УДК 513.83+517.919

І. О. Парасюк, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

РЕДУКЦІЯ ТА КОІЗОТРОПНІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ З НЕПУАССОНОВИМИ КОМУТАТИВНИМИ СИМЕТРІЯМИ. I

The Hamiltonian systems, invariant under the non-Poisson torus action, are considered on a symplectic manifold. Conditions are found under which coisotropic invariant tori filled with quasiperiodic motions exist in these systems.

На симплектичному многовиді розглядаються гамільтонові системи, інваріантні відносно непуассонової дії тора. Виявлені умови існування у таких систем коізотропних інваріантних торів, заповнених квазіперіодичними рухами.

Нехай (M, ω^2) — зв'язний симплектичний $2n$-вимірний многовид. Через $I\,df$ та $\{\cdot,\cdot\}$ будемо позначати відповідно гамільтонове векторне поле гладкої функції $f\colon M \to \mathbb{R}$ та дужку Пуассона, породжену ω^2 [1]. Припустимо, що:

$\boldsymbol{h}_1$) M має структуру головного T^k-розшарування над многовидом N з проекцією $\hat{\pi}\colon M \to N$, причому природна дія k-вимірного тора T^k на M симплектична. Нехай $\mathfrak{t}^k$ — алгебра Лі тора T^k, X_a — векторне поле на M, яке породжує дію відповідної вектору $a \in \mathfrak{t}^k$ однопараметричної підгрупи тора. Розглянемо на M гамільтонову систему з T^k-інваріантним гамільтоніаном $H \circ \hat{\pi}$, $H\colon N \to \mathbb{R}$. Якщо дія тора пуассонова [1], то можна провести редукцію такої системи до гамільтонової системи на $2(n-k)$-вимірному симплектичному многовиді [1, 2].

У даній роботі досліджено випадок непуассонової дії тора, тобто випадок, коли кососиметрична білінійна форма $C'\colon \mathfrak{t}^k \times \mathfrak{t}^k \to \mathbb{R}$ (2-коцикл), визначена співвідношенням $C'(a, b) = \omega^2(X_a, X_b)$ [3], нетривіальна. У цій ситуації замість редукції Марсдена – Вейнстейна ми проводимо редукцію Лі – Картана [4, 5]. Така редукція можлива завдяки тому, що після ототожнення функцій на N з T^k-інваріантними функціями на M дужка Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ природно породжує дужку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_N$ на N. При цьому проекція $\hat{\pi}\colon M \to N$ виконує роль відображення Пуассона [4, 5]. У п. 1 буде показано, що коли редукована система на N цілком інтегровна [1], тоді многовид M розшаровується інваріантними торами вихідної системи, розмірність яких перевищує n. Кожен такий тор є коізотропним многовидом [3, 5] і за певних умов (п. 2) — мінімальною множиною потоку поля $I\,dH \circ \hat{\pi}$.

1. Інтегровність редукованої системи та коізотропні інваріантні тори. На відміну від $\{\cdot,\cdot\}$ дужка $\{\cdot,\cdot\}_N$, взагалі кажучи, вироджена. Опишемо, перш за все, її симплектичні листки.

Нехай $k_0 = \dim \operatorname{Ker} C'$. Для довільного $a \in \operatorname{Ker} C'$ 1-форма $X_a \lrcorner\, \omega^2 \overset{\text{def}}{=} \omega^2(X_a, \cdot)$ замкнена, T^r-інваріантна і обертається в нуль на кожному X_b, $b \in \mathfrak{t}^k$. Тому її можна опустити на N і таким способом визначити на N замкнену 1-форму $\boldsymbol{\theta}$, яка набуває значень у дуальному до $\operatorname{Ker} C'$ просторі $(\operatorname{Ker} C')^*$: $\hat{\pi}^*(\boldsymbol{\theta}(\cdot), a) \overset{\text{def}}{=} X_a \lrcorner\, \omega^2$, $a \in \operatorname{Ker} C'$. Неважко показати, що кожна функція, стала вздовж симплектичного листка, локально є функцією від локального потенціалу форми $\boldsymbol{\theta}$. Рівняння Пфаффа $\boldsymbol{\theta} = 0$ визначає симплектичні листки дужки $\{\cdot,\cdot\}_N$.

Редукція Лі – Картана полягає у тому, що векторне поле $IdH \circ \hat{\pi}$ відображенням $\hat{\pi}$ проектується у векторне поле $I_N dH$, яке допускає обмеження на кожний симплектичний листок дужки $\{\cdot,\cdot\}_N$. Тут $I_N\colon T^*N \to TN$ — відображення розшарувань, для якого $\{f, g\} = df(I_N dg)$ $\forall f, g\colon N \to \mathbb{R}$.

Зробимо тепер такі припущення:

$\boldsymbol{h}_2$) гамільтонова система $I_N dH$ цілком інтегровна, тобто має $m = (2n - k - k_0)/2$ інтегралів $G_1, \ldots, G_m$, для яких набір векторних полів $\{I_N dG_i\}_{i=1}^m$ лінійно незалежний у кожній точці многовиду N і $\{G_i, G_j\} \equiv 0$, $i, j = 1, \ldots, m$;

$\boldsymbol{h}_3$) якщо перетин симплектичного листка зі спільною поверхнею рівня функцій G_i, $i = 1, \ldots, m$, не порожній, то кожна його компонента зв'язності є компактним многовидом (а отже, m-вимірним тором).

У цьому випадку виникає розшарування $\hat{\pi}\colon N \to B$, $\dim B = 2n - k - m = m + k_0 \stackrel{\text{def}}{=} s$, кожен шар якого є m-вимірним тором і співпадає з орбітою дії групи $(\mathbb{R}^m, +)$. Ця дія задається відображенням

$$(\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \in \mathbb{R}^m,\ z \in N) \to \hat{g}^\tau z \stackrel{\text{def}}{=} \hat{g}_1^{\tau_1} \circ \ldots \circ \hat{g}_m^{\tau_m} z,$$

де $(N, \{\hat{g}_i^\tau\}_{t\in\mathbb{R}})$ — потік гамільтонова векторного поля $I_N dG_i$.

Надалі припускатимемо, що:

$\boldsymbol{h}_4$) монодромія розшарування $(N, B, \tilde{\pi})$ [3, 6] тривіальна. Це означає, що існує m таких однозначних гладких відображень $f_j\colon B \to \mathbb{R}^m$, що набір $\{f_j \circ \tilde{\pi}(z)\}$ утворює базис решітки — стаціонарної підгрупи точки z, тобто $\hat{g}^{f_j \circ \tilde{\pi}(z)} z = z$, $z \in N$. Отже, на N маємо m періодичних з періодом 1 потоків

$$\left(N, \{\hat{g}^{tf_j \circ \tilde{\pi}}\}_{t\in\mathbb{R}}\right), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

які попарно комутують між собою.

Покажемо, що ці потоки можна підняти до потоків на M з аналогічними властивостями. Таким чином, можна буде доповнити симплектичну дію тора T^k до симплектичної дії тора T^{k+m} на M.

Відображення $\pi = \tilde{\pi} \circ \hat{\pi}$ визначає розшарування $\pi\colon M \to B$. Оскільки виконується $\boldsymbol{h}_2$), то векторні поля $I\,dG_j \circ \hat{\pi}$ та породжені ними потоки $\left(M, \{g_i^t\}_{t\in\mathbb{R}}\right)$, $i = 1, \ldots, m$, попарно комутують. А тому попарно комутують векторні поля $I\langle f_j \circ \pi, dG \circ \hat{\pi}\rangle$, $j = 1, \ldots, m$, де $G = (G_1, \ldots, G_m) \in \mathbb{R}^m$, $\langle\cdot,\cdot$ — стандартний скалярний добуток у координатному просторі $\mathbb{R}^m$. Ці векторні поля породжують потоки

$$\left(M, \{g^{tf_j \circ \pi}\}_{t\in\mathbb{R}}\right), \quad g^\tau = g_1^{\tau_1} \circ \ldots \circ g_m^{\tau_m}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

що попарно комутують і проектуються при відображенні $\hat{\pi}$ у потоки (1). На відміну від (1) потоки (2), взагалі кажучи, не періодичні. Однак, оскільки орбіти точок $g^{f_j \circ \pi(x)} x$ та x при дії тора T^k співпадають, то точці x можна поставити у відповідність єдиним чином елемент $\psi_j(x) \in T^k$, під дією якого точка $g^{f_j \circ \pi(x)} x$ переходить у точку x. Внаслідок того, що потоки (2) комутують не тільки між собою, але й з дією тора T^k, то ψ_j насправді залежить лише від $\pi(x) \in B$. Таким чином, одержуємо відображення $\psi_j : B \to T^k$.

Припустимо, нарешті, що:

$\boldsymbol{h}_5$) індукований відображенням ψ_j гомоморфізм фундаментальної групи многовиду B у фундаментальну групу тора T^k тривіальний при кожному $j = 1, 2, \ldots, m$.

Тоді існує гладке відображення $a_j : B \to \mathfrak{t}^k$, яке при суперпозиції з експоненціальним відображенням $\mathrm{Exp}: \mathfrak{t}^k \to T^k$ утворює відображення ψ_j. Враховуючи, що дія тора T^k симплектична, а потоки $\left(M, \{g_i^t\}_{t \in \mathbb{R}}\right)$ теж зберігають симплектичну структуру, аналогічно [3] встановлюємо наступне твердження.

Твердження 1. *При кожному* $i = 1, \ldots, m$ *існує гладке відображення* $a_j : B \to \mathfrak{t}^k$ *таке, що векторне поле*

$$I\langle f_j \circ \pi(x), dG \circ \hat{\pi}(x)\rangle + X_{a_j \circ \pi(x)}(x) \tag{3}$$

є локально гамільтоновим і породжує періодичний з періодом 1 *потік на* M.

Вкладемо тепер алгебру Лі тора T^k у простір $\mathbb{R}^r$, $r = k + m$, у вигляді підпростору, натягненого на орти $e_1, \ldots, e_k$, так, щоб потік X_{e_i}, $i = 1, \ldots, k$, був періодичним з найменшим додатним періодом, рівним 1. Кожному орту e_{k+j}, $j = 1, \ldots, m$, поставимо у відповідність векторне поле $X_{e_{k+j}}$, що співпадає з (3). Таким чином, простір $\mathbb{R}^r$ перетворюється у алгебру Лі тора $T^r = \mathbb{R}^r / \mathbb{Z}^r$, який гладко, вільно і симплектично діє на M.

Теорема. *Нехай виконуються припущення* $\boldsymbol{h}_1) - \boldsymbol{h}_5)$. *Тоді* M *має структуру головного* T^r*-розшарування* (M, B, π), *кожен шар якого є коізотропним інваріантним тором будь-якої гамільтонової системи з гамільтоніаном* $H \circ \pi$, *де* $H: B \to \mathbb{R}$. *Природна дія тора* T^r *на* M *симплектична.*

Доведення. Доведемо коізотропність шарів розшарування. Розмірність підпростору у $T_x M$, косоортогонального $T_x \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$, дорівнює $2n - r = 2n - k - m = s$. Розглянемо підпростір $L_x \subset T_x M$, натягнений на підпростір $\{X_a(x)\}_{a \in \mathrm{Ker} C'}$ та вектори $I\, dG_i \circ \hat{\pi}(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Очевидно, $\dim L_x = m + k_0 = s$. Кожен вектор з L_x косоортогональний кожному X_{e_i}, $i = 1, \ldots, r$. Тому косоортогональне доповнення до $T_x \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$, співпадає з L_x. Але $L_x \subset T_x \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(x)$, звідки й випливає коізотропність шару $\pi^{-1}(y)$.

2. Умови нерезонансності симплектичної структури. Оскільки дія тора T^r на M симплектична, то на його алгебрі Лі визначена кососиметрична білінійна форма (2-коцикл) C [3], якій у базисі $\{e_i\}_{i=1}^r$ відповідає матриця $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^r$, $c_{ij} = \omega^2(X_{e_i}, X_{e_j})$. З'ясуємо її структуру.

Базис $\{e_i\}_{i=1}^k$ алгебри Лі тора T^r, вкладеної у $\mathbb{R}^r$, за допомогою скалярного добутку $\langle \cdot, \cdot \rangle$, для якого $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), визначає матрицю $\boldsymbol{C'} = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^k$ коциклу C' і кососиметричний оператор $C' : \mathfrak{t}^k \to \mathfrak{t}^k$ таким чином, що $\omega^2(X_{e_i}, X_{e_j}) = c_{ij} = \langle e_i, C' e_j \rangle$. Маємо розклад $\mathfrak{t}^k = \mathrm{Im}\, C' \oplus$

$\oplus \operatorname{Ker} C'$. Нехай P_I' та P_K' — проектори на компоненти цього розкладу.

Твердження 2. *Для відображення* a_j *з твердження* 1 *вектор* $\gamma_j = P_I' a_j(y)$ *не залежить від* $y \in B$.

Доведення. Матриця C має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C' & C'\boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\gamma}^T C' & \boldsymbol{\gamma}^T C' \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де $\boldsymbol{\gamma} = \|\gamma_{ij}\|_{i=1}^{k}{}_{j=1}^{m}$ — матриця, j-й стовпець якої утворений координатами вектора γ_j у базисі $\{e_i\}_{i=1}^{k}$. Оскільки C — стала матриця, а звуження оператора C' на $\operatorname{Im} C'$ є невиродженим лінійним перетворенням цього простору в себе, то вектор γ_j сталий.

За допомогою формули (4) легко встановити умови нерезонансності симплектичної структури [3], тобто умови того, що кожен шар шарування, яке визначається розподілом $\operatorname{Ker}\left(\omega^2|_{\pi^{-1}(y)}\right)$, всюди щільно заповнює $\pi^{-1}(y)$. Дійсно, нехай у базисі $\{e_i\}_{i=1}^{k}$ вектори $\sigma_i = \sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{ki}$, $i = 1, \ldots, k_0$, утворюють базис $\operatorname{Ker} C'$. З (4) випливає, що вектори

$$\begin{aligned} \kappa_i &= (\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{ki}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m}), \quad i = 1, \ldots, k_0, \\ \kappa_{l+j} &= (\gamma_{1j}, \ldots, \gamma_{kj}, -\delta_{1j}, \ldots, -\delta_{mj}), \quad j = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{5}$$

(їх координати виписано у базисі $\{e_i\}_{i=1}^{k}$) утворюють базис $\operatorname{Ker} C$. Неважко тепер показати, що умову нерезонансності симплектичної структури відносно розшарування (M, B, π) можна сформулювати так: не існує вектора $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$, для якого б виконувались умови

$$n_1 \sigma_{1i} + \ldots + n_k \sigma_{ki} = 0, \quad i = 1, \ldots, k_0;$$

$$n_1 \gamma_{1j} + \ldots + n_k \gamma_{kj} |\operatorname{mod} 1 = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Дії однопараметричної підгрупи тора T^r, породженої вектором κ_i, відповідає локально гамільтонове векторне поле, яке можна подати у вигляді $I\pi^* \theta_i$, де θ_i — 1-форма на B. Форми θ_i, $i = 1, \ldots, s$, на B незалежні. Розклад $dH(y) = \lambda_1(y)\theta_1 + \ldots + \lambda_s(y)\theta_s$ визначає частотні функції гамільтоніана H [3]. Якщо θ_i точні: $\theta_i = dJ_i$, тоді $\lambda_i = \partial H / \partial J_i$. Потік системи з гамільтоніаном H на торі $\pi^{-1}(y)$ визначається дією однопараметричної підгрупи тора T^r, породженої вектором $\lambda_1(y)\kappa_1 + \ldots + \lambda_s(y)\kappa_s$.

Якщо симплектична структура нерезонансна й виконуються певні умови невиродженості відображення $\lambda : B \to \mathbb{R}^s$, де $\lambda(y) = (\lambda_1(y), \ldots, \lambda_s(y))$, то до системи з T^r-інваріантним гамільтоніаном, який має λ_i своїми частотними функціями, можна застосувати КАМ-теорію збурень квазіперіодичних рухів [7].

3. Коізотропні тори на многовиді $\mathbb{R}^{2n-k} \otimes T^k$. Нехай $z = (z_1, \ldots, z_{2n-k})$ — координати у $\mathbb{R}^{2n-k}$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ — координати у $\mathbb{R}^k$. Невироджена 2-форма зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\sum_{1 \le i < j \le 2n-k} a_{ij} dz_i \wedge dz_j + \sum_{i=1}^{2n-k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} dz_i \wedge d\psi_j + \sum_{1 \le i < j \le k} c_{ij} d\psi_i \wedge d\psi_j$$

визначає симплектичну структуру на $\mathbb{R}^{2n-k} \times (\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k) = \mathbb{R}^{2n-k} \times T^k$. У даному випадку $\hat{\pi} : \mathbb{R}^{2n-k} \times T^k \to \mathbb{R}^{2n-k}$. Домовимось надалі вживати спільні позначення для функцій на $\mathbb{R}^{2n-k}$ та їх підняттів у простір добутку $\mathbb{R}^{2n-k} \times T^k$. Це саме стосується дужок Пуассона на $\mathbb{R}^{2n-k} \times T^k$ та одержаних з них у результаті редукції дужок на $\mathbb{R}^{2n-k}$.

Нехай $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k_0}$ — базис розв'язків лінійної однорідної системи з матрицею $C' = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^{k}$. Тоді повний набір функцій Казимира пуассонової структури на $\mathbb{R}^{2n-k}$ має вигляд

$$J_i = \langle z, B\sigma_i \rangle, \quad i = 1, \dots, k_0, \quad B = \|b_{ij}\|_{i=1}^{2n-k}\,{}_{,\, j=1}^{k}.$$

Існують лінійні щодо z функції p_i, q_j, $i, j = 1, \dots, m$, які разом з J_i, $i = 1, \dots, k_0$, утворюють такі координати у $\mathbb{R}^{2n-k}$, що $\{q_i, p_i\} = 1$, $i = 1, \dots, m$, а дужки попарних комбінацій всіх інших координатних функцій дорівнюють нулю.

Нехай $G_i(q_i, p_i, J)$, $i = 1, \dots, m$, — набір функцій у інволюції, про який іде мова у п. 1, N — область у $\mathbb{R}^{2n-k}$, де виконуються припущення $\boldsymbol{h}_2) - \boldsymbol{h}_5)$. Покладемо $M = N \times T^k$.

Покажемо, що векторні поля (3) для такого M глобально гамільтонові і знайдемо їх гамільтоніани.

Розглянемо одну з форм $\theta = \theta_i$, $i = k_0 + 1, \dots, s$, визначених у кінці п. 2. В околі U точки $y_0 \in B$ ця форма точна. Тому на $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ існує функція $h(p, q, J)$, така, що $dh = \tilde{\pi}^* \theta$. Векторне поле $I_N dh$ породжує періодичний з періодом 1 потік $g_h^t(p, q, J) = (p^t(p, q, J), q^t(p, q, J), J)$ для якого кожен тор $\tilde{\pi}^{-1}(y)$, $y \in U$, інваріантний.

Симплектична структура на підпросторі, заданому рівняннями $J_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, k_0$, має стандартний вигляд $dp \wedge dq = d\alpha$, де $\alpha = p\, dq$. Оскільки

$$d\alpha(\cdot, I_N dh) = \frac{\partial h}{\partial p} dp + \frac{\partial h}{\partial q} dq, \quad h(p^t, q^t, J) \equiv h(p, q, J)$$

і за формулою гомотопії

$$d\alpha(\cdot, I_N dh) = d(\alpha(I_N dh)) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g_h^t)^* \alpha,$$

то

$$dh = d\alpha(I_N dh) - \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (g_h^t)^* \alpha + \frac{\partial h}{\partial J} dJ = dh(p^t, q^t, J) =$$

$$= (g_h^t)^* dh = d\left[\alpha\left(\frac{d}{dt}\, g_h^t(p, q, J) \right) \right] - \frac{d}{dt} (g_h^t)^* \alpha + \frac{\partial h}{\partial J}\Big|_{p = p^t,\, q = q^t} dJ,$$

звідки

$$dh = d\left(\int_0^1 \alpha\left(\frac{d}{dt}\, g_h^t(p, q, J) \right) dt + \left(\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial J}\Big|_{p = p^t,\, q = q^t} dt \right) dJ.$$

Але для будь-якого циклу $c = c(y)$ на торі $\tilde{\pi}^{-1}(y)$ гомологічного циклу $\{g_h^t(p,q,J)\}_{t\in[0,1]}$ маємо

$$\int_0^1 \alpha\left(\frac{d}{dt}\, g_h^t(p,q,J)\right)dt = \int_{c(y)} \alpha \overset{\text{def}}{=} A_{c(y)}.$$

Це відомий інтеграл дії [1]. З наведених вище міркувань випливає, що в околі тора $\tilde{\pi}^{-1}(y_0)$ існує така функція $w(J)$, що $h = A_{c(y)} + w(J)$, $(p,q,J) \in \tilde{\pi}^{-1}(y)$, а оскільки $I_N\, dw = 0$, то потоки, породжені функціями h та $A_{c(y)}$, співпадають.

З'ясуємо структуру функції $w(J)$.

Піднімемо функцію h у $\tilde{\pi}^{-1}(U) \subset M$. Потік, породжений полем $I\,dh$, періодичний з періодом 1; ψ-компонента потоку знаходиться з рівняння

$$\dot{\psi} = \{\psi, p\}\frac{\partial h}{\partial p} + \{\psi, q\}\frac{\partial h}{\partial q} + \{\psi, J\}\frac{\partial h}{\partial J}$$

і має вигляд

$$\psi^t(p,q,J,\psi) = \{\psi, p\}\int_0^t \frac{\partial h}{\partial p}\bigg|_{p=p^\tau,\, q=q^\tau} d\tau + \{\psi, q\}\int_0^t \frac{\partial h}{\partial q}\bigg|_{p=p^\tau,\, q=q^\tau} d\tau +$$

$$+ \{\psi, J\}\int_0^t \frac{\partial h}{\partial J}\bigg|_{p=p^\tau,\, q=q^\tau} d\tau + \psi.$$

Тут враховано, що p, q, J лінійні щодо z і тому їх дужки Пуассона з ψ сталі. Умова періодичності потоку має вигляд $(\psi^1(p,q,J,\psi) - \psi)\,|\operatorname{mod} \mathbb{Z}^k = 0$. Враховуючи рівняння $\dot{p} = -\partial h/\partial q$, $\dot{q} = \partial h/\partial p$ та означення $w(J)$, її можна переписати у вигляді $\{\psi, w(J)\}\,|\operatorname{mod}\mathbb{Z}^k = 0$ або

$$\sum\nolimits_{i=1}^{k_0} (\partial w/\partial J_i)\sigma_i\,|\operatorname{mod}\mathbb{Z}^k = 0.$$

Звідси $\partial w/\partial J_i = \text{const}$. З цих міркувань випливає, що функція $A_{c(y)}$ після підняття у $\pi^{-1}(U)$ теж породжує там періодичний з періодом 1 потік.

Далі, внаслідок $\boldsymbol{h}_4)$ існує однозначна гладка відповідність, що зіставляє з кожним $y \in B$ базис циклів $c_1(y), \ldots, c_m(y)$ тора $\tilde{\pi}^{-1}(y)$. Тому на N існують глобальні змінні дії $J_{k_0+i} = A_{c_i(y)}$, $i = 1, \ldots, m$, які після підняття породжують на M періодичні з періодом 1 потоки, що попарно комутують. Зауважимо, що коли користуватись цими змінними, то у формулі (4) $\boldsymbol{\gamma} = 0$. Неважко також зрозуміти, що припущення $\boldsymbol{h}_5)$ у даному випадку виявляється зайвим (див. п. 5).

Остаточно можемо зробити висновок: якщо функції $G_i(p,q,J)$, $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$, у деякій області $N \in \mathbb{R}^{2n-k}$ задовольняють умови $\boldsymbol{h}_2) - \boldsymbol{h}_4)$, то існують глобально гамільтонові векторні поля (3), гамільтоніани яких співпадають з побудованими вище змінними дії (після підняття змінних дії на M).

4. Гіроскопічна взаємодія роторів і системи з одним ступенем вільності. Розглянемо механічну систему на конфігураційному просторі $\mathbb{R} \times T^3$. Нехай u — координата на прямій $\mathbb{R} = \mathbb{R}_u$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)\,|\operatorname{mod}\mathbb{Z}^3$ — кутові координати на торі T^3. Припустимо, що кінетична енергія системи має вигляд $(\dot{u}^2 + \langle\dot{\psi}, \dot{\psi}\rangle)/2$, потенціальна енергія залежить лише від координати u: $\Pi = \Pi(u)$, а компоненти силового поля $F = (F^u, F^{\psi_1}, F^{\psi_2}, F^{\psi_3})$ мають вигляд

$$F^u = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \psi_i; \quad F^{\psi_1} = -\sigma_1 \dot{u} + \sigma_3 \dot{\psi}_2 - \sigma_2 \dot{\psi}_3;$$

$$F^{\psi_2} = -\sigma_2 \dot{u} - \sigma_3 \dot{\psi}_1 + \sigma_1 \dot{\psi}_3; \quad F^{\psi_3} = -\sigma_3 \dot{u} + \sigma_2 \dot{\psi}_1 - \sigma_1 \dot{\psi}_2,$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — ненульові константи, які задовольняють умову $\sum_{i=1}^{3} \sigma_i = 1$.

Запровадивши імпульси $p_u = \dot{u}$, $p_\psi = \dot{\psi}$ та гамільтоніан

$$H = \frac{p_u^2 + \langle p_\psi, p_\psi \rangle}{2} + \Pi(u), \tag{6}$$

рівняння руху можна подати у вигляді гамільтонової системи на 8-вимірному многовиді $\mathbb{R}_{p_u} \times \mathbb{R}^3_{p_\psi} \times \mathbb{R}_u \times T^3$ з симплектичною структурою

$$\omega^2 = dp_u \wedge du + dp_\psi \wedge d\psi + du \wedge \sum_{i=1}^{3} \sigma_i d\psi_i + (\sigma_3 d\psi_1 \wedge d\psi_2 + \text{цикл}), \tag{7}$$

тобто на скрученому кодотичному розшаруванні многовиду $\mathbb{R} \times T^3$. Дужки Пуассона, що відповідають структурі (7), мають вигляд

$$\{p_u, p_{\psi_i}\} = \sigma_i; \ \{u, p_u\} = 1; \ \{\psi_i, p_{\psi_i}\} = 1;$$

$$\left\| \{p_{\psi_i}, p_{\psi_j}\} \right\|_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 & -\sigma_2 \\ -\sigma_3 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} C'$$

(дужки всіх інших попарних комбінацій координатних функцій нульові). Гамільтоніан (6) і структура (7) інваріантні відносно природної дії тора T^3. Здійснивши редукцію, одержуємо гамільтонову систему на 5-вимірному многовиді $\mathbb{R}_{p_u} \times \mathbb{R}^3_{p_\psi} \times \mathbb{R}_u$. На ньому зручно запровадити такі функції: $z_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}, p_\psi \rangle$, $z_2 = \langle \boldsymbol{\beta}, p_\psi \rangle$, $z_3 = \langle \boldsymbol{\sigma}, p_\psi \rangle$, де вектори

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \quad \boldsymbol{\alpha} = (\sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}, -\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}, 0);$$

$$\boldsymbol{\beta} = \alpha \times \sigma = (-\sigma_3\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}, -\sigma_3\sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{-1/2}, (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2});$$

($\times$ — векторний добуток у $\mathbb{R}^3$) утворюють ортонормований базис у $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$\{z_i, z_3\} = 0, \ i = 1, 2; \ \{z_2, z_3\} = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\sigma} \rangle = 1;$$

$$\{p_u, z_1\} = \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma} \rangle = 0; \ \{p_u, z_2\} = \langle \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\sigma} \rangle = 0;$$

$$\{p_u, z_3\} = \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle = 1; \ \{u, p_u\} = 1, \ \{u, z_i\} = 0, \ i = 1, 2, 3;$$

$$H = \frac{p_u^2}{2} + \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{z} + \Pi(u).$$

Дужки на $\mathbb{R}_{p_u} \times \mathbb{R}^3_{p_\psi} \times \mathbb{R}_u$ мають одну незалежну функцію Казимира $J_1 = z_3 + u$, а гамільтоніан H — два незалежних інтеграли в інволюції

$$G_1 = \frac{p_u^2}{2} + \frac{u^2}{2} - J_1(u, z_3)\,u + \Pi(u), \quad G_2 = \frac{z_1^2 + z_2^2}{2}.$$

Система з гамільтоніаном G_1 має сім'ю інваріантних площин, заданих рівняннями $z_1 = c_1$, $z_2 = c_2$, $J_1 = c_3$, і на кожній такій площині, параметризованій координатами $p = p_u$ та $q = u$, породжує гамільтонову відносно симплектичної структури $dp \wedge dq$ систему з гамільтоніаном $G(p, q, c_3) = p^2/2 + q^2/2 - c_3 q + \Pi(q)$.

Нехай N — зв'язна компонента множини

$$\left\{ (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \right\} \times \left\{ (p_u, u, z_3) \in \mathbb{R}^3 \colon \text{ множина } \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \colon G(p, q, J_1(u, z_3)) = G_1(p_u, u, z_3)\} \text{ є замкненою кривою} \right\}.$$

На цій множині змінні дії мають вигляд $J_2 = A(G_1, J_1)$, де

$$A(g, c_3) = \oint_{G(p,q,c_3) = g} p\, dq, \quad g \in G_1(N), \quad c_3 \in J_1(N); \quad J_3 = 2\pi G_2.$$

Отже, $H = H_1(J_1, J_2) + J_1^2/2 + J_3/2\pi$, де функція H_1 описує залежність C_1 від J_1, J_2.

Умова нерезонансності симплектичної структури має вигляд $\sum_{i=1}^{3} \sigma_i n_i \neq 0$ $\forall\, (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$. Якщо вона виконується, то до досліджуваної системи можна застосувати КАМ-теорію [7]. При цьому, оскільки $\lambda_3 = 1/2\pi$, умови невиродженості слід вимагати від відображення $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda_1/\lambda_3, \lambda_2/\lambda_3) = 2\pi(\partial H/\partial J_1, \partial H_1/\partial J_2)$. Фактично вони зводяться до певних умов на похідні функції $A(g, c_3)$, яка описує залежність від параметрів g та c_3 площі фігури, обмеженої кривою $p^2/2 + q^2/2 - c_3 q + \Pi(q) = g$. Такі умови задовольняє широкий клас потенціалів $\Pi(q)$.

5. Зауваження. Без припущень $\boldsymbol{h}_4$), $\boldsymbol{h}_5$) структурною групою розшарування (M, B, π) з шаром (r-вимірний коізотропний тор) є група афінних автоморфізмів r-вимірного тора. Припущення $\boldsymbol{h}_4$), $\boldsymbol{h}_5$) завжди виконуються для однозв'язного многовиду B.

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. *Marsden J., Weinstein A.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry // Repts Math. Phys. – 1974. – **5**, № 1. – P. 121 – 130.
3. *Парасюк И. О.* Переменные типа действие – угол на симплектических многообразиях, расслоенных коизотропными торами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 77 – 85.
4 *Weinstein A.* The local structure of Poisson manifolds // J. Different. Geom. – 1983. – **18**, № 3. – P. 523 – 557.
5. *Карасев М. В., Маслов В. П.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. – М.: Наука, 1991. – 368 с.
6. *Duistermaat J. J.* On global action – angle coordinates // Communs Pure Appl. Math. – 1980. – **33**, № . – P. 687 – 706.
7. *Парасюк И. О.* О сохранении многомерных инвариантных торов гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 467 – 473.

Одержано 10. 02. 93