УДК 519.1

В. К. Медведев, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

СИСТЕМА КООРДИНАТ И КОМБИНАТОРНЫЕ ОБЪЕКТЫ (ПРИМЕР ОБОБЩЕННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА)

By using an example of a generalized quadrangle, we verify the assumption that coordinate systems (distinct from the standard Cartesian coordinate system) exist not only in an arbitrary projective plane, where they are determined by a nondegenerate quadrangle, but also in some other combinatorial objects.

На прикладі узагальненого чотирикутника підтверджується припущення про те, що системи координат (відмінні від звичайної декартової) існують не лише в довільній проективній площині, де вони визначаються невиродженим чотирикутником, але і в деяких інших комбінаторних об'єктах.

Известно [1], что в произвольной проективной плоскости невырожденный четырехугольник определяет систему координат. Система координат, в свою очередь, определяет некоторую алгебраическую систему, называемую тернарным кольцом. По мнению автора, системы координат (вообще говоря, отличающиеся от привычной декартовой) существуют и в некоторых других комбинаторных структурах. Настоящая статья имеет целью подтвердить это предположение на примере обобщенного четырехугольника.

Обобщенным четырехугольником называется структура инцидентности $S = (P, B, I)$, в которой отношение инцидентности симметрично и удовлетворяет следующим аксиомам:

1) каждая точка инцидентна $1+t$ линиям $(t \geq 1)$ и две различные точки инцидентны не больше чем одной линии;

2) каждая линия инцидентна $1+s$ точкам $(s \geq 1)$;

3) если x — точка, а L — линия, не инцидентная точке x, то существуют ровно одна прямая L_1 и одна точка x_1 такие, что xIL_1Ix_1IL.

Будем говорить, что прямая проходит через точку, две прямые пересекаются и т. д., имея в виду очевидный смысл этих слов. Тогда, например, аксиома 3 означает, что если x — точка, не лежащая на некоторой прямой L, то существует ровно одна прямая, проходящая через точку x и пересекающая прямую L. Назовем две точки x и y коллинеарными, если через них проходит прямая.

Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — четыре различные точки обобщенного четырехугольника такие, что существуют прямые O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1 и все эти прямые различны (такая конфигурация существует; возьмем, например, две непересекающиеся прямые, точки O_1, O_2 на первой из них и точки O_3, O_4 на второй прямой, коллинеарные соответственно точкам O_1, O_2). На прямой O_4O_3 возьмем точку O_5, отличную от точек O_4 и O_3. Такая точка, очевидно, существует, если $s \geq 2$. Проведем через точку O_1 прямую L, отличную от прямых O_1O_2 и O_1O_4. Такая прямая существует, если $t \geq 2$. Из точки O_3 опустим прямую L_1 на прямую L; пусть O_6 — точка пересечения. Точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 обобщенного четырехугольника удовлетворяют следующим условиям:

1) точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 различны;

2) существуют прямые O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1 и они все различны;

3) точки O_3, O_4, O_5 лежат на одной прямой;

4) существуют прямые O_1O_6 и O_3O_6, и прямая O_1O_6 отлична от прямых O_1O_2, O_1O_4.

Всякую упорядоченную шестерку точек обобщенного четырехугольника, удовлетворяющую условиям 1 – 4, будем называть невырожденной шестеркой точек (по аналогии с невырожденным четырехугольником в проективных пло-

© В. К. МЕДВЕДЕВ, 1994

скостях).

Как мы показали выше, невырожденные шестерки точек существуют тогда и только тогда, когда $s \geq 2$, $t \geq 2$.

Если мы рассмотрим точку O_7 на прямой O_1O_6, коллинеарную точке O_5, то получим следующее простое описание невырожденных шестерок. Пусть даны две непересекающиеся прямые, различные точки O_1, O_6, O_7 на одной из них и соответственно коллинеарные им точки O_4, O_3, O_5 на другой. Пусть дана точка O_2, коллинеарная как точке O_1, так и точке O_3, такая, что прямая O_6O_2 отлична от прямой O_6O_1, прямая O_3O_2 отлична от прямой O_3O_4. Тогда такая семерка точек $O_1 - O_7$ определяет невырожденную шестерку точек $O_1 - O_6$, и обратно: очевидно, всякая невырожденная шестерка точек $O_1 - O_6$ определяет семерку точек $O_1 - O_7$.

Пусть $O_1 - O_6$ — невырожденная шестерка точек. Покажем, что она задает систему координат обобщенного четырехугольника.

Рассмотрим множества U и V такие, что $|U| = s$, $|V| = t$ (U и V — два множества „чисел"; необходимы два множества „чисел", поскольку s может быть не равным t; в проективных плоскостях, где $s = t$, достаточно одного множества „чисел" [2]). Назовем множество U множеством p-чисел, множество V — множеством l-чисел (p-point, l-line). Точкам прямой O_3O_2, за исключением точки O_2, сопоставим взаимно однозначно элементы множества U; прямым, проходящим через точку O_3, за исключением прямой O_3O_6, сопоставим взаимно однозначно элементы множества V.

Пусть l — произвольная прямая, проходящая через точку O_1 и не совпадающая с прямой O_1O_2. Тогда каждой точке на прямой l соответствует коллинеарная ей точка на прямой O_2O_3 и это соответствие взаимно однозначно. Следовательно, каждой точке прямой l, за исключением точки O_1 (ей соответствует точка O_2), соответствует некоторое p-число. Точкам прямой O_1O_2, за исключением точки O_1, сопоставим p-числа следующим образом. Каждой точке прямой O_1O_6 соответствует коллинеарная ей точка на прямой O_4O_3. С другой стороны, каждой точке прямой O_4O_3 соответствует коллинеарная ей точка на прямой O_1O_2. Таким образом, точкам прямой O_1O_6 каноническим образом взаимно однозначно соответствуют точки прямой O_1O_2, при этом точка O_1 соответствует сама себе. Отсюда точкам прямой O_1O_2, за исключением точки O_1, также каноническим образом сопоставлены p-числа, поскольку они сопоставлены точкам прямой O_1O_6, за исключением точки O_1.

Каждой прямой, проходящей через точку O_1, соответствует одна и только одна прямая, пересекающая ее и проходящая через точку O_3. Причем это соответствие между прямыми, проходящими через точку O_1, и прямыми, проходящими через точку O_3, взаимно однозначно. Следовательно, каждой прямой, проходящей через точку O_1, за исключением прямой O_1O_6, соответствует некоторое l-число. Сопоставим каждой точке, лежащей на прямой, проходящей через точку O_1, пустой символ $\varnothing$, если эта точка совпадает с точкой O_1, соответствующее (см. выше) p-число $u \in U$, если эта прямая — прямая O_1O_6, и пару чисел (v, u), $v \in V$, $u \in U$, если этой прямой соответствует l-число $v \in V$ (см. выше), а этой точке соответствует p-число $u \in U$. Таким образом, все точки, лежащие на прямых, проходящих через точку O_1, получили координаты.

Каждой прямой, проходящей через точку O_1, сопоставим пустой символ $\varnothing$, если эта прямая — прямая O_1O_6, либо l-число $v \in V$, если этой прямой соответствует l-число v. Таким образом, все такие прямые получили координаты.

Введем теперь координаты точек, не лежащих на прямых, проходящих через точку O_1, а также координаты прямых, не проходящих через точку O_1.

Сначала сопоставим координаты каждой прямой, пересекающей прямую O_1O_6, но не в точке O_1. Пусть эта прямая пересекает прямую O_1O_6 в некоторой точке N, координата которой $u \in U$ (координаты для точек, лежащих на прямых, проходящих через точку O_1, мы ввели выше). Рассмотрим первы случай, когда точка N не совпадает с точкой O_6. В этом случае каждой пря мой, проходящей через точку N, соответствует прямая, пересекающая ее и проходящая через точку O_3. Причем это соответствие между прямыми, проходящими через точку O_3, и прямыми, проходящими через точку N, взаимно однозначно. Следовательно, каждой прямой, проходящей через точку N, за исключением прямой O_1O_6 (ей соответствует прямая O_3O_6), соответствует каноническим образом некоторое l-число.

Рассмотрим второй случай, когда точка N совпадает с точкой O_6. В этом случае каждой прямой, проходящей через точку O_6, сопоставим l-числа следующим образом. Каждой прямой, проходящей через точку O_6, соответствует прямая, пересекающая ее и проходящая через точку O_5, и это соответствие взаимно однозначно. В свою очередь, каждой прямой, проходящей через точку O_5, соответствует прямая, пересекающая ее и проходящая через точку O_1, и это соответствие взаимно однозначно. Отсюда, каждой прямой, проходящей через точку O_5, за исключением прямой, пересекающей прямую O_1O_6, сопоставлено каноническим образом некоторое число $v \in V$ (поскольку выше всем прямым, проходящим через точку O_1, за исключением прямой O_1O_6, сопоставлены l-числа). Таким образом, и каждой прямой, проходящей через точку O_6, отличной от прямой O_1O_6, сопоставлено l-число (отметим, что этим роль точки O_5 и ограничивается; в качестве точки O_5 можно было бы взять любую точку, не коллинеарную как с точкой O_1, так и с точкой O_6, не обязательно лежащую на прямой O_4O_3, хотя это и несколько изменило бы аксиомы; таких возможных допущений в выборе системы координат достаточно много, и все они оказывают влияние на аксиоматику). Таким образом, в любом случае каждой прямой, проходящей через точку N (координата которой $u \in U$), за исключением прямой O_1O_6, соответствует некоторое l-число v. Координатами этой прямой будем считать пару (u, v). Координатами любой точки M, не лежащей на прямых, проходящих через точку O_1, будем считать тройку (u, v, u_1), $u, u_1 \in U$, $v \in V$, где (u, v) — координаты прямой, проходящей через точку M и пересекающей прямую O_1O_6, а u_1 — p-число, совпадающее с p-числом точки, лежащей на прямой O_1O_2 и коллинеарной с точкой M. Очевидно, установленное соответствие между точками, не принадлежащими прямым, проходящим через точку O_1, и множеством $U \times V \times U$ является взаимно однозначным. Осталось ввести координаты для прямых, не пересекающих прямую O_1O_6. Для произвольной такой прямой l опустим из точки O_1 прямую на прямую l. Пусть этой прямой соответствует l-число $v \in V$, а точке пересечения этой прямой с прямой l соответствует p-число u. Опустим из точки O_6 прямую на прямую l. Пусть этой прямой соответствует l-число v_1. Тройку (v, u, v_1) и будем считать координатами прямой l. Очевидно, установленное соответствие между прямыми, не пересекающими прямую O_1O_6, и множеством $V \times U \times V$ является взаимно однозначным. Подведем итоги.

Предложение 1. *Множество всех точек (прямых) обобщенного четырехугольника взаимно однозначно соответствует множеству*

$$\{\varnothing\} \vee \{U\} \vee \{V \times U\} \vee \{U \times V \times U\}$$

$$(\{\varnothing\} \vee \{V\} \vee \{U \times V\} \vee \{V \times U \times V\}).$$

Отметим, что при этом пустому символу $\varnothing$ соответствует точка O_1 (прямая O_1O_6), множеству $U(V)$ — совокупность точек (прямых), принадлежащих прямой O_1O_6 (проходящих через точку O_1) и отличных от точки O_1 (прямой O_1O_6), множеству $V \times U$ $(U \times V)$ — совокупность всех точек (прямых), за исключением точки O_1 (прямой O_1O_6), лежащих на прямых, проходящих через точку O_1 (пересекающих прямую O_1O_6), множеству $U \times V \times U$ $(V \times U \times V)$ — совокупность всех точек (прямых), не лежащих на прямых (не пересекающих прямую), проходящих (пересекающих) через точку O_1 (прямую O_1O_6).

Таким образом, шестерка точек $O_1 - O_6$ действительно является системой координат обобщенного четырехугольника.

Назовем словом любую конечную последовательность p- и l-чисел, в которой за каждым p-числом следует l-число, а за каждым l-числом следует p-число (p-числа представляют собой аналог гласных букв, а l-числа — согласных). Длиной слова назовем количество чисел в соответствующей последовательности. Тогда предложение 1 равносильно следующему предложению.

Предложение 2. *Совокупность точек (прямых) обобщенного четырехугольника есть совокупность слов длины меньше* 4, *оканчивающихся на p-число (l-число), включая пустое слово.*

Теперь, когда описание координат точек и прямых окончено, перейдем к описанию прямых обобщенного четырехугольника как подмножеств множества точек. Это приводит к определению некоторой алгебраической структуры, также как введение системы координат в проективных плоскостях приводит к определению тернарного кольца. Вначале введем некоторые обозначения и определения.

Пусть $0 \le k \le 4$. Обозначим через W_k множество всех слов длины k (при этом W_0 состоит из пустого слова), через W_U^k (W_V^k) — множество всех слов длины k, первая „буква" которых есть p-число (l-число), через W_k^U (W_k^V) — множество всех слов длины k, последняя „буква" которых есть p-число (l-число). Пусть, далее, $0 \le k_1 \le k_2$, $P_{k_2, k_1} : W_{k_2} \mapsto W_{k_1}$ — отображение множества W_{k_2} во множество W_{k_1}, которое каждому слову w длины k_2 ставит в соответствие слово длины k_1, состоящее из первых k_1 „букв" слова w. Для произвольных слов w_1 и w_2 таких, что либо w_1 заканчивается на p-число, а w_2 начинается на l-число, либо w_1 заканчивается на l-число, а w_2 начинается на p-число, обозначим через w_1w_2 слово, которое образуется, если к слову w_1 приписать справа слово w_2.

Отождествим множество точек обобщенного четырехугольника с множеством всех слов длины меньше 4, оканчивающихся на p-число, включая пустое слово. Тогда справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Существует отображение* $F: W_V^4 \mapsto W_V^2$ *(т. е.* $F: V \times \times U \times V \times U \mapsto V \times U$*) такое, что все прямые обобщенного четырехугольника есть следующие подмножества множества точек обобщенного четырехугольника:*

1) *для произвольного* $1 \leq k < 4$ *и произвольного слова* $w_0 \in W_{k-1}^V$ *подмножество множества* W_k^U, *состоящее из всех слов* $w \in W_k^U$, *для которых* $P_{k,k-1}(w) = w_0$, *а также из слова* $P_{k-1,k-2}(w_0)$, *если* $k \geq 2$, *и пустого слова, если* $k = 1$;

2) *для произвольного элемента* $w_0 \in W_V^3$ *подмножество множества* W_3^U, *состоящее из всех слов вида* $uF(w_0 u)$, *где* $u \in U$, *а также из слова* $P_{3,2}(w_0)$.

Доказательство. Определим отображение F. Пусть $(v, u, v_1, u_1) \in V \times \times U \times V \times U$. Рассмотрим точку с координатами (v, u) (эта точка лежит на прямой, проходящей через точку O_1). Проведем через точку O_6 прямую, соответствующую l-числу v_1 (тогда координаты этой прямой будут (u_0, v), где u_0 — координата точки O_6) и опустим из точки с координатами (v, u) (эта точка лежит на прямой, проходящей через точку O_1) прямую L, пересекающую данную прямую (тогда координаты прямой L будут (v, u, v_1)). Рассмотрим точку на прямой L, коллинеарную с точкой, координата которой равна u_1 (последняя лежит на прямой O_1O_6). Тогда координата этой точки прямой L есть слово (u_1, v', u'), для некоторых $v' \in V$, $u' \in U$. Положим $F(v, u, v_1, u_1) = (v', u')$.

Дальнейшее доказательство очевидно и сводится к перебору случаев с учетом определения координат точек, когда исходная прямая проходит через точку O_1; когда она не проходит через точку O_1, но пересекает ось O_1O_6; когда она не пересекает ось O_1O_6.

Теорема 1. *Отображение* $F: V \times U \times V \times U \to V \times U$ *удовлетворяет следующим условиям (здесь* $p_1F(a, b, c, d)$ *обозначается через* $\langle abcd \rangle$, $p_2F(a, b, c, d)$ *— через* $[abcd]$, *где* $p_1: V \times U \mapsto V$, $p_2: V \times U \mapsto U$ *— проекции соответственно на первую и вторую координату):*

1) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in V$, *уравнение* $\langle dcxa \rangle = b$ *имеет единственное решение относительно* $x \in V$;

2) *каковы бы ни были элементы* $a \in V$, $b \in U$, $c \in V$, $d \in V$, $e \in U$, *система уравнений*

$$\begin{cases} \langle abcy \rangle = \langle dexy \rangle, \\ [abcy] = [dexy] \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно неизвестных $x \in V$, $y \in U$ *при* $a \neq d$;

3) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in V$, *система уравнений*

$$\begin{cases} \langle dxya \rangle = b, \\ [dxya] = c \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно неизвестных $x \in U$, $y \in V$;

4) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in U$, $e \in V$ *при* $a \neq d$, *система уравнений*

$$\begin{cases} \langle xyza \rangle = b, \\ [xyza] = c, \\ \langle xyzd \rangle = e \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно $x \in V$, $y \in U$, $z \in V$;

5) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in V$, $e \in U$, $f \in V$, $g \in V$, *система уравнений*

$$\begin{cases} \langle xyza \rangle = b, \\ [xyza] = c, \\ [xyzu] = [defu], \\ \langle xyzu \rangle = \langle defu \rangle \end{cases}$$

относительно неизвестных $x \in V$, $y \in U$, $z \in V$, $u \in U$ *при* $\langle defa \rangle \neq b$, $\langle dega \rangle = b$, $[dega] \neq c$ *имеет единственное решение*;

6) *существует* $u_0 \in U$ (*координата точки* O_6) *такое, что* $\langle abcu_0 \rangle = c$ *для любых* $a \in V$, $b \in U$, $c \in V$;

7) *существует элемент* $l_0 \in V$ (l_0 *определяется с учетом того, что* (u_0, l_0) — *координата прямой* $O_6 O_3$) *такой, что* $[l_0 u_0 l_0 u] = u$ *при любом* $u \in U$;

8) $[l u_0 l_0 u_0] = u_0$ *при любом* $l \in V$;

9) $\langle l u_0 l_0 u_1 \rangle = l$ *при любом* $u_1 \neq u_0$, $u_1 \in U$;

10) *существует элемент* $l^0 \in V$ (*координата прямой* $O_1 O_2$) *такой, что* $[l^0 u l u_1] = u$ *для любых* $u \in U$, $l \in V$, $u_1 \in U$;

11) *существует элемент* $u^0 \in U$ (u^0 — *координата точки* O_7, *см. выше*) *такой, что система уравнений*

$$\begin{cases} \langle lxlu^0 \rangle = l_0, \\ [lxlu^0] = u^0 \end{cases}$$

имеет решение относительно неизвестной $x \in U$ *при любом элементе* $l \in V$;

12) *система уравнений*

$$\begin{cases} \langle luxu \rangle = l^0, \\ [luxu] = u_0 \end{cases}$$

при любых $l \in V$, $u \in U$, $l \neq l_0$, $u \neq u_0$ *имеет решение относительно неизвестной* $x \in V$.

Наоборот, если для некоторых множеств U и V, $|U| \geq 2$, $|V| \geq 2$ существует отображение $F: V \times U \times V \times U \mapsto V \times U$, удовлетворяющее условиям 1 – 12, то существуют такие обобщенный четырехугольник и невырожденная шестерка точек этого обобщенного четырехугольника, что отображение F совпадает с построенным выше.

Доказательство здесь не приводится (оно легко следует из построения системы координат). Отметим лишь, что при доказательстве условий 1 – 5 используется то свойство, что через каждую точку обобщенного четырехугольника можно провести единственную прямую, пересекающую заданную прямую, не проходящую через данную точку (доказательство состоит в переборе случаев, когда длина слов соответствующих точек и прямой меняется от 0 до 3).

Условия 6 – 12 — аналоги аксиом, постулирующих существование 0 и 1 в тернарном кольце. Они следуют из той роли, которую играли каждая из точек $O_1 - O_6$ и каждая из прямых O_1O_2, O_1O_6, O_3O_6, O_2O_3, O_3O_4. Так, условие 6 следует из того, что последняя „буква" координат прямых, не пересекающих O_1O_2, определяется по прямым, проходящим через точку O_6. Условия 7, 8 следуют из того, что точкам на прямой O_1O_2 p-числа сопоставлены через взаимно однозначное соответствие (с прямой O_4O_3 на промежуточном этапе) с точками прямой O_1O_6 (см. выше). Условие 9 следует из того, что l-числа прямым, проходящим через точку O_1, сопоставлены через каноническое взаимно однозначное соответствие этих прямых и прямых, проходящих через точку O_3. Условие 10 следует из того, что p-числа (точнее, последние „буквы" координат соответствующих точек) точек прямых, пересекающих прямую O_1O_2 (но не в точке O_1), определяются через коллинеацию с точками прямой O_1O_2. Условие 11 следует из того, что последняя „буква" координат прямых, проходящих через точку O_6, определяется через взаимно однозначное соответствие этих прямых прямым, проходящим через точку O_5. Условие 12 следует из того, что p-числа точкам прямых (за исключением прямой O_1O_2), проходящих через точку O_1, сопоставлены в соответствии с их коллинеацией точкам прямой O_2O_3. Отметим, что координаты точек O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6 есть соответственно $\varnothing$, (l^0, u_0), (u_0, l_0, u_0), (l_0, u_0), (u^0, l_0, u^0), u_0; координаты прямых O_1O_6, O_1O_2, O_6O_3, O_2O_3, O_4O_3, O_1O_4 — соответственно $\varnothing$, l^0, (u_0, l_0), (l^0, u_0, l_0), (l_0, u_0, l_0), l_0.

Отображение $F: V \times U \times V \times U \mapsto V \times U$, где U и V — некоторые множества, $|U| \geq 2$, $|V| \geq 2$, удовлетворяющие аксиомам 1 – 12, назовем (в данной статье) кватернарным кольцом. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Два кватернарных кольца изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им обобщенные четырехугольники с выделенными невырожденными шестерками точек изоморфны* (*определения соответствующих изоморфизмов очевидны*).

Доказательство (по сути, очевидное) теоремы 2 также опускаем.

Отметим, что имеется определенная произвольность в выборе системы координат. Например, если бы p-числа точкам прямых, проходящих через точку O_1, мы сопоставляли через коллинеацию с точками прямой O_5O_7 (предварительно сопоставив точкам прямой O_5O_7, за исключением точки O_7, p-числа через коллиниацию с точками прямой O_1O_2), то при неизменных других аксиомах аксиомы 11, 12, 9, 8, 7 приобрели бы вид:

11′) $\langle lu^0lu^0\rangle = l_0$, $[lu^0lu^0] = u^0$ при любом $l \in V$;

12′) для любых $l \in V$, $u \in U$ система уравнений

$$\begin{cases} \langle luxu^0\rangle = u, \\ [luxu^0] = l_0 \end{cases}$$

имеет решение;

9′) для любого $l \in V$ существует элемент $\bar{l} \in U$ такой, что $\langle l\bar{l}\, l_0u_1\rangle = l$ при $u_1 \neq u_0$;

8′) $[l\bar{l}\,l_0u_0] = u_0$ при любом $l \in V$;

7′) $[l_0u^0l_0u] = u$ при любом $u \in U$.

В действительности, как показано в работе [1], любое отображение $F : V \times \times U \times V \times U \mapsto V \times U$, где U и V — произвольные непустые множества (не обязательно $|U| \geq 2$, $|V| \geq 2$), удовлетворяющее аксиомам 1 – 5 (такое отображение естественно было бы назвать кватернаром) приводит к обобщенному четырехугольнику. При этом, скорее всего, когда множества U и V конечны, тогда не все аксиомы 1 – 5 являются независимыми. К сожалению, аксиома 2 теоремы 3 статьи [1] содержит ошибку. Ее правильная формулировка совпадает с аксиомой 5 настоящей статьи.

Можно ожидать, что понятие кватернара для обобщенных четырехугольников сыграет роль, похожую на роль тернара для проективных плоскостей.

Отметим, что, когда $s = t$, тогда множества U и V можно отождествить, так что аксиомы 1 – 12 в этом случае определяют алгебраическую систему.

Как следует из результатов, изложенных выше, так же естественно рассматривать координаты прямой, как и координаты точки. В работе [1] для произвольного обобщенного m-угольника показано, что координаты точек (прямых) — это слова длины меньше m, оканчивающиеся на p-число (l-число) (в системе координат, которую еще надо построить). В частности, это же верно для обобщенных треугольников, т. е. проективных плоскостей. При этом координаты точек и прямых проективной плоскости можно рассматривать, не переходя к соответствующей аффинной геометрии; и эти координаты с учетом того, что в этом случае $s = t$ (значит, множество p-чисел можно отождествить с множеством l-чисел) есть слова длины меньше 3 над множеством „чисел".

Вполне возможно, что именно комбинаторные объекты будут одними и[illegible] естественных приложений идеи Рене Декарта. Как видим, эта идея в[illegible] рамки двух скрещивающихся прямых.

1. *Dembovski P.* Finite Geometries. – Berlin: Springer, 1968. – 375 p.
2. *Медведев В. К.* Об аналоге тернара для обобщенных многоуго[illegible]ков // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, №9. – 1239 – 1244.

Получено 09. 08. 91