УДК 515.174

Х. Асвад

О линейной независимости функций Морса на многообразиях

Приведено доказательство существования на гладком n-мерном многообразии n линейно независимых функций Морса.

Дано доведення існування на гладкій n-вимірній многостатності n лінійно незалежних функцій Морса.

Пусть M^k — гладкое многообразие, $\omega_1, \ldots, \omega_l$ — 1-формы на M^k.

Определение 1. *Назовем формы $\omega_1, \ldots, \omega_l$ линейно независимыми в точке $x \in M^k$, если $\omega_1(x), \ldots, \omega_l(x)$ порождают подпространство размерности l в $T_x^*(M^k)$, $l \leqslant k$.*

Определение 2. *1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_l$ называются линейно независимыми на многообразии M^k, если $\omega_1(x), \ldots, \omega_l(x)$ линейно независимы на множестве $M^k \setminus \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ имеет меру нуль.*

Рассмотрим набор функций $f_1(x), \ldots, f_l(x)$, заданных на многообразии M^k. Будем говорить, что функции $f_1(x), \ldots, f_l(x)$ линейно независимы на M^k, если их дифференциалы линейно независимы. Поскольку функции $f_1(x), \ldots, f_l(x)$ задают отображение $F: M^k \to \mathbb{R}^l$, то, очевидно, условие линейной независимости функций $f_1(x), \ldots, f_l(x)$ эквивалентно тому, что отображение $F = \{f_1(x), \ldots, f_l(x)\}$ является субмерсией [1] за исключением множества меры нуль. Обозначим через Γ все отображения из M^k в $\mathbb{R}^l$, которые удовлетворяют этому свойству. Из результатов Тома о трансверсальности вытекает, что Γ непусто и содержит массивное подмножество в $C^\infty(M^k, \mathbb{R}^l)$ [1]. Обозначим через Γ_μ те отображения из Γ, у которых $f_1(x), \ldots, f_l(x)$ — функции Морса. Основной результат этой статьи заключается в том, что Γ_μ непусто. Заметим, что не все элементы Γ_μ являются устойчивыми отображениями. Это следует из результатов Уитни о классификации устойчивых отображений двумерных многообразий [2].

Рассмотрим вложение $M^k \to \mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольную точку $p \in \mathbb{R}^n$ и зададим функцию на многообразии M^k посредством равенства

$$f_p(x) = \| x - p \|^2.$$

Известно, что для почти всех точек $p \in \mathbb{R}^n$ функция $f_p(x)$ является функцией Морса [3]. Непосредственные вычисления показывают, что для функций на многообразии M^k типа $f_p(x)$ линейная независимость в точке эквивалентна линейной независимости их градиентов, вычисленных с помощью стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Пусть многообразие M^k вложено в $\mathbb{R}^n$. Выберем точки $p_1, \dots, p_l$, принадлежащие $\mathbb{R}^n \setminus M^k$. Обозначим через $C(M^k, p_i)$ конус над многообразием M^k с вершиной p_i. Точки $p_1, \dots, p_l$ обладают свойством P, если $p_i \cap C(M^k, p_j) = \varnothing$, $i \neq j$.*

Лемма. *Предположим, что на многообразии $M^k \subset \mathbb{R}^n$ задано $l \leqslant k$ функций $f_{p_1}(x), \dots, f_{p_l}(x)$, где точки $p_1, \dots, p_l$ не принадлежат многообразию M^k, порождают подпространство размерности $l-1$ и обладают свойством P. Функции $f_{p_1}(x), \dots, f_{p_l}(x)$ линейно зависимы в точке $q \in M^k$ тогда и только тогда, когда существует вектор $V(q)$ с началом в этой точке, лежащей в $T_q(M^k)^\perp$, являющийся линейной комбинацией векторов $q-p_1, \dots, q-p_k$; $T_q(M^k)^\perp$ обозначает нормальное пространство к многообразию M^k в точке $q \in M^k$.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в точке $q \in M^k$ функции $f_{p_1}(x), \dots, f_{p_l}(x)$ линейно зависимы. Тогда существуют числа $\alpha_2(q), \dots, \alpha_l(q)$ такие, что имеет место равенство

$$\operatorname{grad} f_{p_1}(q) = \alpha_2(q)(\operatorname{grad} f_{p_2}(q) + \dots + \alpha_l(q)(\operatorname{grad} f_{p_l}(q)).$$

Вычисление показывает, что

$$\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial u^j} V(q) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k, \tag{1}$$

где $\mathscr{X} = \{x_1(u_1, \dots, u_k), \dots, x_n(u_1, \dots, u_k)\}$ — вложение M^k в $\mathbb{R}^n$. Поскольку точки $p_1, \dots, p_l$ можно выбрать так, что $V(q) \neq 0$ для всех q и $(\partial \mathfrak{X}/\partial u_i)_q \neq \neq 0$ для всех q, то из равенства (1) вытекает необходимое утверждение.

Достаточность. Предположим, что вектор $V(q)$ лежит в нормальном пространстве $T_q(M^k)^\perp$ к многообразию M^k в точке q и имеет вид $V(q) = \alpha_1(q-p_1) + \dots + \alpha_l(q-p_l)$, где $\alpha_1 \neq 0$. Поскольку имеет место равенство

$$\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial u_i} V(q) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

то, расписав его, получим следующее выражение:

$$-\alpha_1 \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial u_i}(q-p_1) = \alpha_2 \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial u_i}(q-p_2) + \dots + \alpha_l \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial u_i}(q-p_l),$$

откуда вытекает

$$-\alpha_1(\operatorname{grad} f_{p_1}(x))_q = \alpha_2(\operatorname{grad} f_{p_2}(x)) + \dots + \alpha_l(\operatorname{grad} f_{p_l}).$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Вектор $V(q)$ либо пересекается с подпространством, порожденным точками $p_1, \dots, p_l$, либо ему параллелен.*

Теорема. *Пусть $M^k \subset \mathbb{R}^n$ — гладкое многообразие. Существует набор линейно независимых функций Морса $f_j(q)$, где $j = 1, 2, \dots, l \leqslant k$.*

Доказательство. Будем рассматривать функции Морса вида $f_j(q) = \| q - p_j \|^2$, где точки p_j не принадлежат многообразию M^k, линейно независимы и удовлетворяют условию P. Доказательство будем вести по индукции. Обозначим через $\Gamma_\mu(M^k, \mathbb{R}^l)$ те функции Морса, которые удовлетворяют условию теоремы. Очевидно, $\Gamma_\mu(M^k, \mathbb{R}^1) \neq \varnothing$. Предположим $\Gamma_\mu(M^k, \mathbb{R}^{l-1}) \neq \varnothing$ и докажем, что $\Gamma_\mu(M^k, \mathbb{R}^l) \neq \varnothing$. Определим два множества $A\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$ и $B\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$; $A\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$ состоит из тех точек многообразия M^k, для которых существует прямая $t.\vec{V}(q)$, где $\vec{V}(q) \in T_q(M^k)^\perp$, проходящая через точку q и пересекающая гиперплоскость, порожденную точками $p_1, \dots, p_{l-1}$. Множество $B\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$ образует точки из многообразия M^k, у которых имеется вектор $\vec{V}(q) \in T_q(M^k)^{\perp}$, параллельный гиперплоскости $\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$. Очевидно, если точки $p_1, \dots, p_{l-1}$ удовлетворяют условию леммы, то $A\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle \cup B\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle$ составляют те точки, где нарушается линейная независимость функций $f_j = \|q - p_j\|^2$, $j = 1, \dots, l-1$. Цель — найти точку p_l такую, что множества $A\langle p_1, \dots, p_l\rangle$ и $B\langle p_1, \dots, p_l\rangle$ имеют меру нуль. Рассмотрим многообразие

$$N^n = \{(q, \vec{V}(q)) \subset M^k \setminus (A_{\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle} \cup B_{\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle}) \times \mathbb{R}^n\},$$

где вектор $\vec{V}(q)$ нормален к многообразию

$$M^k \setminus A\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle \cup B\langle p_1, \dots, p_{l-1}\rangle.$$

Обозначим через $\mathrm{Gr}^{n-l+1}(L^{l-1}_{p_1, \dots, p_{l-1}}, \mathbb{R}^n)$ подмногообразие в многообразии Грасмана, образованное гиперплоскостями размерности $l-1$, проходящими через точки $p_1, \dots, p_{l-1}$. Нетрудно видеть, что оно является проективным пространством размерности $n - l + 1$. Построим два отображения

$$N^n \xrightarrow{\psi} \mathrm{Gr}^{n-l+1}(L^{l-1}_{p_1, \dots, p_{l-1}}, \mathbb{R}^n),$$

$$(q, \vec{V}(q)) \to \langle p_1, \dots, p_{l-1}, \vec{V}(q)\rangle,$$

где $\langle p_1, \dots, p_{l-1}, \vec{V}(q)\rangle$ — гиперплоскость, определяемая точками $p_1, \dots, p_{l-1}$ и концом вектора $\vec{V}(q)$,

$$N^n \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Gr}^{n-l+1}(L^{l-1}_{p_1, \dots, p_{l-1}}, \mathbb{R}^n),$$

$$(q, \vec{V}(q)) \to \langle p_1, \dots, p_{l-1}, \vec{V}(q)\rangle,$$

где $\langle p_1, \dots, p_{l-1}, \vec{V}(q)\rangle$ — гиперплоскость, проходящая через точки $p_1, \dots, p_{l-1}$ и параллельная вектору $\vec{V}(q)$. Очевидно, отображение ψ гладкое, и, следовательно, образ критических точек имеет меру нуль в $\mathrm{Gr}^{n-l+1}(L^{l-1}_{p_1, \dots, p_{l-1}}, \mathbb{R}^n)$. Положим $\psi^{-1}(\nu) = \Delta^{l-1}_{\nu}$, где ν — регулярное значение отображения ψ. Если $\Delta^{l-1}_{\nu} \neq \varnothing$, то Δ^{l-1}_{ν} является подмногообразием в N^n размерности $l-1$. Рассмотрим отображение

$$\Delta^{l-1}_{\nu} \xrightarrow{\pi} M^k,$$

$$(q, \vec{V}(q)) \to q.$$

Поскольку $l - 1 < k$, то $\pi(\Delta^{l-1}_{\nu})$ имеет меру нуль в M^k, но $\pi(\Delta^{l-1}_{\nu}) = A_{\nu}$, и значит, $\mathrm{mes}(A_{\nu}) = 0$.

Аналогично, φ^{ν} — гладкое отображение, и, если α — регулярное значение, положим $\varphi^{-1}(\alpha) = \delta^{l-1}_{\alpha}$. Зададим отображение

$$\delta^{l-1}_{\alpha} \to M^k,$$

$$(q, \vec{V}(q)) \to q,$$

Очевидно, $\omega(\delta^{l-1}_{\alpha}) = B_{\alpha}$ имеет меру нуль в многообразии M^k. Пусть γ — общее регулярное значение для отображений φ и ψ, тогда множества A_{γ} и B_{γ} имеют меру нуль в многообразии M^k, откуда вытекает, что $\Gamma_{\mu}(M^k, \mathbb{R}^l) \neq \varnothing$, где $2 \leqslant l \leqslant k$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Любой набор функций вида*

$$f_i(q) = \|q - p_i\|^2, \quad i = 1, 2, \dots, l \leqslant k,$$

где $p_1, \ldots, p_l$ обладают свойствами P и образуют гиперплоскость размерности $l-1$, можно аппроксимировать в $C^\infty(M^k, \mathbb{R}^l)$ набором линейно независимых функций Морса вида

$$g_i(q) = \| q - \bar{p_i} \|^2, \quad i = 1, \ldots, l.$$

С л е д с т в и е 3. *Для любого набора гладких функций $g_i : M^k \to \mathbb{R}$, заданного на гладком компактном многообразии M^k, вложенном в $\mathbb{R}^n$, существует вложение*

$$M^k \to \mathbb{R}^{n+l}, \ g(q) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1 = g_1(q), \ldots, y_l = g_l(q)\}$$

такое, что набор функций $y_i = g_i(q)$ аппроксимируется в $C^k(M^k, \mathbb{R}^l)$ [3] *набором линейно независимых функций Морса вида $h_i(q) \dfrac{f_{p_i}(q) - C_i^2}{2C_i}$, где C_i — достаточно большое, $i = 1, \ldots, l$, а точки $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}^{n+l}$ образуют в $\mathbb{R}^{n+l}$ гиперплоскость размерности $l-1$ и обладают свойством P.*

С л е д с т в и е 4. *Для почти всех линейно независимых отображений множество точек, где нарушается линейная зависимость, является объединением гладких подмногообразий $Sr(q)$ коразмерности m, где $m = r^2 + (k-l)\ r$* [2, 3].

1. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности.— М. : Мир, 1977.— 290 с.
2. *Брекер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы.— М. : Мир, 1977.— 207 с.
3. *Милнор Д.* Теория Морса.— М. : Мир, 1965.— 184 с.

Сирия

Получено 02.01.90