УДК 517.5

Б. В. Винницкий, канд. физ.-мат. наук. (Дрогобыч. пединститут)

О НУЛЯХ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ, И ПОЛНОТЕ СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ

Sequences of zeros are described for functions f analytic in the right halfplane and satisfying the condition $|f(z)| \le 0(1)\exp(\sigma|z|)$, $0 \le \sigma < \infty$. A criterion of completeness of a system of exponentials in a space of functions analytic in a semistrip is established.

Описано послідовності нулів аналітичних в правій півплощині функцій f, які задовольняють там умову $|f(z)| \le 0(1)\exp(\sigma|z|)$, $0 \le \sigma < \infty$. Знайдено критерій повноти систем експонент в одному просторі функцій, аналітичних в півсмузі.

Известно [1, 2], что для существования аналитической и ограниченной в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ функции $f \not\equiv 0$, имеющей нули в точках $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность (λ_n) удовлетворяла следующим условиям:

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < \infty, \tag{1}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > 1} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|^2} < \infty. \tag{2}$$

В настоящей работе обобщим это утверждение. Пусть H_σ^∞ — класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, для которых

$$\sup\{|f(z)|\exp(-\sigma|\operatorname{Im} z|) : \operatorname{Re} z > 0\} < \infty, \tag{3}$$

$0 \le \sigma < \infty$, $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty$ — последовательность точек из $\mathbb{C}_+$, Λ — класс функций $f \not\equiv 0$, аналитических в $\mathbb{C}_+$ и имеющих нули в точках λ_n (если среди чисел λ_n имеются равные, то предполагаем, что в соответствующей точке функция f имеет нуль соответствующей кратности). Через $c_0, c_1, \ldots$ обозначаем положительные постоянные, а через $K, K_0, K_1, \ldots$ обозначаем положительные постоянные, которые не зависят от рассматриваемой функции.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала функция* $f \in \Lambda \cap H_\sigma^\infty$, $0 \le \sigma < \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (1) *и*

$$\varlimsup_{r \to \infty} (S(r) - (\sigma/\pi)\ln r) < \infty, \tag{4}$$

где

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\cos\varphi_n, \quad \varphi_n = \arg\lambda_n, \ |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что

$$S(r) \ge \sum_{1 < |\lambda_n| \le r/2} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\cos\varphi_n \ge \frac{3s(r/2)}{2r}, \tag{5}$$

где

$$s(t) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le t} \cos\varphi_n.$$

Кроме того, [3, с. 58]

$$S(r) = \int_1^r s(t)\left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{r^2}\right)dt$$

и в силу [3, с. 62] условие (2) эквивалентно условию

$$\int_1^\infty \left(s(t)/t^2\right)dt < \infty.$$

Значит, в случае $\sigma = 0$ из теоремы 1 получаем утверждение, сформулированное в начале статьи (далее при доказательствах рассматриваем лишь случай $0 < \sigma < \infty$).

Справедливы и некоторые модификации теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty. \tag{6}$$

Тогда для того чтобы существовала функция $f \in \Lambda$, *непрерывная в* $\overline{\mathbb{C}}_+ = \mathbb{C}_+ \cup \{iy : y \in R\}$ (*или аналитическая в* $\overline{\mathbb{C}}_+$) *и удовлетворяющая условиям*

$$|f(z)| \le c_1 \exp(O|z|), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

$$|f(iy)| \le c_2 \exp(\sigma|y|), \quad 0 \le \sigma < \infty, \ y \in R,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (4).

Теорема 3. *Пусть выполняется* (6). *Тогда для того чтобы существовала функция* $f \in \Lambda$, *непрерывная в* $\overline{\mathbb{C}}_+$ *и удовлетворяющая условию*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_f^0(r)}{r} < \sigma_1, \quad 0 < \sigma_1 \le \infty,$$

$$M_f^0(r) = \max\{|f(z)| : |z| \le r, \ \operatorname{Re} z \ge 0\},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{S_0(r)}{\ln r} < \frac{\sigma_1}{\pi}, \qquad S_0(r) := \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{|\lambda_n|^2}.$$

В случае $\operatorname{Im} \lambda_n = 0$, $\lambda_n - \lambda_{n-1} \ge h$ (тогда $S(r) = S_0(r) + O(1)$) теорема 2 доказана Фуксом [4].

Замечания. **1.** Утверждения теорем 1 – 3 остаются в силе, если Λ определять как класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций $f \not\equiv 0$, последовательность нулей каждой из которых совпадает с λ.

2. Теорема 1 останется в силе, если H_σ^∞ определить как класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, для которых $\sup\{|f(z)|\exp(-\sigma|z|) : \operatorname{Re} z > 0\} < \infty$, а также для некоторых других случаев (см. теорему 4 в п. 2).

Обратим внимание на некоторые отличия теорем 1 – 3 и замечаний 1 и 2 от близких результатов для целых функций [5, 6].

Статья состоит из двух пунктов. В п. 1 доказываются теоремы 1 – 3, а в п. 2 приводится еще одна модификация теоремы 1, на основании которой получен критерий полноты системы экспонент в одном пространстве функций, аналитических в полуполосе.

1. Доказательству теоремы 1 предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Пусть функция* $f \not\equiv 0$ *имеет нули в точках* λ_n *и удовлетворяет следующему условию: а)* f *ограничена и аналитична в некотором полукруге* $Q_{r'} = \{z : |z| < r', \operatorname{Re} z > 0\}$, $r' > 1$. *Тогда при любом* r, $1 < r < r'$, *имеем*

$$S(r) = \frac{1}{\pi r} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln\left|f(re^{i\varphi})\right| \cos\varphi \, d\varphi \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-r}^{-1} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) (\ln|f(it)| \, dt + dq(t)) \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1}^{r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right) (\ln|f(it)| \, dt + dq(t)) + c_0 + \frac{c_1}{r^2},$$

где $q(t)$ *— невозрастающая функция на* $[-r; r]$ *и* $f(it)$ *— угловые предельные значения* f *на мнимой оси, причем все интегралы в последнем равенстве сходятся абсолютно.*

Это утверждение принадлежит Н. В. Говорову [1, с. 26] (в [1] соответствующие результаты сформулированы для верхней полуплоскости).

Лемма 2. *Пусть выполняется* (4). *Тогда произведение*

$$G(z) = \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right)$$

абсолютно и равномерно сходится на каждом компакте из $\mathbb{C}_+$, *функция* G *имеет почти всюду (п. в.) на мнимой оси угловые предельные значения* $G(iy)$, *равные по модулю* 1, *и при* $z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+$ *справедлива оценка*

$$|G(z)| \le c_2 \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_2 x\right). \tag{7}$$

***Замечание* 3.** Если

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \, s(t)/t < \infty \tag{8}$$

(тогда $S(t) = S_0(t) + O(1)$), то лемму 2 легко получить из леммы 2 из [7]. Однако из (4) не следует (8) (см. пример в конце этого пункта).

***Доказательство леммы* 2.** Из (4) вытекает, что при любом ρ, $1 < \rho < \infty$,

$$\sum_{1 < |\lambda_n| \le \rho} \operatorname{Re} \lambda_n < \infty, \qquad \sum_{1 < |\lambda_n| \le \rho} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|} < \infty. \tag{9}$$

Кроме того, из (4) и (5) имеем

$$s(t)/t \le c_3 \ln t, \quad t \ge 2. \tag{10}$$

Пусть

$$w_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n} \exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right). \tag{11}$$

Известно [1, с. 35], что при $|\lambda_n| > 2|z|$

$$|\ln w_n(z)| \le c_4 \frac{|z|^2}{|\lambda_n|^2} \cos\varphi_n. \tag{12}$$

Пусть $1 < \rho < \infty$. Тогда

$$G(z) = \left(\prod_{1<|\lambda_n|\le 2\rho} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n}\right)\left(\prod_{1<|\lambda_n|\le 2\rho} \exp\left(2z\frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|}\right)\right)\prod_{|\lambda_n|>2\rho} w_n(z) =$$

$$= \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3. \tag{13}$$

Поскольку из (10) вытекает

$$\sum_{|\lambda_n|>2\rho} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2} = \int_{2\rho}^{\infty} \frac{ds(t)}{t^2} < \infty,$$

то в силу (12) при $|z| \le \rho$ произведение π_3 сходится абсолютно и равномерно. Из (9) следует, что там же сходится произведение π_2. Очевидно, $\pi_2(iy)\pi_3(iy) = 1$ при $y \in [-\rho; \rho]$. Произведение π_1 является [1, с. 30] произведением Бляшке для $\mathbb{C}_+$, и его сходимость вытекает из (9). Поэтому нам осталось лишь убедиться в справедливости оценки (7). В силу (4) найдется b, $1 < b < \infty$, такое, что

$$S(r) \le \frac{\sigma}{\pi} \ln(br), \quad r \ge 1. \tag{14}$$

Кроме того, при $|\lambda_1| < R_1 < R$ имеем

$$S(R) - S(R_1) =$$

$$\sum_{R_1<|\lambda_n|\le R} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{R^2}\right)\cos\varphi_n + \sum_{|\lambda_n|\le R_1} \left(\frac{|\lambda_n|}{R_1^2} - \frac{|\lambda_n|}{R^2}\right)\cos\varphi_n > 0.$$

Следовательно, функция $S(r)$ возрастающая и непрерывная на $[r_1; \infty)$, $r_1 < \infty$. Пусть $S_1(r) = S^{-1}(\sigma \ln(16br)\pi^{-1})$. Из (14) получаем

$$S_1(r) \ge 16r, \quad r \ge r_0. \tag{15}$$

Если $S(r) = O(1)$ при $r \in [1; \infty)$, то (см. замечания после теоремы 1) G отличается от произведения Бляшке для $\mathbb{C}_+$ лишь множителем $\exp(c_0 z)$ и, следовательно, в этом случае (7) очевидно. Поэтому далее считаем, что $S(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Очевидно,

$$|G(z)| = \exp\left(\sum_{1<|\lambda_n|\le S_1(r)/2} \ln|w_n(z)| + \sum_{|\lambda_n|>S_1(r)/2} \ln|w_n(z)|\right). \tag{16}$$

Известно [4], что $\ln|w_n(z)| \le (c_5 xr\cos\varphi_n)/|\lambda_n|^2$ при $|\lambda_n| > 8r$ и $z \in \mathbb{C}_+$. Значит, при $r \ge r_0$ находим

$$\sum_{|\lambda_n|>S_1(r)/2} \ln|w_n(z)| \le c_6 x \sup_{r\ge r_0}\left\{r \sum_{|\lambda_n|>S_1(r)/2} (\cos\varphi_n)(|\lambda_n|)^{-2}\right\} \le c_7 \cdot d_0 \cdot x, \tag{17}$$

где

$$d_0 = \sup_{t \ge 1} \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{\sigma} S(t)\tau(t)\right)\right\}, \quad \tau(t) = \sum_{|\lambda_n| > t/2} (\cos\varphi_n)(|\lambda_n|)^{-2}.$$

Поскольку

$$(4x|\lambda_n|\cos\varphi_n)\left(\left|\bar{\lambda}_n + z\right|\right)^{-2} < 1$$

при $z \ne \lambda_n$ и $z \in \mathbb{C}_+$, то, используя неравенство $\ln(1-t) \le -t$, $t \in [0; 1)$, при $|\lambda_n| \le S_1(r)/2$ и $z \ne \lambda_n$ имеем

$$\ln|w_n(z)| = 2x\frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{4x|\lambda_n|\cos\varphi_n}{\left|\bar{\lambda}_n + z\right|^2}\right) \le$$

$$\le 2x\frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|} - \frac{2x|\lambda_n|\cos\varphi_n}{(S_1(r)9/16)^2}, \quad r \ge r_0.$$

Значит,

$$\sum_{1<|\lambda_n| \le S_1(r)/2} \ln|w_n(z)| \le 2x \sum_{1<|\lambda_n| \le S_1(r)/2} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{S_1^2(r)}\right)\cos\varphi_n \le$$

$$\le 2xS(S_1(r)) \le \frac{2\sigma}{\pi} x\ln r + c_7 x, \quad r \ge r_0. \tag{18}$$

Поскольку в Q_{2r_0} функция G ограничена, то из (16) – (18) при $z \in \mathbb{C}_+$ имеем

$$|G(z)| \le c_8 \exp\left(\frac{2\sigma}{\pi} x\ln r + c_8 x(1 + d_0)\right). \tag{19}$$

Осталось показать, что $d_0 < \infty$. В силу (10) $\tau(t) < \infty$ при $t > 0$. Пусть

$$R_k = 2^k, \quad y_k = \exp\left(-\frac{\sigma}{\pi} S\left(R_{k+1}\right)\right)$$

и $x_k = \tau(R_k)$. Тогда

$$x_k - x_{k+1} = \sum_{R_k/2 < |\lambda_n| \le R_{k+1}/2} (\cos\varphi_n)(|\lambda_n|)^{-2} \le \frac{c_9}{R_{k+2}^3} \sum_{|\lambda_n| \le R_k} |\lambda_n| \cos\varphi_n,$$

$$S\left(R_{k+2}\right) - S\left(R_{k+1}\right) = \sum_{R_{k+1} < |\lambda_n| \le R_{k+2}} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{R_{k+2}^2}\right)\cos\varphi_n +$$

$$+ \sum_{|\lambda_n| \le R_{k+1}} |\lambda_n| \left(\frac{1}{R_{k+1}^2} - \frac{1}{R_{k+2}^2}\right)\cos\varphi_n \ge \frac{c_{10}}{R_{k+2}^2} \sum_{|\lambda_n| \le R_k} |\lambda_n|\cos\varphi_n.$$

Значит, используя неравенство $e^x - 1 \ge x$, $x \in [0; \infty)$, получаем

$$y_k - y_{k+1} = e^{-\pi S(R_{k+2})\sigma^{-1}}\left(\exp\left(\frac{\pi}{\sigma}\left(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1})\right)\right) - 1\right) \ge$$

$$\ge \exp\left(-\frac{\pi}{\sigma}S(R_{k+2})\right)\frac{\pi}{\sigma}\left(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1})\right) \ge$$

$$\ge \frac{c_{11}\exp\left(-\pi S(R_{k+2})\sigma^{-1}\right)}{R_{k+2}^2} \sum_{|\lambda_n| \le R_k} |\lambda_n|\cos\varphi_n.$$

Следовательно, учитывая (4), имеем

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} \le c_{12} \varlimsup_{k\to\infty} \exp\left(\frac{\pi}{\sigma} S(R_{k+2}) - \ln R_{k+2}\right) < \infty. \tag{20}$$

Воспользуемся теоремой Штольца [8, с. 67] в следующем виде. Если $x_k \ge \ge x_{k+1} > 0$, $y_k > y_{k+1} > 0$ при $k \ge k_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$, то

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} \le \varlimsup_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}}. \tag{21}$$

Пусть $R_k \le t < R_{k+1}$. Тогда

$$\exp\left(-\frac{\pi}{\sigma} S(t)\right)\tau(t) \le \exp\left(\frac{\pi}{\sigma} S(R_{k+1})\right)\tau(R_k) = \frac{x_k}{y_k}.$$

Отсюда в силу (21) и (22) получаем, что $d_0 < \infty$ и поэтому лемма 2 доказана.

***Замечание* 4.** Если выполняется (6), то легко убедиться (ср. с [9, с. 81]), что произведение $G(z)$ будет сходиться и в некоторой окрестности каждой точки мнимой оси и функция G будет аналитичной в $\overline{\mathbb{C}}_+$.

***Доказательство теоремы* 1.** Если $f \in H^\infty_\sigma$, то f ограничена в каждом полукруге Q_R, $R > 0$. Следовательно, имеет [10, с. 182] п. в. на мнимой оси угловые предельные значения $f(iy)$, причем $|f(iy)| \le c_3 \exp(\sigma|y|)$ для п. в. $y \in R$. Поэтому, учитывая монотонность $q(t)$, из леммы 1 получаем

$$S(r) \le c_4 + (\sigma/\pi)\ln r, \quad r > 1,$$

откуда следует (4). Из ограниченности f в Q_R, $R > 1$, вытекает [1, с. 24] выполнимость условия (1). Пусть теперь условия (1) и (4) выполнены. Положим

$$F(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right) G(z) G_1(z),$$

где G — функция из леммы 2,

$$G_1(z) = \prod_{|\lambda_n| \le 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \bar{\lambda}_n}$$

и $\ln z$ — ветвь логарифма в плоскости с разрезом по отрицательной действительной полуоси, определяемая условием $\ln 1 = 0$. Из [1, с. 30] и (1) следует, что произведение $G_1(z)$ сходится в $\mathbb{C}_+$ и $|G_1(z)| \le 1$ при $z \in \mathbb{C}_+$. Поэтому в силу леммы 2 при $z \in \mathbb{C}_+$

$$|F(z)| \le c_2 \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + \frac{2\sigma}{\pi} y\varphi + \frac{2\sigma}{\pi} x \ln r + c_2 x\right) \le$$

$$\le c_2 \exp\left(\sigma|y| + c_2 x\right), \quad z = x + iy = re^{i\varphi}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Значит, функция $f(z) = F(z)\exp(-c_2 z)$ принадлежит $H^\infty_\sigma \cap \Lambda$ и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Заметим лишь, что при доказательстве достаточности функция f строится в виде

$$f(z) = \exp\left(-c_2 z + \frac{2\sigma}{\pi} z \ln z\right) \prod_{n=1}^{\infty} w_n(z)$$

(в случае аналитичности в $\overline{\mathbb{C}}_+$ нужно [4] $\ln z$ заменить на $\ln(1+z)$ и учесть замечание 4).

Доказательство теоремы 3 также аналогично доказательству теоремы 1. Нужно лишь учесть, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{S(r)}{\ln r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{S_0(r)}{\ln r}.$$

Это справедливо, ибо $S(r) \le S_0(r)$. С другой стороны,

$$S(r\ln r) \ge \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2 \ln^2 r}\right) \cos\varphi_n \ge$$

$$\ge S_0(r) - \frac{1}{r\ln^2 r} \sum_{1<|\lambda_n|\le r} \cos\varphi_n = S_0(r) - \frac{s(r)}{r\ln^2 r}.$$

Отсюда с учетом (10) получаем нужное заключение.

В связи с теоремой 3 возникает вопрос о возможности замены в теоремах 1 и 2 $S(r)$ на $S_0(r)$. Однако такую замену сделать нельзя. Приведем соответствующий пример. Пусть $\rho_0 = 2$, $\Delta_0 = 1$ и $\rho_m = \exp(\rho_{m-1}^3)$, $\Delta_m = [\rho_m \ln \rho_m]$ при $m \ge 1$, где $[x]$ — целая часть числа $x > 0$. Пусть, далее, (λ_n) — последовательность, определяемая таким образом: $\lambda_{\Delta_0+\Delta_1+\ldots+\Delta_n} + k = \rho_n$ при $0 \le k < \Delta_{n+1} - \Delta_n$. Предположим, что $\rho_m \le r < \rho_{m+1}$. Тогда $r = \alpha_m \rho_m$, $1 \le \alpha_m < \rho_{m+1}/\rho_m$, $\rho_{m-1} = (\ln \rho_m)^{1/3}$,

$$S_0(r) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\Delta_k}{\rho_k} = \ln\rho_m + (1+o(1))\ln\rho_{m-1} = \ln\rho_m + \frac{1+o(1)}{3}\ln\ln\rho_m,$$

$r\to\infty$, и поэтому

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left(S_0(\rho_m) - \ln\rho_m\right) = +\infty.$$

С другой стороны,

$$S(r) - \ln r \le S_0(r) - \frac{\Delta_m \rho_m}{r^2} - \ln r =$$

$$= \frac{1+o(1)}{3}\ln\ln\rho_m - \ln\alpha_m - \frac{\Delta_m}{\rho_m \alpha_m^2} \le$$

$$\le \max_{1\le t\le \rho_{m+1}/\rho_m} \left\{\frac{1+o(1)}{3}\ln\ln\rho_m - \ln t - \frac{\Delta_m/\rho_m}{t^2}\right\} \le$$

$$\le \frac{1+o(1)}{3}\ln\ln\rho_m - \frac{1}{2}\ln\ln\rho_m \to -\infty, \quad r\to\infty,$$

что и требовалось доказать.

2. Для исследования полноты системы экспонент будут нужны некоторые пространства. Пусть

$$D_{s,\tau} = \{z : |\operatorname{Im} z| < s,\ \operatorname{Re} z < \tau\},$$

$\gamma_{s,\tau}$ — граница $D_{s,\tau}$, обходимая в положительном (относительно $D_{s,\tau}$) направлении, $D_\sigma = D_{\sigma,0}$, $D_\sigma^* = \mathbb{C}\setminus(D_\sigma \cup \gamma_\sigma)$, $\gamma_\sigma = \gamma_{\sigma,0}$, $1 \le p < \infty$. Обозначим через $E^p[\sigma]$ и $E_*^p[\sigma]$ множества аналитических соответственно в D_σ и D_σ^* функций f, для которых (соответственно)

$$\sup\{\dot{I}_p(s,\tau,f)\colon 0<s<\sigma,\ \tau<0\} < \infty,$$

$$\sup\{\dot{I}_p(s,\tau,f)\colon s>\sigma,\ \tau>0\} < \infty,$$

где

$$\dot{I}_p(s,\tau,f) = \left(\int\limits_{\gamma_{s,\tau}} |f(z)|^p|dz|\right)^{1/p}.$$

Пусть, далее, H_σ^p — пространство аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, для которых

$$\|f\| := \sup\left\{\left(\int\limits_0^\infty \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|}\,dr\right)^{1/p} : |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right\} < \infty.$$

Напомним, что пространство Харди H^p в $\mathbb{C}_+$ определяется как множество аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, имеющих свойство

$$\|f\| := \sup\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p\,dy\right)^{1/p} : x > 0\right\} < \infty.$$

Использованные ниже свойства пространств H^p изложены в [2, 5, 9, 11 – 16] и подытожены в [17, с. 1326]. Отметим лишь, что согласно теореме Пэли – Винера [11, с. 20; 12, с. 406] класс H^2 в $\mathbb{C}_+$ совпадает с множеством аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f, допускающих представление

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} \kappa(t)e^{tz}dt, \tag{22}$$

где $\kappa \in L^2(-\infty;0)$; при этом $\|f\| = \|\kappa\|$ и (22) задает взаимно однозначное отображение $L^2(-\infty;0)$ на H^2 в $\mathbb{C}_+$. Справедлива двойственная формула

$$\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i}\int\limits_{x-i\infty}^{x+i\infty} f(z)e^{-tz}dz, \quad x \ge 0, \tag{23}$$

причем последнее равенство следует понимать в L^2-смысле, а под $f(iy)$, $y \in R$, подразумеваются угловые предельные значения функции f. Функцию κ можно п. в. на $(-\infty;0]$ определить также [16, с. 174, 403] равенством $\kappa(t) = \kappa_-(t) + \kappa_+(t)$, где

$$\kappa_-(t) = \lim_{s\to 0-}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty f(iy)e^{-iy(t+is)}dy,$$

$$\kappa_+(t) = \lim_{s\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^0 f(iy)e^{-iy(t+is)}dy.$$

Заметим, что $H_0^p = H^p$ [12, с. 444 ; 18] и введенные в H_0^p и H^p нормы эквивалентны. Кроме того, если $f \in H^p$ в $\mathbb{C}_+$, то при любом $\mu_0 \in R$ имеем [19, с. 668]

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2} \int_0^\infty \left| f\left(\rho e^{i\varphi} + i\mu_0\right)\right|^p d\rho \le K_p \, \|f\|^p \tag{24}$$

где K_p не зависит от μ_0.

Свойства пространств $E^p[\sigma]$, $E_*^p[\sigma]$ и H_σ^p аналогичны свойствам Харди в полуплоскости. Некоторые из их свойств отметим в виде лемм. Они частично известны [14].

Лемма 3. *Если* $F \in E^p[\sigma]$, *то*

$$|F(z)| \le c_p / (\min\{-x; \sigma - |y|\})^{1/p}, \quad z = x + iy \in D_\sigma.$$

Действительно, взяв r_0, $0 < r_0 < \min\{-x; \sigma - |y|\}$, как и в [2, с. 139] имеем

$$\frac{r_0^2}{2} |F(z)|^p \le \frac{1}{2\pi} \int_{x - r_0}^{x + r_0} \int_{y - r_0}^{y + r_0} |f(u + iv)|^p \, du \, dv \le c_0 r_0,$$

куда получаем искомое.

Лемма 4. *Если* $F \in E^p[\sigma]$, *то* F *имеет п. в. на* γ_σ *угловые предельные значения, принадлежащие* $L^p[\gamma_\sigma]$, *причем*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\sigma} \frac{F(t)}{t - z} dt = \begin{cases} F(z), & z \in D_\sigma \\ 0, & z \in D_\sigma^* \end{cases}. \tag{25}$$

Действительно, из определения $E^p[\sigma]$ следует, что F принадлежит [10, 13] классу Смирнова E^p в любом прямоугольнике

$$\Delta_{\sigma, \tau} = \{z : |\operatorname{Im} z| < \sigma, \ \tau < \operatorname{Re} z < 0\}, \quad -\infty < \tau < 0,$$

причем нормы F в E^p ограничены постоянной, не зависящей от τ. Отсюда и из свойств пространств Смирнова в прямоугольнике следует существование угловых предельных значений и их принадлежность $L^p[\gamma_\sigma]$. Далее, записывая интегральную формулу Коши для $\Delta_{\sigma, \tau}$ и устремляя τ к $-\infty$, завершаем доказательство леммы 4 с помощью неравенства Гельдера.

Лемма 5. *Функция F тогда и только тогда принадлежит* $E^p[\sigma]$, $p > 1$, *когда она представима в виде* $F = F_1 + F_2 + F_3$, *где* F_1, F_2 *и* F_3 *— функции из пространств Харди* H^p *соответственно в полуплоскостях* $\{z : \operatorname{Im} z > -\sigma\}$, $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ и $\{z : \operatorname{Im} z < \sigma\}$.

Это утверждение вытекает из определения $E^p[\sigma]$ и леммы 4 (интеграл (25) нужно представить в виде суммы интегралов по сторонам полуполосы и воспользоваться свойствами пространств Харди в полуплоскости.

Следствие 1. *Если* $F \in E^p[\sigma]$, $p > 1$, *то при любых* s, $0 < s < \sigma$, *и* $\tau < 0$ *имеем*

$$\lim_{D_{s,\tau} \ni z \to \infty} F(z) = 0. \tag{26}$$

Это вытекает из леммы 5 и [15, с. 176].

Лемма 6. *Функция F тогда и только тогда принадлежит $E_*^p[\sigma]$, когда она принадлежит классу Харди H^p в каждой из полуплоскостей $\{z: \operatorname{Im} z > \sigma\}$, $\mathbb{C}_+$ и $\{z: \operatorname{Im} z < -\sigma\}$.*

Это вытекает непосредственно из определения $E_*^p[\sigma]$.

Следствие 2. *Если $F \in E_*^p[\sigma]$, то при любых $s > \sigma$ и $\tau > 0$ имеем*

$$\lim_{\mathbb{C}\setminus D_{s,\tau} \ni z \to \infty} F(z) = 0.$$

Это вытекает из леммы 6 и [15, с. 176].

Лемма 7. *Если $F \in E_*^p[\sigma]$, то*

$$|F(x+iy)| \le \begin{cases} c_p / x^{1/p}, & x > 0, \\ c_p / (y-\sigma)^{1/p}, & y > \sigma, \\ c_p / (|y| - \sigma)^{1/p}, & y < -\sigma. \end{cases}$$

Это вытекает из леммы 6 и [2, с. 139].

Лемма 8. *Если $F \in E_*^p[\sigma]$, то F имеет п. в. на γ_σ угловые предельные значения, принадлежащие $L^p[\gamma_\sigma]$ и*

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma} \frac{F(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} F(z), & z \in D_\sigma^*, \\ 0, & z \in D_\sigma. \end{cases}$$

Это доказывается так же, как и лемма 4. Нужно только вместо четырехугольника взять лежащий в D_σ^* восьмиугольник со сторонами, параллельными осям координат (три из них принадлежат γ_σ). Из леммы 6 следует существование угловых предельных значений и их принадлежность $L^p[\gamma_\sigma]$, а из (24) вытекает принадлежность F классу Смирнова E^p в рассматриваемом восьмиугольнике. Затем записываем интегральную формулу Коши для этого восьмиугольника и устремляем три стороны, параллельные мнимой оси и не принадлежащие γ_σ, к ∞. Неравенство Гельдера и (24) дают возможность заключить, что соответствующие интегралы по каждой из этих сторон стремятся к нулю. Теперь осталось избавиться от двух интегралов по прямым, параллельным действительной оси. Но каждый из этих интегралов равен нулю (это вытекает из [2, с. 145], ибо при любом $\sigma_1 \ge \sigma$ функция F принадлежит H^p в каждой из полуплоскостей $\{z: \operatorname{Im} z > \sigma_1\}$ и $\{z: \operatorname{Im} z < -\sigma_1\}$).

Следствие 3. *Если $F \in E^1[\sigma]$ или $F \in E_*^1[\sigma]$, то*

$$\int_{\gamma_\sigma} F(t)\,dt = 0.$$

Это получается из лемм 8 и 4 тем же путем, что и в [2, с. 151].

Лемма 9. *Если $h \in L^p[\gamma_\sigma]$, $p > 1$, то для определенных соотношением*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\sigma} \frac{h(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} F_+(z), & z \in D_\sigma, \\ F_-(z), & z \in D_\sigma^* \end{cases} \tag{27}$$

функций F_+ и F_- имеем $F_+ \in E^p[\sigma]$ и $F_- \in E_*^p[\sigma]$, причем $h(z) = F_+(z) - F_-(z)$ п. в. на γ_σ.

Это вытекает из свойств интеграла типа Коши и лемм 5, 6 и (24).

***Лемма* 10.** *Значения функции* $h \in L^p[\gamma_\sigma]$, $p > 1$, *могут п. в. на* γ_σ *совпадать с угловыми предельными значениями некоторой функции* $F_+ \in E^p[\sigma]$ *(функции* $-F_- \in E_*^p[\sigma]$*) тогда и только тогда, когда определенная равенством* (27) *функция* F_- *(функция* F_+*) тождественно равна* 0.

Это вытекает из лемм 9, 8 и 4.

Если на каждом из множеств $E^2[\sigma]$ и $E_*^2[\sigma]$ определить норму равенством

$$\|F\| = \left(\int_{\gamma_\sigma} |F(t)|^2 |dt| \right)^{1/2}, \tag{28}$$

то множества $E^2[\sigma]$ и $E_*^2[\sigma]$ превращаются в банаховы пространства. Их можно рассматривать как замкнутые подпространства пространства $L^2[\gamma_\sigma]$.

Лемма 11. *Каждому линейному непрерывному функционалу* Φ *на* $E^2[\sigma]$ *соответствует единственная функция* $\omega \in E_*^2[\sigma]$ *такая, что значение* $\langle \Phi;F \rangle$ *функционала* Φ *на элементе* $F \in E^2[\sigma]$ *находится по формуле*

$$\langle \Phi; F \rangle = \int_{\gamma_\sigma} \omega(t) F(t)\, dt; \tag{29}$$

при этом норма функционала Φ *эквивалентна норме функции* ω *и пространство* $(E^2[\sigma])'$, *сопряженное (сильно) к* $E^2[\sigma]$, *можно реализовать как* $E_*^2[\sigma]$.

Доказательство (аналогично [19, с. 687]). Очевидно, что если $\omega \in E_*^2[\sigma]$, то (29) определяет линейный непрерывный функционал на $E^2[\sigma]$. Если взять любой функционал $\Phi \in (E^2[\sigma])'$, то по теореме Хана – Банаха его можно продолжить (с сохранением нормы) на пространство $L^2[\gamma_\sigma]$. Следовательно, для Φ найдется функция $h \in L^2[\gamma_\sigma]$ такая, что

$$\left(\forall F \in E^2[\sigma]\right): \langle \Phi; F \rangle = \int_{\gamma_\sigma} h(t) F(t)\, dt. \tag{30}$$

По лемме 9 функцию h можно представить в виде $h(t) = \omega(t) + \omega_0(t)$ для п. в. $t \in \gamma_\sigma$, где $\omega \in E_*^2[\sigma]$ и $\omega_0 \in E^2[\sigma]$. Но $\omega_0 F \in E^1[\sigma]$. Следовательно, из (30) получаем (см. следствие 3) существование функции ω со свойством (29). Если таких функций две (обозначим их через ω_1 и ω_2), то тогда

$$\forall F \in E^2[\sigma] \qquad \int_{\gamma_\sigma} (\omega_1(t) - \omega_2(t)) F(t)\, dt = 0.$$

Положив

$$F(t) = \frac{1}{t - z} \in E^2[\sigma], \quad z \in D_\sigma^*,$$

по лемме 8 имеем

$$\omega_1(z) - \omega_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\sigma} (\omega_1(t) - \omega_2(t)) \frac{1}{t-z}\, dt = 0,$$

т. е. $\omega_1 = \omega_2$. Следовательно, имеется взаимно однозначное соответствие между пространствами $(E^2[\sigma])'$ и $E_*^2[\sigma]$. Из (29) следует, что $\|\Phi\| \le \|\omega\|$. Поэтому оператор $A: E_*^2[\sigma] \to (E^2[\sigma])'$, осуществляющий это соответствие, ограничен. По теореме Банаха обратный оператор также ограничен и лемма 11 доказана.

Лемма 12. *Если функция* $f \in H_\sigma^2$, *то она имеет п. в. на мнимой оси угловые предельные значения* $f(iy)$, *причем* $f(iy)\exp(-\sigma|y|) \in L^2(-\infty; +\infty)$ *и*

$$\|f\| = \max\left\{\eta_f\left(\frac{\pi}{2}\right);\ \eta_f(0);\ \eta_f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}, \tag{31}$$

где

$$\eta_f(\varphi) = \left(\int\limits_0^\infty \left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2 \exp(-2\sigma r|\sin\varphi|)\, dr\right)^{1/2}$$

Действительно, пусть $f_\pm(z) = f(z)\exp(\pm i\sigma z)$. Тогда

$$\eta_+(\varphi) := \left(\int\limits_0^\infty \left|f_+\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2 dr\right)^{1/2} = \eta_f(\varphi), \quad 0 \le \varphi < \frac{\pi}{2},$$

$$\eta_-(\varphi) := \left(\int\limits_0^\infty \left|f_-\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2 dr\right)^{1/2} = \eta_f(\varphi), \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \le 0.$$

Значит, $\sup\{\eta_+(\varphi):\ 0 < \varphi < \pi/2\} < \infty$ и $\sup\{\eta_-(\varphi):\ -\pi/2 < \varphi < 0\} < \infty$. Поэтому [12, с. 414] (см. также [19, с. 667] f имеет угловые предельные значения с нужными свойствами. Для доказательства (31) (оно доказано, фактически, в [19, с. 670]) достаточно заметить, что непрерывные [12, с. 414] соответственно на $[0; \pi/2]$ и $[-\pi/2; 0]$ функции $\eta_+(\varphi)$ и $\eta_-(\varphi)$ (очевидно, $\eta_+(0) = \eta_-(0)$), должны принимать наибольшие значения на концах соответствующих интервалов) см. [20, с. 143, 144].

Лемма 13. *Если* $f \in H_\sigma^2$, *то при* $z \in \mathbb{C}_+$ *имеем*

$$|f(z)| \le K_2\|f\|\exp(\sigma|z|)/\sqrt{\operatorname{Re} z}.$$

Доказательство. Пусть $\gamma_+(z) = f_+\left(\sqrt{z}e^{i\pi/4}\right)/\sqrt[4]{z}$. При обычном выборе ветвей функций $\sqrt{z}$ и $\sqrt[4]{z}$ функция γ_+ аналитична в $\mathbb{C}_+$, причем

$$\int\limits_0^\infty \left|\gamma_+\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 dR = 2\int\limits_0^\infty \left|f_+\left(t\exp\left(i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)\right|^2 dt \le 2\|f\|^2, \quad |\theta| < \pi/2.$$

Следовательно, γ_+ принадлежит H^2 в $\mathbb{C}_+$ и, значит [9, с.59],

$$|\gamma_+(w)| \le K_3\|f\|/\sqrt{\operatorname{Re} w}, \quad w \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда при $\pi/6 \le \varphi \le \pi/2$ получаем

$$|f(re^{i\varphi})| \le K_4 \|f\| \exp(\sigma r |\sin\varphi|) / \sqrt{r\cos\varphi}.$$

Аналогично, рассматривая функцию

$$\eta_-(z) = f_-\left(\sqrt{z}\exp(-i\pi/4)\right)/\sqrt[4]{z},$$

убеждаемся, что последнее неравенство справедливо и для $\varphi \in (-\pi/2; -\pi/6]$. Далее, пусть $f_*(z) = f(z)\exp(-\sigma z)$ и $\eta_*(z) = f_*\left(\sqrt{z}\right)/\sqrt[4]{z}$. Учитывая, что $|\sin\varphi| \le \cos\varphi$ при $\varphi \in (-\pi/4; \pi/4]$, получаем

$$\int_0^\infty \left|\eta_*\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 dR = 2\int_0^\infty \left|f_*\left(te^{i\theta/2}\right)\right|^2 dt \le 2\|f\|^2, \quad |\theta| < \pi/2.$$

Поэтому η_* принадлежит H^2 в $\mathbb{C}_+$ и, как и выше, имеем

$$|f(z)| \le K_5 \|f\| \exp(\sigma r\cos\varphi/\sqrt{r}), \quad |\varphi| \le \frac{\pi}{6}.$$

Это и ранее установленное неравенство приводит нас к нужному результату.

Лемма 14. *Пусть $f \in H_\sigma^2$ и f_0 — целая функция. Тогда при любых α и β, $-\pi/2 \le \alpha < \beta \le \pi/2$, и $R > 0$ имеем*

$$\int_{q_R[\alpha;\beta]} f_1(z)dz = 0, \tag{32}$$

где $f_1 = f \cdot f_0$ и $q_R[\alpha, \beta]$ — граница сектора $Q_R[\alpha, \beta] = \{z\colon \alpha < \arg z < \beta, |z| < R\}$.

Доказательство. Пусть $q_R[\alpha, \beta, \varepsilon]$ — граница области $Q_R[\alpha, \beta, \varepsilon] = \{z\colon \alpha < \arg z < \beta,\ \varepsilon < |z| < R\}$. Тогда из определения H_σ^2 и леммы 13 следует, что f_1 принадлежит классу Смирнова E^1 в $Q_R[\alpha, \beta, \varepsilon]$. Поэтому [10, с. 206]

$$\int_{q_R[\alpha,\beta,\varepsilon]} f_1(z)dz = 0. \tag{33}$$

Отсюда, устремляя ε к 0 и используя лемму 13, получаем (32).

Замечание 5. Из леммы 13 следует, что пространство H_σ^2 является банаховым [19, с. 59].

Лемма 15. *Равенство*

$$F_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty F_1(w)e^{-zw}dw \tag{34}$$

задает взаимно однозначное соответствие между функциями $F_1 \in H_\sigma^2$ и $F_2 \in E_*^2[\sigma]$. Справедлива двойственная формула

$$F_1(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int_{\gamma_\sigma} F_2(z)e^{zw}dz; \tag{35}$$

при этом

$$\|F_2\|/K_2 \le \|F_1\| \le K_2\|F_2\|. \tag{36}$$

Замечание 6. Близкое утверждение при несколько иных условиях имеется в [21] (см. также [22, с. 241; 23, с. 502]).

Доказательство. Поскольку $F_1 \in L^2(0;\infty)$, то по упомянутой теореме Пэли – Винера F_2 принадлежит H^2 в $\mathbb{C}_+$ и интеграл (34) сходится для $z \in \mathbb{C}_+$. Если $\operatorname{Re} z > \sigma + 1$ и $\operatorname{Im} z < -\sigma - 1$, то на основании лемм 13 и 14 убеждаемся, что для таких z выполняется

$$F_2(z) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int\limits_0^{i\infty} F_1(w)\exp(-zw)\,dw =$$

$$= \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int\limits_0^{\infty} F_1(iv)\exp(-izv)\,dv. \tag{37}$$

По лемме 12

$$F_1(iv)\exp(-\sigma v) \in L^2(0;\infty).$$

Поэтому на основании теоремы Пэли – Винера убеждаемся, что F_2 принадлежит H^2 в полуплоскости $\{z:\ \operatorname{Im} z < -\sigma\}$. Аналогично, равенство

$$F_2(z) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} F_1(iv)e^{-izv}\,dv \tag{38}$$

дает аналитическое продолжение F_2 в полуплоскость $\{z:\ \operatorname{Im} z > \sigma\}$. Поскольку $F_1(iv)\exp(\sigma v) \in L^2(-\infty;0)$, то по той же теореме Пэли – Винера F_2 принадлежит H^2 в этой полуплоскости. Следовательно, по лемме 6 $F_2 \in$ $\in E_*^2[\sigma]$. Пусть теперь $F_2 \in E_*^2[\sigma]$ и обозначим правую часть (35) через $F_3(z)$. Покажем, что $F_3 \in H_\sigma^2$. Функцию F_3 можно представить в виде

$$F_3(w) = e^{-i\sigma w}\psi_1(w) + e^{i\sigma w}\psi_2(w) + \psi_3(w), \tag{39}$$

где

$$\psi_1(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \int\limits_{-\infty}^{0} F_2(x - i\sigma)e^{wx}\,dx$$

$$\psi_2(w) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}i} \int\limits_{-\infty}^{0} F_2(x + i\sigma)e^{wx}\,dx,$$

$$\psi_3(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F_2(iy)e^{iyw}\,dy.$$

По теореме Пэли – Винера функции ψ_1 и ψ_2 принадлежат H^2 в $\mathbb{C}_+$. Функция ψ_3 целая и ее можно представить в виде

$$\psi_3(w) = \frac{\exp(i\sigma w)}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2\sigma}^{0} F_2(i(t+\sigma))e^{itw}\,dt, \tag{40}$$

и

$$\psi_3(w) = \frac{\exp(-i\sigma w)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\sigma} F_2(i(t-\sigma))e^{itw}\,dt. \tag{41}$$

Видим, что

$$\psi_3(w) = \exp(i\sigma w)\psi_-(w) = \exp(-i\sigma w)\psi_+(w),$$

где ψ_- и ψ_+ принадлежат классам Харди H^2 соответственно в полуплоскостях $\{z:\ \mathrm{Im}\, z<0\}$ и $\{z:\ \mathrm{Im}\, z>0\}$. Из сказанного выше и (24) следует, что $F_3 \in H^2_\sigma$. Покажем, что справедливо (35), если F_2 определена равенством (34). Очевидно, (35) достаточно доказать для п. в. $w = u > 0$. Имеем

$$F_3(u) = \lim_{v\to 0} F_3(u+iv) = \lim_{v\to 0+} F_3^+(u+iv) + \lim_{v\to 0-} F_3^-(u+iv),$$

где

$$F_3^+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\gamma_\sigma^+} F_2(z)e^{zw}dz, \quad F_3^-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{\gamma_\sigma^-} F_2(z)e^{zw}dz,$$

γ_σ^+ и γ_σ^- – части γ_σ, лежащие соответственно в полуплоскостях $\{z:\ \mathrm{Im}\, z>0\}$ и $\{z:\ \mathrm{Im}\, z<0\}$. Функция F_2 принадлежит H^2 в каждой из полуплоскостей $\{z:\ \mathrm{Im}\, z>\sigma\}$ и $\{z:\ \mathrm{Im}\, z<-\sigma\}$. Поэтому

$$F_3^+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_0^{+i\infty} F_2(z)\,e^{zw}\,dz, \quad \mathrm{Im}\, w>0,$$

$$F_3^-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-i\infty}^{0} F_2(z)\,e^{zw}\,dz, \quad \mathrm{Im}\, w<0.$$

Следовательно, в силу замечаний, следующих после формулы (23), имеем

$$\lim_{v\to 0+} F_3^+(u+iv) + \lim_{v\to 0-} F_3^-(u+iv) = F_1(u),$$

т. е. $F_3 = F_1$. Далее, согласно теореме Пэли – Винера из (34), (37) и (38) имеем

$$\|F_1\|_{L^2(0;\,+\infty)} = \|F_2\|_{L^2(-i\infty;\,+i\infty)},$$

$$\left\|F_1(iv)e^{-v\sigma}\right\|_{L^2(0;\,+\infty)} = \|F_2\|_{L^2(-i\sigma-\infty;\,-i\sigma+\infty)},$$

$$\left\|F_1(iv)e^{v\sigma}\right\|_{L^2(-\infty;\,0)} = \|F_2\|_{L^2(i\sigma-\infty;\,i\sigma+\infty)}$$

и поэтому

$$\|F_2\|_{E^2_*[\sigma]} \le 3\|F_2\|_{H^2_\sigma},$$

т. е. задаваемое равенством (34) взаимно однозначное отображение H^2_σ на $E^2_*[\sigma]$ ограничено. По теореме Банаха обратное отображение также ограничено и, значит, лемма 15 доказана.

Следствие 4. *Каждая функция $f \in H^2_\sigma$ представима в виде (см.(39))*

$$f(z) = f_1(z)\psi_1(z) + f_2(z)\psi_2(z) + f_3(z). \tag{42}$$

где f_1, f_2 *и* f_3 *– целые функции, а* ψ_1 *и* ψ_2 *принадлежат* H^2 *в* $\mathbb{C}_+$.

Теорема 4. *Для того чтобы существовала функция* $f \in H^2_\sigma \cap \Lambda$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1) *и* (4).

Доказательство. Заметим, что утверждения леммы 1 и сформулированной для правой полуплоскости теоремы 2.1 из [1, с. 22] остаются в силе [7], если в них условие а) леммы 1 заменить следующим: f представима в виде (42) (в [1] при доказательствах теорем 2.1 и 2.2 использовалось лишь наличие в f суммируемых на каждом промежутке $[-ir; ir] \subset (-ir'; ir')$ угловых предельных значений $f(iy)$ и возможность предельного перехода по некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0+$ в интеграле

$$\int\limits_{q_r[-\pi/2;\,\pi/2]} \ln^+ |f(z+\varepsilon)|\,|dz|,$$

а это для функций вида (42) выполняется [10, с. 22], поскольку рассматриваемое семейство интегралов равностепенно абсолютно непрерывно на $[-r'; r']$). Поэтому, если функция f с требуемыми свойствами существует, то, как и в [1, с. 24], получаем (1). Далее в силу леммы 12

$$|f(iy)| = g_1(y)\exp(\sigma|y|),$$

где $g_1 \in L^2(-\infty; +\infty)$. Следовательно, используя лемму 13 и соответствующий вид леммы 1, как и при доказательстве теоремы 1, получаем (4). Обратно, если условия (1) и (4) выполнены, то функция

$$f(z) = \exp(-c_2 z)F(z)/(1+z)^2,$$

где F — функция, построенная при доказательстве теоремы 1, удовлетворяет требуемым условиям, т. е. $f \in H^2_\sigma \cap \Lambda$.

Теорема 5. *Пусть* $\lambda_n \neq \lambda_k$ *при* $n \neq k$. *Тогда для того чтобы система*

$$\{\exp(z\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty} \tag{43}$$

не была полной в $E^2[\sigma]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (1) *и* (4).

Действительно, согласно леммам 15 и 11 пространство, сопряженное к $E^2[\sigma]$, можно реализовать в виде H^2_σ. При этом значение $\langle F_1; F\rangle^*$ функционала $F_1 \in H^2_\sigma$ на элементе $F \in E^2[\sigma]$ определяется равенством

$$\langle F_1; F\rangle^* = \int\limits_{\gamma_\sigma} F_2(t)F(t)\,dt,$$

где F_2 определена равенством (34). Согласно (35)

$$\left\langle F_1(z); e^{\lambda_n z}\right\rangle^* = F_1(\lambda_n)\sqrt{2\pi}\,i.$$

Следовательно, из известного критерия полноты вытекает, что система (43) не является полной в $E^2[\sigma]$ тогда и только тогда, когда существует функция $F_1 \in H^2_\sigma \cap \Lambda$. Поэтому теорема 5 следует из теоремы 4.

Заметим, что теорему 5 можно рассматривать как обобщение известной теоремы Мюнца – Саса [11, с. 58].

1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
2. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
4. *Fuchs W. H. J.* A generalization of Carlson's theorem // J. London Math. Soc. – 1946. – **21**. – P. 106 – 110.
5. *Malliavin P., Rubel L. A.* On small entire function of exponential type with given zeros // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – **89**. – P. 175 – 201.
6. *Хибибулин Б. Н.* О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси // Мат. сб. – 1989. – **180**, № 5. – С. 706 – 719.
7. *Винницкий Б. В., Шаповаловский А. В.* О полноте систем экспонент с весом // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1695 – 1700.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.
9. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
10. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 336 с.
11. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – М.: Наука, 1964. – 267 с.
12. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.
13. *Duren P. L.* Theory of H^p-spaces. – New York, 1970. – 251 p.
14. *Хавинсон С. Я.* Аналитические функции ограниченного вида // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – 1963. ВИНИТИ. – 1965. – С. 5 – 80.
15. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 311 с.
16. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 479 с.
17. *Джрбашян М. М.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах C^p в полуплоскости // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1978. – **42**, № 6. – С. 1322 – 1384.
18. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96** (138), № 1. – С. 75 – 82.
19. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 3. – 657 – 702.
20. *Сборник* задач по теории аналитических функций / М. А. Евграфов, К. А. Бежанов, Ю. В. Сидоров и др. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
21. *Macintyre A. I.* Laplaces transformation and integral functions // Proc. London Math. Soc. – 1938. – **45**, № 2. – P. 1 – 20.
22. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 471 с.
23. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 560 с.

Получено 14. 12. 92