K = \operatorname{Ker}(f_{\bar z}(a) J) = \{z \in H : f_{\bar z}(a) J z = 0\}.$$

По теореме 1

$$L_n = L_{E_n} = f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_{E_n}, \quad n = 1, 2.$$

Предположим, что выполнено равенство (7), и докажем, что в этом случае $L_1 = L_2$. Так как $E_1 \in \mathcal{K}(H)$, то E_1 содержит некоторый ортонормированный базис $\mathcal{E} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ пространства H. Из (7) вытекает, что $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ e_α можно представить в виде $e_\alpha = e'_\alpha + i e''_\alpha$, где $e'_\alpha \in E_2$ и $e''_\alpha \in E_2 \cap K$. Тогда

$$L_1 e_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) T_{E_1} e_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) J e'_\alpha -$$

$$- i f_{\bar z}(a) J e''_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) J e'_\alpha,$$

$$L_2 e_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) T_{E_2} e_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) J e'_\alpha +$$

$$+ i f_{\bar z}(a) J e''_\alpha = f_z(a) e_\alpha + f_{\bar z}(a) J e'_\alpha.$$

Отсюда следует, что L_1 и L_2 совпадают на базисе $\mathcal{E}$, и поэтому $L_1 = L_2$.

Пусть теперь $L_1 = L_2$. Покажем, что выполняется равенство (7). Сначала докажем включение $E_1 \subset E_2 + i(E_2 \cap K)$.

Пусть $z \in E_1$. Тогда $z = z' + iz''$, где $z', z'' \in E_2$ и

$$L_1 z = f_z(a) z + f_{\bar z}(a) J z' - i f_{\bar z}(a) J z'',$$

$$L_2 z = f_z(a) z + f_{\bar z}(a) J z' + i f_{\bar z}(a) J z''.$$

Отсюда и из равенства $L_1 z = L_2 z$ следует $f_{\bar z}(a) J z'' = 0$, и так как $z'' \in E_2$, то $z'' \in E_2 \cap K$. Следовательно, $z = z' + iz'' \in E_2 + i(E_2 \cap K)$.

Пусть теперь $z \in E_1 + i(E_1 \cap K)$, т. е. $z = z' + iz''$, где $z' \in E_1$, $z'' \in E_1 \cap K$. По доказанному

$$z' = x' + iy', \text{ где } x' \in E_2, \quad y' \in E_2 \cap K,$$
$$z'' = x'' + iy'', \text{ где } x'' \in E_2, \quad y'' \in E_2 \cap K.$$

Поэтому

$$z = z' + iz'' = (x' - y'') + i(y' + x'') \tag{8}$$

и, учитывая, что $z'' \in K$, имеем

$$0 = f_{\bar{z}}(a)\,Jz'' = f_{\bar{z}}(a)\,Jx'' - if_{\bar{z}}(a)\,Jy'' = f_{\bar{z}}(a)\,Jx'',$$

т. е. $x'' \in K$.

Таким образом, в (8) x', $y'' \in E_2$ и y', $x'' \in E_2 \cap K$. Поэтому $x' - y'' \in E_2$ и $y' + x'' \in E_2 \cap K$. Следовательно, $z \in E_2 + i(E_2 \cap K)$ и включение $E_1 + i(E_1 \cap K) \subset E_2 + i(E_2 \cap K)$ доказано.

Обратное включение доказывается аналогично, поскольку в приведенных выше рассуждениях E_1 и E_2 можно поменять местами. Теорема 2 доказана.

Определение 3. *Пусть D — область в H и $f: D \to H_1$ — отображение. Будем говорить, что f $\mathbb{R}$- или $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точках множества $M \subset D$ локально равномерно на n-мерных сечениях, если для каждой точки $b \in D$ и любого комплексно n-мерного подпространства $F \subset H$ выполнено следующее условие: для любой точки $z_0 \in (b + F) \cap D = D_b$ существует такая ее окрестность U, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\forall a \in M \cap D_b \cap U$ неравенство*

$$\frac{\| f(z) - f(a) - f'(a)(z-a) \|}{\| z - a \|} < \varepsilon$$

выполняется $\forall z \in D_b$, удовлетворяющих условию $\| z - a \| < \delta$.

Теорема 3. *Пусть D — область бесконечномерного гильбертова пространства H и $f: D \to H_1$ — локально ограниченное отображение, $\mathbb{C}$-дифференцируемое в каждой точке $a \in D \setminus S$, где множество S имеет нулевую k-меру Хаусдорфа при некотором натуральном k. Тогда:*

а) *если f непрерывно, то f голоморфно в D;*

б) *если S замкнуто, то f можно так изменить на множестве S, что получающееся отображение $\tilde{f}$ будет голоморфным в D;*

в) *если существует такое целое n, $2n \geqslant k + 1$, что f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точках множества $D \setminus S$ локально равномерно на n-мерных сечениях, то f совпадает на множестве $D \setminus S$ с некоторым голоморфным в D отображением $\tilde{f}$.*

Доказательство. а). Пусть F — произвольное подпространство в H конечной размерности $n > k$, $b \in D$, $F_b = b + F$, $D_b = D \cap F_b$ и l — непрерывный $\mathbb{C}$-линейный функционал на H_1. Обозначим $g = l \circ (f|_{D_b})$ и докажем, что отображение $g: D_b \to \mathbb{C}$ голоморфно в открытом (относительно F_b) множестве D_b. Так как f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в каждой точке $a \in D_b \setminus S$, то g $\mathbb{C}$-дифференцируемо в каждой точке $a \in D_b \setminus S$, и поскольку k-мера Хаусдорфа множества $\mathcal{D}_b \cap S$ равна нулю, то из неравенства $n > k$ вытекает, что равна нулю и $(2n-1)$-мера Хаусдорфа множества $D_b \setminus S$. Следовательно, для отображения g выполнены все условия теоремы 1 [3], из которой следует что g голоморфно в $\mathcal{D}_b$. Так как это верно для любого подпространства $F \subset H$ размерности $n > k$, то для любого $h \in H$ функция $\lambda \to l \circ f(b + \lambda h)$ голоморфна в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}$. А так как последнее свойство выполняется во всех точках $b \in D$, то функция $l \circ f$ голоморфна $\forall l \in H_1^*$. Отсюда следует [4, с. 32], что отображение f голоморфно.

б). В этом случае множество S замкнуто. Поэтому в предыдущих обозначениях функция g голоморфна в $D_b \setminus S$ и, кроме того, по условию локально ограничена в D. Так как S имеет нулевую $(2n-1)$-меру Хаусдорфа, то по теореме об устранимых особенностях ограниченных голоморфных функций [5, с. 221] $g|_{D_b \setminus S}$ продолжается до функции $\tilde{g}$, голоморфной в D_b.

Если теперь есть два конечномерных подпространства F' и F'' размерностей $n' > k$, $n'' > k$, $D_b' = (b + F') \cap D$, $D_b'' = (b + F'') \cap D$ и $S' = D_b' \cap D_b'' \cap S \neq \varnothing$, то голоморфные продолжения из $D_b' \setminus S$ и $D_b'' \setminus S$ на множество S' совпадают. Это вытекает из того, что если положить $F^0 = F' + F''$ и $D_b^0 = (b + F^0) \cap D$, то продолжение голоморфной в $D_b^0 \setminus S$ функции $l \circ f|_{D_b^0 \setminus S}$ в точки множества S' обязано совпадать с продолжением на S' из $D_b' \setminus S$ и $D_b'' \setminus S$. Отсюда следует, что $\forall l \in H_1^*$ существует голоморфная функция $f_l : D \to \mathbb{C}$, совпадающая на открытом множестве $D \setminus S$ с функцией $l \circ f$.

Докажем, что $\forall z_0 \in S$ существует предел

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D \setminus S}} f(z) = \widetilde{f}(z_0). \tag{9}$$

Если это не так, то из локальной ограниченности f вытекает, что найдутся такие две последовательности $\{z_k'\}_{k=1}^{\infty} \subset D \setminus S$ и $\{z_k''\}_{k=1}^{\infty 1} \subset D \setminus S$, сходящиеся к точке z_0, для которых существуют различные пределы:

$$\lim_{k \to \infty} f(z_k') = \zeta' \neq \zeta'' = \lim_{k \to \infty} f(z_k'').$$

Тогда найдется такой функционал $l \in H_1^*$, что $l\zeta' \neq l\zeta''$. В этом случае

$$\lim_{k \to \infty} f_l(z_k') = \lim_{k \to \infty} l(f(z_k')) \neq \lim_{k \to \infty} l(f(z_k'')) = \lim_{k \to \infty} f_l(z_k''),$$

что противоречит уже доказанной голоморфности функции f_l.

Продолжим отображение f из $D \setminus S$ на множество S по формуле (9) и полученное таким образом отображение обозначим через $\widetilde{f}$. Тогда $\forall l \in H_1^*$ функция $l \circ \widetilde{f}$ совпадает с рассмотренной ранее голоморфной в области D функцией f_l. Отсюда следует [4, с. 32], что $\widetilde{f}$ голоморфно.

в). Из рассуждений, проведенных при доказательстве случая б), вытекает, что достаточно доказать следующее утверждение: если D — область в $\mathbb{C}^n$ и $f : D \to \mathbb{C}$ — ограниченная функция, равномерно $\mathbb{C}$-дифференцируемая в точках множества $D \setminus S$, где множество S имеет нулевую $(2n - 1)$-меру Хаусдорфа, то $f|_{D \setminus S}$ продолжается до функции $\widetilde{f}$, голоморфной в области D.

Для $j = \overline{1, n}$ рассмотрим дифференциальные формы

$$\omega_j(\zeta) = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots [j] \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n, \tag{10}$$

где символ $[j]$ означает, что соответствующий дифференциал $d\bar{\zeta}_j$ во внешнем произведении (10) опущен. Тогда существует такая константа C_0, что если S_r — сфера радиуса r с центром в нуле пространства $\mathbb{C}^n$, то

$$\int_{S_r} |\omega_j(\zeta)| \leqslant C_0 r^{2n-1} \quad \forall j = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Если $z \in D \setminus S$, то существует такое $r(z)$, что $\forall r < r(z)$ шар $B_r(z)$ с центром в точке z радиуса r принадлежит области D и для любой точки $\zeta \in S_r$ можно написать

$$f(z + \zeta) = f(z) + f'(z)\zeta + R(z, \zeta),$$

где в силу равномерной $\mathbb{C}$-дифференцируемости f функция $R(z' \zeta)$ такова, что

$$\sup_{\|\zeta\| \leqslant r} |R(z, \zeta)| \leqslant \varepsilon(r) \cdot r, \tag{12}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Рассмотрим интегралы

$$\int\limits_{S_r} f(z+\zeta)\,\omega_j(\zeta) = \int\limits_{S_r} (f(z)+f'(z)\zeta)\,\omega_j(\zeta) + \int\limits_{S_r} R(z,\zeta)\,\omega_j(\zeta). \tag{13}$$

Так как функция $\zeta \to f(z) + f'(z)\zeta$ голоморфна, то первый интеграл в правой части формулы (13) равен нулю [6], а для второго интеграла из (11) и (12) получаем оценку

$$\int\limits_{S_r} |R(z,\zeta)\,\omega_j(\zeta)| \leqslant C_0\cdot\varepsilon(r)\cdot r^{2n}.$$

Таким образом, для всех $z \in D \setminus S$ и всех таких r, что $B_r(z) \subset D$, имеем

$$\left|\int\limits_{S_r} f(z+\zeta)\,\omega_j(\zeta)\right| \leqslant C_0\cdot\varepsilon(r)\cdot r^{2n}. \tag{14}$$

Покажем, что то же самое будет и во всех точках $z \in S$. Действительно, если $z_0 \in S$ и $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек из $D \setminus S$, сходящаяся к z_0, то для любого достаточно малого $r > 0$ функции $\varphi_k(\zeta) = f(z_k+\zeta)$ определены на S_r и ограничены одной и той же константой, равной $\sup\limits_{z\in D}|f(z)| < \infty$. Кроме того, если $\zeta \in S_r \setminus S^0$, где множество $S^0 = -z_0 + S$ имеет нулевую $(2n-1)$-меру Хаусдорфа, то $z_0 + \zeta \in D \setminus S$ и, следовательно, функция f $\mathbb{C}$-дифференцируема, а поэтому и непрерывна в точке $z_0 + \zeta$. Тогда $\forall \zeta \in S_r \setminus S^0$ получаем

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(\zeta) = \lim_{k\to\infty} f(z_k+\zeta) = f(z_0+\zeta) = \varphi_0(\zeta).$$

Отсюда и из теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получаем неравенство (14) для всех $z_0 \in S$.

Из неравенства (14), выполняющегося во всех точках $z \in D$ при $r < r(z)$, и условия $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to 0$ вытекает, что для f выполнены все условия обобщенной теоремы Мореры [7], из которой следует, что f совпадает почти всюду в D (относительно $2n$-меры Лебега) с некоторой голоморфной функцией $\tilde{f}$. При этом нетрудно видеть, что $\tilde{f}(z) = f(z)$ $\forall z \in D \setminus S$. Действительно, если $M = \{z \in D : \tilde{f}(z) = f(z)\}$, $z_0 \in D \setminus S$ и $z_k \in M$, $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$, то из непрерывности f в точке z_0 получаем

$$f(z_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} \tilde{f}(z_k) = \tilde{f}(z_0).$$

Теорема 3 доказана.

1. *Menchoff D.* Sur la representation conforme des domaines plans // Math. Ann.— 1926.— **95**.— P. 640—670.
2. *Bohr H.* Uber streckentreue und conforme Abbildung // Math. Z.— 1918.— N 1.— P. 3—19.
3. *Бондарь А. В.* Многомерный аналог одной теоремы Безиковича // Комплексный анализ и многообразия.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1978.— С. 114—121.
4. *Бурбаки Н.* Дифференциальные и аналитические многообразия.— М. : Мир, 1975.— 220 с.
5. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества.— М. : Наука, 1985.— 272 с.
6. *Айзенберг Л. А.* Замечания о теореме Морера // Голоморфные функции многих комплексных переменных.— Красноярск : Ин-т физики СО АН СССР, 1972.— С. 169—172.
7. *Бондарь А. В.* Обобщение многомерной теоремы Морера // Укр. мат. журн.— 1978.— **30**, № 3.— С. 346—352.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 25.01.90