УДК 517.944

В. Б Мосеенков, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. I. РАЗРЕШИМОСТЬ В ЦЕЛОМ

By using asymptotic methods, we study the three-dimensional initial boundary-value problem of convection of a viscous thermally inhomogeneous weakly compressible fluid that fills a cavity in a solid. A theorem is proved establishing that this problem is globally solvable (in time). A convergent iteration process of a special form is suggested for solving this problem.

За допомогою асимптотичних методів досліджується тривимірна початково-крайова задача конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабко стисливої рідини, що заповнює порожнину в твердому тілі. Доведена теорема про її розв'язність у цілому (за часом). Для розв'язування задачі запропонований збіжний ітераційний процес спеціального вигляду.

1. Конвекция слабо сжимаемой жидкости, заполняющей полость Ω_1 в твердом теле Ω_2, описывается системой уравнений [1, 2]

$$\operatorname{div} v = \varepsilon \frac{d\tau}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{dv}{dt} + \nabla(\nu_0 \hat{v}) = -\nabla \mathcal{F} \cdot \hat{v} + \nabla(\operatorname{div} v) + \rho^{-1}\left[-\nabla q + \varepsilon^{-1} g(\rho - 1)\right] + \overline{F}_1, \tag{2}$$

$$\sigma \frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}(\kappa_0 \nabla \tau) = \delta |\hat{v}|^2 + F_2, \tag{3}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ — точка в декартовой системе координат E_3, t — время, $v = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость, τ — температура, q — разность между гидродинамическим и гидростатическим давлением, $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon\tau)$ — кинематический коэффициент вязкости ($\nu_0(0) = 1$), $\rho = \rho(\varepsilon\tau)$ — плотность ($\rho(0) = 1$, $\rho\nu \equiv \mu$), $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon\tau)$ — коэффициент теплопроводности, $g = (0, 0, -1)$ — ускорение силы тяжести, $\overline{F}_1 = (F_{11}, F_{12}, F_{13})$ и F_2 характеризует известные источники импульса и энергии соответственно, ε и δ — малые положительные параметры (все переменные и константы безразмерные [1, 2]);

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla, \quad \operatorname{div} v = \nabla \cdot v, \ \Delta = \operatorname{div} \nabla,$$

$$\hat{v} = \left\{v_{ij}\right\}_{i,\, j=1}^{3}, \quad v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad \mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{\rho(\xi)} - 1;$$

точка в выражении $\nabla \cdot \hat{v}$ означает произведение вектора ∇ на матрицу $\hat{v}$ ($u \cdot v$ — скалярное произведение векторов u и v), $\hat{u} : \hat{v} = u_{ij} v_{ij}$, $|v|^2 = \hat{v} : \hat{v}$ (здесь и всюду далее такая запись означает суммирование по повторяющимся индексам).

Эта система выведена в [1, 2] из общей системы уравнений баланса, описывающих конвекцию. При этом предполагалось, что все теплофизические и реологические параметры жидкости (плотность, вязкость, теплоемкость и т. д.) являются известными медленно меняющимися функциями температуры. В этом состоит существенное отличие от моделей, изучавшихся в [3 – 5], где плотность ρ есть неизвестная функция (здесь получены лишь локальные теоремы существования и единственности). Такой подход позволил произвести асимптотическое упрощение системы с точностью до слагаемых порядка $\varepsilon^i\delta^j$ $(i+j=2)$. Известные константы ($-\dot\rho(0)$, $\dot\mu(0)$ и др.) в системе (1) – (3) для простоты приняты равными единице.

Уравнения (1), (2) рассматриваются в цилиндре $\Omega_1^T = \Omega_1 \times (0, T]$, а (3) — в ограниченном цилиндре Ω_2^T; $\kappa_0 = \kappa_0'(\varepsilon\tau)$, $\sigma' = 1$ в Ω_1^T $(\kappa'(0) \equiv P')$, $\kappa_0 = \kappa_0'' \equiv P'' = \text{const}$, $\sigma'' = \text{const} \neq 1$ в $(\Omega_2 \setminus \overline{\Omega}_1)^T$, $v'' = 0$, $\varepsilon'' = 0$ (u' и u'' означают сужения функции $u(x,t)$, заданной в Ω_2^T, на Ω_1^T и $(\Omega_2\setminus\Omega_1)^T$ соответственно).

Для уравнений (1) – (3) рассматривается начально-краевая задача [6, 7]

$$v|_{t=0} = v_0(x)(x\in\Omega_1), \qquad \tau|_{t=0} = \tau_0(x)(x\in\Omega_2), \tag{4}$$

$$v|_{\partial\Omega_1^T} = [\tau]_{\partial\Omega_1^T} = \left[\kappa_0\frac{\partial\tau}{\partial n}\right]_{\partial\Omega_1^T} = \tau''|_{\partial\Omega_2^T} = 0, \tag{5}$$

где $\partial\Omega_i$ — достаточно гладкая граница области Ω_i,

$$\partial\Omega_i^T = \partial\Omega_i\times(0,T] \ (i=1,2), \quad [\tau]_{\partial\Omega_1^T} = (\tau'-\tau'')|_{\partial\Omega_1^T},$$

n — внешняя нормаль к $\partial\Omega_1$.

Асимптотическое решение $(v_\varepsilon, \tau_\varepsilon, q_\varepsilon)$ *задачи* (1) – (5) будем искать в виде

$$v_\varepsilon = v + \varepsilon\nabla u, \quad \tau_\varepsilon = \tau, \quad q_\varepsilon = q, \tag{6}$$

где (v, τ, q, u) есть решение системы

$$\operatorname{div} v = 0,$$

$$\frac{dv}{dt} - \nabla\cdot\left[\left(\nu_0 + \delta^{2\gamma_1}|\hat v|^{2\gamma_1}\right)\hat v\right] = \overline{F}_1 - \frac{g}{\varepsilon}\mathcal{F} + q\nabla\mathcal{F} +$$

$$+ \varepsilon\left\{[-(\nabla u\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\nabla u] - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\mathcal{F}\cdot\hat v + \nabla\left[\widehat{\nabla u} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{q}{\varepsilon\rho}\right)E\right]\right\},$$

$$\sigma\frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}\left[\left(\kappa_0 + \varepsilon^{2\gamma_2}|\nabla\tau|^{2\gamma_2}\right)\nabla\tau\right] = F_2 - \varepsilon\nabla u\cdot\nabla\tau + \delta|\hat v|^2,$$

$$-\varepsilon\Delta^2 u + \operatorname{div}\left[\left(1+\varepsilon^{2\gamma_3}|\nabla u|^{2\gamma_3}\right)\nabla u\right] = P'\Delta\tau' + F_2'.$$

Легко видеть, что эта система асимптотически эквивалентна системе (1) – (3) с точностью до слагаемых порядка $\varepsilon^i\delta^j$ $(i+j=2)$, если $\gamma_1 \geq 1$, $\gamma_2 \geq 1$, $\gamma_3 \geq 1/2$. При условии, что

$$\left|\dot{\mathcal{F}}(\xi)\right| \leq \mathcal{F}_1\left(1+|\xi|^\gamma\right) \quad (\gamma \geq 1, \ \mathcal{F}_1 = \text{const}), \tag{7}$$

из последней получаем систему вида

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{8}$$

$$\frac{dv}{dt} - \nabla\cdot(\nu\hat v) = \overline{F}_1 - \frac{g}{\varepsilon}\mathcal{F}(\varepsilon t) +$$

$$+ \varepsilon\{U(v,u) + V(v,\tau) + \nabla\cdot W(\tau,q,u) - \tau\nabla q\}. \tag{9}$$

$$\sigma\frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}(\kappa\nabla\tau) = F_2 - \varepsilon\nabla u\cdot\nabla\tau + \delta|\hat v|^2, \tag{10}$$

$$-\varepsilon\Delta^2 u + \operatorname{div}(\zeta\nabla u) = P'\Delta\tau' + F_2' \tag{11}$$

где

$$\nu = \nu(\varepsilon\tau, \delta|\hat{v}|) = \nu_0(\varepsilon\tau) + \delta^{2\gamma_1}|\hat{v}|^{2\gamma_1},$$

$$\kappa' = \kappa'(\varepsilon\tau', \varepsilon|\nabla\tau'|) = \kappa_0'(\varepsilon\tau') + \varepsilon^{2\gamma_2}|\nabla\tau'|^{2\gamma_2}, \quad \kappa'' = \kappa_0'',$$

$$\zeta = \zeta(\varepsilon|\nabla u|) = 1 + \varepsilon^{2\gamma_3}|\nabla u|^{2\gamma_3},$$

$$U(v, u) = -(\nabla u\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\nabla u, \quad V(v,\tau) = -\hat{v}\cdot\nabla\tau,$$

$$W(\tau, q, u) = \widehat{\nabla u} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{q}{\varepsilon\rho} + \mathcal{F}\, q\right)E,$$

E — единичная матрица, γ_i — положительные параметры.

Замечания. 1. Случай, когда в условии (7) $\gamma < 1$, более простой и здесь рассматриваться не будет. При этом в уравнении (9) следует сохранить слагаемые $-\nabla\mathcal{F}\cdot\hat{v}$ и $q\nabla\mathcal{F}$ (см., например, [1]).

2. Из уравнения баланса импульса [1, 2]

$$\rho\frac{dv}{dt} - \nabla\cdot(\mu\hat{v}) = -\nabla q + \frac{g}{\varepsilon}(\rho - 1) + \lambda\nabla(\mu'\operatorname{div} v) + \rho\overline{F}_1$$

в силу (1) следует, что q_ε — решение уравнения

$$\Delta q = -\Phi(v) + \tau_z' + \operatorname{div}\overline{F}_1 + O(\varepsilon),$$

где

$$\Phi(v) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \operatorname{div}(v\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)\operatorname{div} v,$$

$O(\varepsilon)$ — малая величина порядка ε вида

$$O(\varepsilon) = -\operatorname{div}\left(\rho\frac{dv}{dt}\right) + \Phi(v) + \operatorname{div}\left[\nabla\cdot(\mu\hat{v}) + \rho\overline{F}_1 - \overline{F}_1\right] -$$

$$- \frac{\rho_z}{\varepsilon} - \tau_z + \lambda\Delta\mu'\operatorname{div} v.$$

Поэтому наличие коэффициента ε в слагаемом $-\varepsilon\tau\nabla q$ в уравнении (8) позволяет считать q_ε решением уравнения

$$\Delta q = -\Phi(v) + \tau_z' + \operatorname{div}\overline{F}_1. \tag{12}$$

3. Система уравнений Буссинеска [8] получается с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ из (8) – (12), если

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{\mathcal{F}(\xi)}{\xi} = 1 \quad \left(\lim_{\xi\to 0}\frac{1-\rho(\xi)}{\ } \right)$$

Согласно (4) – (6) начально-краевые условия для системы (8) – (12) имеют следующий вид:

$$v|_{t=0} = v_0 - \varepsilon\nabla u_0 \equiv \mathring{v}(x) \quad (x\in\Omega_1), \qquad \tau|_{t=0} = \tau_0(x) \quad (x\in\Omega_2), \tag{13}$$

$$v|_{\partial\Omega_1^T} = q|_{\partial\Omega_1^T} = u|_{\partial\Omega_1^T} = \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega_1^T} = [\tau]_{\partial\Omega_1^T} = \left[\kappa\frac{\partial\tau}{\partial n}\right]_{\partial\Omega_1^T} = \tau''|_{\partial\Omega_1^T} = 0, \tag{14}$$

где u_0 — решение задачи

$$\varepsilon\Delta u_0 = \operatorname{div} v_0, \quad u_0\big|_{\partial\Omega_1} = 0. \tag{15}$$

4. Граничные условия $u = q = 0$ на $\partial\Omega_1^T$ являются естественными, поскольку асимптотические поправки скорости u и q определяются с точностью до константы. Наличие слагаемого $-\varepsilon\Delta^2 u$, имеющего определенный произвол в уравнении (11) [1], обусловлено необходимостью выполнения условия неперетекания $v_\varepsilon \cdot n = 0$ $(\partial u/\partial n = 0)$ на $\partial\Omega_1^T$. Поскольку $v_0 \in L_2(\Omega_1)$ (т. е. след $v_0 \cdot n$ на $\partial\Omega_1$ не определен), условие $\partial u_0/\partial n = 0$ на $\partial\Omega_1$ в (15) обеспечить не удается.

2. Следуя [1, 6 – 8], введем функциональные пространства, необходимые для определения понятия обобщенного решения.

Пусть $L_p(\Omega)^k$ — банахово пространство вектор-функций с нормой $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ $(\|\cdot\|_{2,\Omega} \equiv \|\cdot\|_\Omega)$, $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ — пространство Соболева функций с нулевым следом на $\partial\Omega$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{(1),\Omega} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \left(\|\cdot\|_{(1),\Omega}^2 = (\cdot,\cdot)_{(1),\Omega}\right),$$

$\mathring{W}_2^{(2)}(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\Delta u\|_\Omega$, $W_{2+2\gamma}^{(1)}(\Omega)$ — подпространство $W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$ с нормой $\|\nabla u\|_{2+2\gamma,\Omega}$ $(\gamma \ge 0)$. Обозначим через $L_{p,q}(\Omega^T)$ $(L_{p,p}(\Omega^T) \equiv L_p(\Omega^T))$ банахово пространство функции $\tau(x, t)$ с нормой

$$\|\tau\|_{p,q,\Omega^T} = \left(\int_0^T \|\tau\|_{p,\Omega}^q\, dt\right)^{1/q} \left(\|\cdot\|_{p,p,\Omega^T} \equiv \|\cdot\|_{p,\Omega^T}, \|\cdot\|_{p,\frac{4p}{7p-6},\Omega^T} \equiv |||\cdot|||_{p,\Omega^T}\right),$$

а $V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_2^T\right)$, $V_{2+2\gamma,0}^{1,0}\left(\Omega_2^T\right)$, $\mathring{V}_{2+2\gamma}^2\left(\Omega_1^T\right)$ — банаховы пространства распределений

$$C^0(0, T; L_2(\Omega_2)) \cap L_2\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_2)\right), \quad V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_2^T\right) \cap L_{2+2\gamma}\left(0, T; W_{2+2\gamma}^{(1)}(\Omega_1)\right),$$

$$L_2\left(0, T; \mathring{W}_2^{(2)}(\Omega_1)\right) \cap L_{2+2\gamma}\left(0, T; W_{2+2\gamma}^{(1)}(\Omega_1)\right),$$

с нормами

$$|\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} = \left(\max_{0\le t\le T} \|\tau\|_{\Omega_2}^2 + \|\tau\|_{(1),\Omega_2^T}^2\right)^{1/2},$$

$$|\tau|_{V_{2+2\gamma,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} = |\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} + \varepsilon^{\gamma/(\gamma+1)} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma,\Omega_1^T} \quad (\gamma \ge 0),$$

$$|u|_{\mathring{V}_{2+2\gamma}^2(\Omega_1^T)} = \left(\varepsilon\|\Delta u\|_{\Omega_1^T}^2 + \|\nabla u\|_{\Omega_1^T}^2 + \varepsilon^{2\gamma/(\gamma+1)} \|\nabla u\|_{2+2\gamma,\Omega_1^T}^2\right)^{1/2},$$

где $\|\cdot\|_{(1),\Omega^T}$ — норма в $L_2\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega)\right)$, $\varepsilon > 0$.

Обозначив через $J(\Omega)$ множество соленоидальных векторов из $C_0^\infty(\Omega)^3$, а через $\mathring{J}(\Omega)$ и $\mathring{J}_{2+2\gamma}^1(\Omega)$ — замыкания $J(\Omega)$ в нормах $\|v\|_\Omega$ и $\|\hat{v}\|_{2+2\gamma,\Omega}$, построим пространства

$$\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega^T) = C^0\big(0,T;\ \overset{\circ}{J}(\Omega)\big) \cap L_2\big(0,T;\ \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\big),$$

$$\overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma}^{1,0}(\Omega^T) = \overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega^T) \cap L_{2+2\gamma}\big(0,T;\ \overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma}^1(\Omega)\big)$$

с нормами

$$|v|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega^T)} = \Big(\max_{0\le t\le T} \|v\|_\Omega^2 + \|\nabla v\|_{\Omega^T}^2\Big)^{1/2},$$

$$|v|_{\overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma}^{1,0}(\Omega^T)} = |v|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega^T)} + \delta^{\gamma/(\gamma+1)}\ \|\hat v\|_{2+2\gamma,\,\Omega_1^T} \quad (\gamma \ge 0),$$

де

$$|\nabla v|^2 = v_{ix_j} v_{ix_j}, \quad \|\nabla v\|_\Omega = \|\hat v\|_\Omega \quad \big(v \in \overset{\circ}{J}{}_2^1(\Omega)\big), \quad \delta > 0.$$

Обобщенным решением задачи (8) – (14) будем называть вектор-функцик $(v_1, v_2, v_3, \tau, q, u)$, компоненты которой принадлежат пространствам

$$\overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma_1}^{1,0}\big(\Omega_1^T\big), \quad V_{2+2\gamma_2,\,0}^{1,0}\big(\Omega_2^T\big), \quad L_{6/5}\big(0,T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\big), \quad \overset{\circ}{V}{}_{2+2\gamma_3}^{2}\big(\Omega_1^T\big)$$

соответственно и удовлетворяют интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_1} v\cdot w\,dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Omega_1^{t_1}} \Big[-v\cdot w_t + v\cdot\hat v\cdot w + \frac{\nu}{2}\hat v : \hat w\Big]\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega_1^{t_1}} \Big\{\overline{F}_1 - \frac{g}{\varepsilon}\mathcal{F}(\varepsilon\tau) + \varepsilon[U(v,u) + V(v,\tau) - \tau\nabla q]\Big\}\cdot w\,dx\,dt, \tag{16}$$

$$\int_{\Omega_2} \delta\tau\theta\,dx\,\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Omega_2^{t_1}} \{\sigma[-\tau\theta_t + (v\cdot\nabla\tau)\theta] + \kappa(\varepsilon\tau, \varepsilon\nabla\tau)\nabla\tau\cdot\nabla\theta\}\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega_2^{t_1}} \big(F_2 - \varepsilon\nabla u\cdot\nabla\tau + \delta|\hat v|^2\big)\theta\,dx\,dt, \tag{17}$$

$$\int_{\Omega_1} \nabla q\cdot\nabla p\,dx = \int_{\Omega_1} \{[\overline{F}_1 - (v\cdot\nabla)v]\,\nabla p + \tau p_z\}\,dx, \tag{18}$$

$$\varepsilon \int_{\Omega_1^{t_1}} [(\Delta u)(\Delta s) + \zeta(\varepsilon\nabla u)\nabla u\cdot\nabla s]\,dx\,dt = \int_{\Omega_1^{t_1}} (P'\,\nabla\tau\cdot\nabla s - F_2\,s)\,dx\,dt \tag{19}$$

для всяких

$$w \in \overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma_1}^{1,1}\big(\Omega_1^T\big) \equiv \Big\{w \in \overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma_1}^{1,1}\big(\Omega_1^T\big)\,\Big|\, w_t \in L_2\big(\Omega_1^T\big)\Big\},$$

$$\theta \in V_{2+2\gamma_2}^{1,1}\big(\Omega_2^T\big) \equiv \Big\{\theta \in V_{2+2\gamma_1}^{1,0}\big(\Omega_2^T\big)\,\Big|\,\theta_t \in L_2\big(\Omega_2^T\big)\Big\},$$

$$p \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1), \quad s \in \overset{\circ}{V}{}_{2+2\gamma_3}^{2}\big(\Omega_1^T\big)$$

и всех t из $[0,T]$ (последнее относится ко всем указанным тождествам, кроме (18), которое выполняется при почти всех t из $[0,T]$).

Корректность этого определения обеспечивается перечисленными ниже *предположениями*.

Функции $\nu_0(\xi)$, $\kappa_0'(\xi)$ и $\mathcal{F}(\xi)$ определены в E_1, непрерывны и имеют следующие свойства:

1^0 $$0<\nu_1 \le \nu_0(\xi) \le \nu_2, \quad |\dot\nu(\xi)| \le \nu_3;$$

2^0 $$0<\kappa_1 \le \kappa_0'(\xi) \le \kappa_2, \quad |\dot\kappa_0'(\xi)| \le \kappa_3;$$

3^0 $$\lim_{\xi\to 0}\xi^{-1}\mathcal{F}(\xi)=0, \quad -\mathcal{F}_0 \le \mathcal{F}(\xi),$$

$$|\mathcal{F}(\xi_1)-\xi_1-\mathcal{F}(\xi_2)+\xi_2| \le \mathcal{F}_1(|\xi_1|^\gamma+|\xi_2|^\gamma)|\xi_1-\xi_2|$$

для всяких ξ_1, ξ_2 и ξ из E_1 ($\dot\nu(\xi)$ есть обычная ограниченная производная функции $\nu(\xi)$; ν_i, κ_i, $\mathcal{F}_i$ — положительные константы).

Для начальных условий (v_0, τ_0) и возмущений $\overline{F}_1, F_2$ справедливы включения:

4^0 $$v_0 \in L_2(\Omega_1), \quad \tau_0 \in L_2(\Omega_2) \quad (\mathring{v} \in L_2(\Omega_1));$$

5^0 $$\overline{F}_1 \in L_{p_1,\,4p_1/(7p_1-6)}(\Omega_1^T)^3 \cap L_{2,\,6/5}(\Omega_1^T),$$

$$F_2 \in L_{p_2,\,4p_2/(7p_2-6)}(\Omega_2^T) \cap L_{6/5,\,2}(\Omega_1^T) \quad (1<p_i\le 2,\ i=1,2).$$

Действительно, существование всех интегралов в тождествах (16) – (19) обеспечивается гладкостью компонент вектор-функций $(v_1, v_2, v_3, \tau, q, u)$ и $(w_1, w_2, w_3, \theta, p, s)$, а также условиями 1^0 – 5^0. Поскольку этот вопрос исследовался в [1, 6 – 8], приведем лишь новые оценки, не встречавшиеся в указанных работах.

Применяя неравенство Корна [9]

$$\|\nabla v\|_{p,\Omega} \le c_1\Big(\|v\|_{p,\Omega}+\|\hat v\|_{p,\Omega}\Big) \quad \Big(v\in W_p^{(1)}(\Omega)\Big), \tag{20}$$

легко получаем аналоги интерполяционных неравенств, приведенных в [1]:

$$\|u\|_{p,\,\frac{p(5m-6)}{3(p-2)},\,\Omega_1^T} \le$$

$$\le c_2 \max_{0\le t\le T}\|u\|_{\Omega_1}^{\frac{2pm-6(p-m)}{p(5m-6)}}\,\|\nabla u\|_{\Omega_1^T}^{\frac{3(2+2\alpha-m)(p-2)}{\alpha p(5m-6)}}\,\|\hat u\|_{2+2\alpha,\,\Omega_1^T}^{\frac{3(m-2)(p-2)(\alpha+1)}{\alpha p(5m-6)}}, \tag{21}$$

$$\|u\|_{\frac{5m}{3},\,\Omega_1^T} \le c_3 \max_{0\le t\le T}\|u\|_{\Omega_1}^{\frac{2}{5}}\,\|\nabla u\|_{\Omega_1^T}^{\frac{3(2+2\alpha-m)}{5\alpha m}}\,\|\hat u\|_{2+2\alpha,\,\Omega_1^T}^{\frac{3(m-2)(\alpha+1)}{5\alpha m}}, \tag{22}$$

справедливых для всяких функций $u\in \mathring{J}^{1,0}_{2+2\alpha}\big(\Omega_1^T\big)$ и любых α, p, и m из $[0, \infty)$, $[2, 6]$ и $[2, 3)$, или α, p, и m из $[0,\infty)$, $[2,\infty]$ и $[3, 2+2\alpha]$ $(\alpha\le 2)$ соответственно. Если $u\in V^{1,0}_{2+2\alpha,\,0}\big(\Omega_2^T\big)$, то в правой части неравенства (20) ((21)) добавляется слагаемое

$$c_2 \max_{0\le t\le T}\|u\|_{\Omega_1}^{\frac{5mp-12(p-1)}{p(5m-6)}}\,\|\nabla u\|_{\Omega_2^T}^{\frac{6(p-2)}{p(5m-6)}} \quad \left(c_3 \max_{0\le t\le T}\|u\|_{\Omega_1}^{1-\frac{6}{5m}}\,\|\nabla u\|_{\Omega_2^T}^{\frac{6}{5m}}\right),$$

а вместо $\|\hat u\|_{2+2\alpha,\,\Omega_1^T}$ следует записать $\|\nabla u\|_{2+2\alpha,\,\Omega_1^T}$. Следовательно,

$$\big|I_{\mathcal{F}}(w)\big| \equiv \left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1^T}\mathcal{F}(\varepsilon\tau)w_3\,dx\,dt\right| \le c_4\int_{\Omega_1^T}\Big(|\tau|+\varepsilon^\gamma|\tau|^{\gamma+1}\Big)|w|\,dx\,dt \le$$

$$\le c_5 \left[\|\tau\|_{\Omega_2^T} \|w\|_{\Omega_1^T} + \varepsilon^\gamma \|w\|_{(10/3),\Omega_1^T} \|\tau\|^{\gamma+1}_{(10/7)(\gamma+1),\Omega_1^T} \right] \le$$

$$\le c_6 |w|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega^T)} \left[\|\tau\|_{(1),\Omega_1^T} + \varepsilon^\gamma \times \right.$$

$$\left. \times \left(\max_{0\le t\le T} \|\tau\|^{2(\gamma+1)/5}_{\Omega_1} \|\nabla\tau\|^{(7\gamma_2-3\gamma+4)/5\gamma_2}_{\Omega_1^T} \|\nabla\tau\|^{(3\gamma-4)(\gamma_2+1)/5\gamma_2}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T} + |\tau|^{\gamma+1}_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \right) \right], \tag{23}$$

если $4/3 \le \gamma \le 4(\gamma_2+1)/3$ (если $\gamma \le 4/3$, то $10(\gamma+1)/7 \le 10/3$),

$$\left| I_F^{(i)}(\sigma) \right| \equiv \left| \int_{\Omega_i^T} \overline{F}_i \sigma_i \, dx\, dt \right| \le |||\overline{F}_i|||_{p_i,\Omega_i^T} \|\sigma_i\|_{\frac{p_i}{p_i-1},\frac{4p_i}{3(2-p_i)},\Omega_i^T} \le$$

$$\le |||F_i|||_{p_i,\Omega_i^T} |\sigma_i|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_i^T)} \quad \left(i=1,2,\ \overline{F}_2=(F_2,0,0),\ \sigma_1=w,\ \sigma_2=(\theta,0,0)\right). \tag{24}$$

Аналогично, в силу известного [10] неравенства

$$\|u\|_{1/\mu,\Omega^T} \le c_7 \|u\|^{(\nu-\mu)(\nu-\lambda)^{-1}}_{\lambda^{-1},\Omega^T} \|u\|^{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)^{-1}}_{\lambda^{-1},\Omega^T}, \tag{25}$$

справедливого для любого $u \in L_{1/\lambda}(\Omega^T)$ и всяких λ, μ, ν таких, что $0 < \lambda \le \le \mu \le \nu < 1$, имеем

$$\left| \int_{\Omega_1^T} U(v,u)\cdot w\, dx\, dt \right| = \left| \int_{\Omega_1^T} u_{x_i} w_j \left(v_{ix_j} - v_{jx_i} \right) dx\, dt \right| \le$$

$$\le c_8 \|w\|_{10/3,\Omega_1^T} \|\nabla v\|_{\Omega_1^T} \|\nabla u\|_{5,\Omega_1^T} \le$$

$$\le c_9 \|w\|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} |v|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} \|\nabla u\|^{(2\gamma_3-3)/5\gamma_3}_{\Omega_1^T} \|\nabla u\|^{3(\gamma_3+1)/5\gamma_3}_{2+2\gamma_3,\Omega_1^T}, \tag{26}$$

если $\gamma_3 \ge 3/2$,

$$\left| \int_{\Omega_1^T} V(v,\tau)\cdot w\, dx\, dt \right| = \left| \int_{\Omega_1^T} (\hat{v}, \nabla\tau)\cdot w\, dx\, dt \right| \le$$

$$\le c_{10} |w|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} \|v\|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} \|\nabla\tau\|^{(2\gamma_2-3)/5\gamma_2}_{\Omega_1^T} \|\nabla\tau\|^{3(\gamma_2+1)/5\gamma_2}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T}, \tag{27}$$

если $\gamma_2 \ge 3/2$, и

$$\left| \int_{\Omega_1^T} (\nabla u)\cdot(\nabla\tau)\theta\, dx\, dt \right| \le$$

$$\le c_{11} |\theta|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} |\tau|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \|\nabla u\|^{(2\gamma_3-3)/5\gamma_3}_{\Omega_1^T} \|\nabla u\|^{3(\gamma_3+1)/5\gamma_3}_{2+2\gamma_3,\Omega_1^T}, \tag{28}$$

$$\left| \int_{\Omega_1^T} |\hat{v}|^2 \theta\, dx\, dt \right| \le c_{12} |\theta|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \|\nabla v\|^{(7\gamma_1-3)/5\gamma_1}_{\Omega_1^T} \|\hat{v}\|^{3(\gamma_1+1)/5\gamma_1}_{2+2\gamma_1,\Omega_1^T}, \tag{29}$$

$$\left| I_q(w) \right| \equiv \varepsilon \left| \int_{\Omega_1^T} \tau w\cdot\nabla q\, dx\, dt \right| \le \varepsilon c_{13} \int_0^T \|\nabla q\|_{\Omega_1} \|\tau\|_{\frac{2p}{p-2},\Omega_1} \|w\|_{p,\Omega_1} dt \le$$

$$\leq \varepsilon c_{13} \|\nabla q\|_{2, \frac{6}{5}, \Omega_1^T} \|\tau\|_{\frac{2p}{p-2}, \frac{12p}{18-7p}, \Omega_1^T} \|w\|_{p, \frac{4p}{3(p-2)}, \Omega_1^T}$$

для всякого $p \in [2, 18/7)$. Полагая

$$\tilde{q} = \frac{2p}{p-2} > 9,\ m = \frac{6(7p-30)}{5(7p-18)} \in [3, 2+2\gamma_2] \ \left(\gamma_2 \leq 2,\ 2 \leq p \leq \frac{90\gamma_2}{35\gamma_2+14} < \frac{18}{7}\right),$$

в силу неравенства (20) получаем

$$\left|I_q(w)\right| \leq \varepsilon c_{13} \|\nabla q\|_{2, 6/5, \Omega_1^T} |w|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} \|\tau\|_{\tilde{q}, \frac{\tilde{q}(5m-6)}{3(\tilde{q}-2)}, \Omega_1^T} \leq$$

$$\leq \varepsilon c_{14} \|\nabla q\|_{2, 6/5, \Omega_1^T} |w|_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} \max_{0 \leq t \leq T} \Big[\|\tau\|_{\Omega_1}^{(13p-18)/6p} \|\nabla\tau\|_{\Omega_2^T}^{(18-7p)/6p} +$$

$$+ \|\tau\|_{\Omega_1}^{(17p-30)/10p} \|\nabla\tau\|_{\Omega_1^T}^{(90\gamma_2-35p\gamma_2-14p)/30p\gamma_2} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma_2, \Omega_1^T}^{7(\gamma_2+1)/15\gamma_2} \Big]. \qquad (30)$$

И, наконец, в силу неравенства

$$\|\nabla q\|_{\Omega_1} \leq c_{15}\left(\|\nabla\tau\|_{6/5, \Omega_1} + \|v\|_{6, \Omega_1}\|\nabla v\|_{3, \Omega_1} + \|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}\right) \leq$$

$$\leq c_{16}\left(\|\nabla\tau\|_{6/5, \Omega_1} + \|\nabla v\|_{\Omega_1}\|\hat{v}\|_{3, \Omega_1} + \|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}\right),$$

которое следует из уравнения (18) и неравенство Корна (20) для $p \in [2, 6]$, имеем

$$\|\nabla q\|_{2, 6/5, \Omega_1^T} \leq c_{17}\left(\|\nabla\tau\|_{6/5, \Omega_1^T} + \|\nabla v\|_{\Omega_1^T}\|\hat{v}\|_{3, \Omega_1^T} + \|\overline{F}_1\|_{2, 6/5, \Omega_1^T}\right).$$

***Замечание* 5.** Вообще говоря, q можно представить в виде $q = q_\tau + q_v + q_F$, где

$$q_\tau \in C^0\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\right), \qquad q_v \in L_{6/5}\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\right) \cap L_{2, \frac{2(5\gamma_1+2)}{3}}\left(\Omega_1^T\right),$$

$$q_F \in L_{6/5}\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\right).$$

При этом

$$\Delta q_\tau = \tau'_z, \quad \Delta q_v = -\Phi(v), \quad \Delta q_F = \operatorname{div} \overline{F}_1 \quad \left(q_\tau|_{\partial\Omega_1} = q_v|_{\partial\Omega_1} = q_F|_{\partial\Omega_1} = 0\right)$$

и при почти всех t из $[0, T]$ справедлива оценка

$$\|q_v\|_{\Omega_1} \leq c_{18}\|v\|_{4, \Omega_1}^2 \quad \left(v \in \overset{\circ}{J}{}_{2+2\gamma_1}^{1,0}(\Omega_1^T) \subset L_{4, 4(5\gamma_1+2)/3}(\Omega_1^T)\right). \qquad (31)$$

Действительно, для всякого $p \in W_{2,0}^2(\Omega_1)$ справедливы соотношения

$$\int_{\Omega_1} q_v \Delta p \, dx = -\int_{\Omega_1} v_i v_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}, \quad |p|_{W_2^2(\Omega_1)} \leq c_{19}\|\Delta p\|_{\Omega_1}$$

и, следовательно, неравенство (31).

3. Для отыскания обобщенного решения задачи (8) – (15) построим итерационный процесс (v^0, τ^0, q^0, u^0), (v^1, τ^1, q^1, u^1), ... , (v^n, τ^n, q^n, u^n), где (v^{n+1}, τ^{n+1}) — обобщенное решение задачи

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{32}$$

$$\frac{dv}{dt} - \nabla \cdot \left(\nu^n \hat{v}\right) = -g\tau + \overline{F}_1^n, \tag{33}$$

$$\sigma \frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}\left(\kappa^n \nabla \tau\right) = F_2^n \tag{34}$$

с начально-краевыми условиями (13) – (15), а (v^0, τ^0) и (q^n, u^n) — обобщенные решения задач

$$\operatorname{div} v = 0, \tag{35}$$

$$\frac{dv}{dt} - \nabla \cdot \left[\left(1 + \delta^{2\gamma_1} |\hat{v}|^{2\gamma_1}\right) \hat{v}\right] = -g\tau + \overline{F}_1, \tag{36}$$

$$\sigma \frac{d\tau}{dt} - \operatorname{div}\left[\left(1 + \varepsilon^{2\gamma_2} |\nabla \tau|^{2\gamma_2}\right) \nabla \tau\right] = F_2 \tag{37}$$

и

$$\Delta q = -\Phi(v^n) + \tau_z'^n + \operatorname{div} \overline{F}_1, \tag{38}$$

$$-\varepsilon \Delta^2 u + \operatorname{div}\left[\zeta(\varepsilon |u|) \nabla u\right] = P' \Delta \tau'^n + F_2' \tag{39}$$

соответственно (также удовлетворяющие условиям (13) – (15)).

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\nu^n = \nu(\varepsilon\tau^n, \delta |\hat{v}^{n+1}|), \quad \kappa'^n = \kappa'(\varepsilon\tau^n, \varepsilon |\nabla \tau^{n+1}|) \quad (\kappa''^n = P''),$$

$$\overline{F}_1^n = g(\tau^n - \varepsilon^{-1} \mathcal{F}(\varepsilon\tau^n)) + \varepsilon\left[U(v^n, u^n) + V(v^n, \tau^n) - \tau^n \nabla q^n\right] + \overline{F}_1,$$

$$F_2^n = -\varepsilon \nabla u^n \cdot \nabla \tau^n + \delta |\hat{v}^n|^2 + F_2, \quad q^n = q_{\tau^n} + q_{v^n} + q_F.$$

Однозначная разрешимость в целом задач (32) – (34) и (35) – (37) доказана в [6, 7]. Соответствующие обобщенные решения при этом удовлетворяют неравенствам

$$\left|\tau^{n+1}\right|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} + \varepsilon^{\gamma_2} \|\nabla \tau\|_{2+2\gamma_2,\, \Omega_1^T}^{1+\gamma_2} \le$$

$$\le c_1\left[\|\tau_0\|_{\Omega_2} + \varepsilon \left\|\nabla u^n \cdot \nabla \tau^n\right\|_{10/7,\, \Omega_1^T} + \delta \left\|\hat{v}^n\right\|_{20/7,\, \Omega_1^T}^2 + |||F_2|||_{p_2,\, \Omega_2^T}\right], \tag{40}$$

$$\left|v^{n+1}\right|_{\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + \delta^{\gamma_1} \left\|\hat{v}^{n+1}\right\|_{2+2\gamma_1,\, \Omega_1^T}^{1+\gamma_1} \le$$

$$\le c_2\Big[\|\mathring{v}\|_{\Omega_1} + \|\tau_0\|_{\Omega_2} + \left\|\tau^n - \varepsilon^{-1} \mathcal{F}(\varepsilon\tau^n)\right\|_{10/7,\, \Omega_1^T} + \varepsilon\Big(\left\|U(v^n, u^n)\right\|_{10/7,\, \Omega_1^T} +$$

$$+ \left\|V(v^n, \tau^n)\right\|_{10/7,\, \Omega_1^T} + \left\|\tau^n \nabla q_{\tau^n}\right\|_{6/5,\, 2,\, \Omega_1^T} + \left\|\tau^n \nabla q_{v^n}\right\|_{p(p-1)^{-1},\, 4p(p+6)^{-1},\, \Omega_1^T} +$$

$$+ \left\|\tau^n \nabla q_F\right\|_{p(p-1)^{-1},\, 4p(p+6)^{-1},\, \Omega_1^T}\Big) + |||\overline{F}_1|||_{p_1,\, \Omega_1^T} + |||F_2|||_{r_2,\, \Omega_2^T}\Big] \tag{41}$$

$$\left(n = -1, 0, 1, 2, \ldots;\ u^{-1} = \tau^{-1} = v^{-1} = 0;\ 2 \le p \le 90\gamma_2(35\gamma_2 + 14)^{-1}\right).$$

В соответствии с общей теорией линейных и квазилинейных (с монотонной нелинейностью) эллиптических уравнений краевые задачи (38) и (39) также однозначно разрешимы, а их обобщенные решения удовлетворяют неравенствам

$$\left\| \nabla q^n \right\|_{\Omega_1} \le c_3 \left[\left\| \tau^n \right\|_{\Omega_1} + \left\| (v^n \cdot \nabla) v^n \right\|_{\Omega_1} + \| \overline{F}_1 \|_{\Omega_1} \right], \tag{42}$$

$$\varepsilon^{1/2} \left\| \Delta u^n \right\|_{\Omega_1^T} + \left\| \nabla u^n \right\|_{\Omega_1^T} + \varepsilon^{\gamma_3} \left\| \nabla u^n \right\|^{1+\gamma_3}_{2+2\gamma_3,\, \Omega_1^T} \le$$

$$\le c_4 \left(\left\| \nabla \tau^n \right\|_{\Omega_1^T} + \| F_2 \|_{6/5,\, 2,\, \Omega_1^T} \right), \tag{43}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (при этом оценка (42) справедлива при почти всех t из $[0, T]$).

Положив

$$M_1 \equiv M_1(\tau_0, \overline{F}) = 3c_1 \left(\| \tau_0 \|_{\Omega_2} + ||| F_2 |||_{p_2,\, \Omega_2^T} \right), \quad \overline{F} = (F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_2),$$

$$M_2 \equiv M_2(\tau_0, \mathring{v}, \overline{F}) = 5c_2 \left(\| \tau_0 \|_{\Omega_2} + \left\| \mathring{v} \right\|_{\Omega_1} + ||| \overline{F}_1 |||_{p_1,\, \Omega_1^T} + ||| F_2 |||_{p_2,\, \Omega_2^T} \right),$$

покажем, что последовательность (v^n, τ^n, q^n, u^n) ограничена, т. е. для всякого $n = 0, 1, \ldots$ выполняются оценки

$$I_{\tau^n} \equiv \left| \tau^n \right|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} + \varepsilon^{\gamma_2} \left\| \nabla \tau^n \right\|^{1+\gamma_2}_{2+2\gamma_2,\, \Omega_1^T} \le M_1, \tag{44}$$

$$I_{v^n} \equiv \left| v^n \right|_{J_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + \delta^{\gamma_1} \left\| \hat{v}^n \right\|^{1+\gamma_1}_{2+2\gamma_1,\, \Omega_1^T} \le M_2, \tag{45}$$

$$\max_{0 \le t \le T} \| \nabla q_{\tau^n} \|_{\Omega_1} \le c_3 M_1, \quad \| \nabla q_{v^n} \|_{2,\, 6/5,\, \Omega_1^T} \le c_3 \delta^{-1/3} M_2^{5/3},$$

$$\| q_{v^n} \|_{2,\, 4/3,\, \Omega_1^T} \le c_3 M_2^2, \quad \| \nabla q_F \|_{2,\, 6/5,\, \Omega_1^T} \le c_3 \| \overline{F}_1 \|_{2,\, 6/5,\, \Omega_1^T}, \tag{46}$$

$$\varepsilon^{1/2} \left\| \Delta u^n \right\|_{\Omega_1^T} + \left\| \nabla u^n \right\|_{\Omega_1^T} + \varepsilon^{\gamma_3} \left\| \nabla u^n \right\|^{1+\gamma_3}_{2+2\gamma_3,\, \Omega_1^T} \le$$

$$\le c_4 \left(c_3 M_1 + \| F_2 \|_{6/5,\, 2,\, \Omega_1^T} \right) \equiv M_3. \tag{47}$$

Действительно, при $n = 0$ неравенства (44) – (47) справедливы. Предполагая, что они выполняются для n-й итерации, из неравенства (40) получаем (см. оценки (28), (29))

$$I_{\tau^{n+1}} \le c_1 \left(\| \tau_0 \|_{\Omega_2} + ||| F_2 |||_{p_2,\, \Omega_2^T} \right) +$$

$$+ c_5 \left[\varepsilon \left| \tau^n \right|_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \left\| \nabla u^n \right\|_{\Omega_1^T}^{\frac{2\gamma_3 - 3}{5\gamma_3}} \left\| \nabla u^n \right\|_{2+2\gamma_3,\, \Omega_1^T}^{\frac{3(\gamma_3 + 1)}{5\gamma_3}} + \delta \left\| \nabla v^n \right\|_{\Omega_1^T}^{\frac{7\gamma_1 - 3}{5\gamma_1}} \left\| \hat{v}^n \right\|_{2+2\gamma_1,\, \Omega_1}^{\frac{3(\gamma_1 + 1)}{5\gamma_1}} \right] \le$$

$$\le \frac{1}{3} M_1 + c_5 \left(\varepsilon^{2/5} M_1 M_3^{2/5} + \delta^{2/5} M_2^{7/5} \right) \le M_1,$$

если

$$3c_5 \varepsilon^{2/5} M_3^{2/5} \le 1, \quad 3c_5 \delta^{2/5} M_2^{7/5} \le M_1. \tag{48}$$

Из неравенства (41) согласно (22), (26), (27), (30) имеем

$$I_{v^{n+1}} \le c_2 \left(\|\tau_0\|_{\Omega_2} + \| \mathring{v} \|_{\Omega_1} + ||| \overline{F}_1 |||_{p_1,\, \Omega_1^T} + ||| F_2 |||_{p_2,\, \Omega_2^T} \right) +$$

$$+\ c_6\left[\varepsilon^{\gamma}\left(\left|\tau^n\right|^{\gamma+1}_{V^{1,0}_{2,0}(\Omega_2^T)} + \max_{0\le t\le T}\left\|\tau^n\right\|^{\frac{2(\gamma+1)}{5}}_{\Omega_1}\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{7\gamma_2-3\gamma+4}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{(3\gamma-4)(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\,\Omega_1^T}\right) +\right.$$

$$+\ \varepsilon\left|v^n\right|_{\overset{\circ}{J}{}^{1,0}_2(\Omega_1^T)}\left(\left\|\nabla u^n\right\|^{\frac{2\gamma_3-3}{5\gamma_3}}_{\Omega_1^T}\left\|\nabla u^n\right\|^{\frac{3(\gamma_3+1)}{5\gamma_3}}_{2+2\gamma_3,\,\Omega_1^T} + \left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{2\gamma_2-3}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{3(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\right) +$$

$$\left. +\ \varepsilon(I_3+I_2+I_3)\right],$$

где

$$I_1 \equiv \left\|\tau^n\nabla q_{\tau^n}\right\|_{6/5,\,2,\,\Omega_1^T} \le c_7\left(\int_0^T\left\|\nabla q_{\tau^n}\right\|^2_{\Omega_1}\left\|\tau^n\right\|^2_{3,\,\Omega_1}dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le c_8\left(\int_0^T\left\|\tau^n\right\|^2_{\Omega_1}\left\|\nabla\tau^n\right\|^2_{\Omega_2}dt\right)^{1/2} \le c_9\max_{0\le t\le T}\left\|\tau^n\right\|_{\Omega_1}\left\|\nabla\tau^n\right\|_{\Omega_2^T},$$

$$I_2 \equiv \left\|\tau^n\nabla q_{v^n}\right\|_{\frac{p}{p-1},\,\frac{4p}{p+6},\,\Omega_1^T} \le c_{10}\left[\int_0^T\left(\left\|\left(v^n\cdot\nabla\right)v^n\right\|_{\Omega_1}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\Omega_1}\right)^{\frac{4p}{p+6}}dt\right]^{\frac{p+6}{4p}} \le$$

$$\le c_{11}\left[\int_0^T\left(\left\|v^n\right\|_{6,\,\Omega_1}\left\|\nabla v^n\right\|_{3,\,\Omega_1}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\Omega_1}\right)^{\frac{4p}{p+6}}dt\right]^{\frac{p+6}{4p}} \le$$

$$\le c_{12}\left[\int_0^T\left(\left\|\nabla v^n\right\|_{\Omega_1}\left\|\hat{v}^n\right\|_{3,\,\Omega_1}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\Omega_1}\right)^{\frac{4p}{p+6}}dt\right]^{\frac{p+6}{4p}} \le$$

$$\le c_{12}\left\|\nabla v^n\right\|_{\Omega_1^T}\left\|\hat{v}^n\right\|_{3,\,\Omega_1^T}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\frac{12p}{18-7p},\,\Omega_1^T} \le$$

$$\le c_{13}\left\|\nabla v^n\right\|^{\frac{5\gamma_1-1}{3\gamma_1}}_{\Omega_1^T}\left\|\hat{v}^n\right\|^{\frac{\gamma_1+1}{3\gamma_1}}_{2+2\gamma_1,\,\Omega_1^T}\max_{0\le t\le T}\left[\left\|\tau^n\right\|^{\frac{17p-30}{10p}}_{\Omega_1}\times\right.$$

$$\left.\times\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{90\gamma_2-35p\gamma_2-14p}{30p\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{7(\gamma_2+1)}{15\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\,\Omega_1^T} + \left\|\tau^n\right\|^{\frac{13p-18}{6p}}_{\Omega_1}\left\|\nabla\tau^n\right\|^{\frac{18-7p}{6p}}_{\Omega_2^T}\right]$$

(см. неравенства (30)); и

$$I_3 \equiv \left\|\tau^n\nabla q_F\right\|_{\frac{p}{p-1},\,\frac{4p}{p+6},\,\Omega_1^T} \le \left[\int_0^T\left(\left\|\overline{F}_1\right\|_{\Omega_1}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\Omega_1}\right)^{\frac{4p}{p+6}}dt\right]^{\frac{p+6}{4p}} \le$$

$$\le c_{14}\left\|\overline{F}_1\right\|_{2,\,6/5,\,\Omega_1^T}\left\|\tau^n\right\|_{\frac{2p}{p-2},\,\frac{12p}{18-7p},\,\Omega_1^T} \le c_{15}\left\|\overline{F}_1\right\|_{2,\,6/5,\,\Omega_1^T}\times$$

$$\times \max_{0\le t\le T}\left(\|\tau^n\|_{\Omega_1}^{\frac{17p-30}{10p}}\|\nabla\tau^n\|_{\Omega_1^T}^{\frac{90\gamma_2-35p\gamma_2-14p}{30p\gamma_2}}\|\nabla\tau^n\|_{2+2\gamma_2,\,\Omega_1^T}^{\frac{7(\gamma_2+1)}{15\gamma_2}} + \right.$$

$$\left. + \|\tau^n\|_{\Omega_1}^{\frac{13p-18}{6p}}\|\nabla\tau^n\|_{\Omega_1^T}^{\frac{18-7p}{6p}}\right).$$

Таким образом,

$$I_{v^n} \le \frac{1}{5}M_2 + c_6\Big[\varepsilon^\gamma M_1^{\gamma+1} + \varepsilon^{\frac{2(\gamma+2)}{5}}M_1^{\frac{2\gamma+9}{5}} + \varepsilon^{2/5}M_2\big(M_3^{2/5}+M_1^{2/5}\big) +$$

$$c_9\varepsilon M_1^2 + c_{13}\varepsilon\delta^{-1/3}M_2^{5/3}\big(M_1+\varepsilon^{-7/15}M_1^{8/15}\big) +$$

$$+ c_{15}\|\overline{F_1}\|_{2,\,6/5,\,\Omega_1^T}\left(\varepsilon M_1+\varepsilon^{8/15}M_1^{8/15}\right)\Big] \le M_2,$$

если

$$5c_6[\varepsilon^\gamma M_1^{\gamma+1} + \varepsilon^{2(\gamma+2)/5}M_1^{2(\gamma+2)/5} + \varepsilon^{2/5}M_2(M_3^{2/5}+M_1^{2/5})] \le M_2, \tag{49}$$

$$5c_6c_9\varepsilon M_1^2 \le M_2, \tag{50}$$

$$5c_6c_{13}\varepsilon\delta^{-1/3}M_2^{2/3}\big(M_1+\varepsilon^{-7/15}M_1^{8/15}\big) \le 1, \tag{51}$$

$$5c_6c_{15}\|\overline{F_1}\|_{2,\,6/5,\,\Omega_1^T}\big(\varepsilon M_1+(\varepsilon M_1)^{8/15}\big) \le M_2. \tag{52}$$

Первое неравенство (46) следует из (44), доказательство второго аналогично оценке для I_2, а третье и четвертое вытекают из замечания (5).

Неравенство (47) выводится из уравнения (39) и оценки (44).

Итак, неравенства (44) – (47) доказаны, и следовательно, найдуться подпоследовательности v^{n_k}, τ^{n_k}, q^{n_k}, u^{n_k}, сходящиеся слабо (вместе с производными) в соответствующих пространствах к некоторым функциям v, τ, q, u. Эта сходимость позволяет, как и в [6, 7], осуществить предельный переход при $n_k\to\infty$ и вывести для v и τ энергетические равенства. Тем самым, получена следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1^0 – 5^0 *и неравенства* (48) – (52), *то существует обобщенное решение задачи* (8) – (15), *удовлетворяющее оценкам* (44) – (47) *и равенствам*

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} v^2dx\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_1^{t_1}}\left[\nu(\varepsilon\tau)+\delta^{2\gamma_1}|\hat{v}|^{2\gamma_1}\right]|\hat{r}|^2\,dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega_1^{t_1}}\left\{\overline{F_1} - \frac{g}{\varepsilon}\mathcal{F}(\varepsilon\tau) + \varepsilon[U(v,u)+V(v,\tau)-\tau\nabla q]\right\}v\,dx\,dt,$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_2}\sigma\tau^2\,dx\Big|_{t=0}^{t=t_1} + \int_{\Omega_1^{t_1}}\kappa_0(\varepsilon\tau)|\nabla\tau|^2\,dx\,dt + \varepsilon^{2\gamma_2}\int_{\Omega_1^{t_1}}|\nabla\tau|^{2+2\gamma_2}\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2^{t_1}} \left(F_2 - \varepsilon \nabla u \cdot \nabla \tau + \delta |\hat{v}|^2\right) dx\, dt$$

при всех t_1 *из* $[0, T]$.

Во второй части работы доказана сильная сходимость этой подпоследовательности, единственность найденного обобщенного решения и исследованы вопросы его устойчивости.

1. *Мосеенков В. Б.* Асимптотические методы исследования конвективного движения вязкой слабо сжимаемой жидкости. – Киев, 1990. – 53 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90. 2).
2. *Мосеенков В. Б.* Асимптотика несоленоидальных течений, возникающих при конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости // Специальные граничные задачи теории теплообмена. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 61 – 78.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А.* Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – **52**. – С. 52 – 109.
4. *Солонников В. А.* О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения сжимаемой вязкой жидкости // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – **56**. – С. 128 – 142.
5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 319 с.
6. *Ладыженская О. А.* О модификациях уравнений Навье – Стокса для больших градиентов скоростей // Зап. науч. семинаров Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **7**. – С. 126 – 154.
7. *Мосеенков В. Б.* О разрешимости в целом трехмерной начально-краевой задачи для модифицированных уравнений термоконвекции. – Киев, 1984. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84. 17).
8. *Галицин А. С., Мосеенков В. Б., Легейда Г. А.* Однозначная разрешимость в целом одной квазилинейной задачи нестационарной конвекции вязкой жидкости // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 12. – С. 7 – 10.
9. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна // Докл. АН СССР. Сер. А. – 1971.– **201**. – № 1. – С. 36 – 39.
10. *Nirenberg L.* On Elliptic Partial Differential Equations // Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Ser. III. – 1959. – **13**, Fasc. III. – P. 115 – 162.

Получено 04. 12. 92