УДК 512.546

С. П. Панасюк

Топологические группы с компактными собственными инвариантными подгруппами

Приведена конструкция, позволяющая строить примеры локально компактных индуктивно пронильпотентных групп, у которых все собственные инвариантные подгруппы компактны и которые не содержат собственных открытых инвариантных подгрупп.

Наведена конструкція, яка дозволяє будувати приклади локально компактних індуктивно пронільпотентних груп, в яких всі власні інваріантні підгрупи компактні і які не містять власних відкритих інваріантних підгруп.

В. М. Полецких [1] построил пример неабелевой некомпактной локально компактной индуктивно нильпотентной группы, у которой все собственные инвариантные замкнутые подгруппы компактны. Эта группа обладает открытой инвариантной собственной подгруппой. В связи с этим примером, а также в связи с вопросом о строении локально компактных индуктивно компактных групп, у которых все собственные замкнутые подгруппы компактны, был задан вопрос 8.59 из сборника [2]: верно ли, что индуктивно нильпотентная локально компактная группа, у которой все собственные инвариантные замкнутые подгруппы компактны, обладает открытой инвариантной собственной подгруппой?

В данной статье с помощью техники итерированных сплетений построена новая серия локально компактных индуктивно пронильпотентных групп с компактными собственными инвариантными замкнутыми подгруппами. Группы этой серии не содержат открытых компактных инвариантных подгрупп и обладают некоторыми дополнительными интересными свойствами. Однако ответ на вопрос 8.59 эта статья не дает — ни одна из построенных здесь групп не является индуктивно нильпотентной.

Ниже под подгруппой понимаем замкнутую подгруппу, под группой — локально компактную группу. Если всякая топологически конечнопорожденная подгруппа некоторой группы нильпотентна, то группа называется индуктивно нильпотентной; если во всякой окрестности единицы некоторой группы найдется инвариантная подгруппа, фактор-группа по которой нильпотентна (является конечной p-группой), то группа называется пронильпотентной (про-p-группой), p — простое число. Если всякая топологически конечнопорожденная подгруппа некоторой группы пронильпотентна (является про-p-группой), то группа называется индуктивно пронильпотентной (индуктивно про-p-группой). Группа называется топологически конечнопорожденной, если она содержит всюду плотную конечнопорожденную (возможно, незамкнутую) подгруппу. Очевидно, что всякая индуктивно про-p-группа будет индуктивно пронильпотентной группой.

Пример. Пусть K_1 — произвольная компактная группа, для каждого натурального $n = 1, 2, \ldots$ группа A_n изоморфна группе C_{p_n} — циклической группе простого порядка p_n, порядок фиксирован для конкретного n. Далее если группа K_{n-1} уже определена, полагаем $K_n = K_{n-1} \wr A_{n-1} = A_{n-1} \leftthreetimes (K_{n-1} \times \ldots \times K_{n-1})$ (сплетение подгрупп A_{n-1} и K_{n-1}, группа A_{n-1} — активная, группа K_{n-1} — пассивная). Топология группы K_n определена как топология произведения пространств группы A_{n-1} (дискретная топология) и p_{n-1} экземпляров группы K_{n-1} (топология определена п индукции). Теперь определим группы $B_n = \prod\limits_{i=n}^{\infty} K_i^{p_i - 1}$ (топология на B_n — тихоновская) и $G_n = K_n \times B_n$ (топология на G_n — тоже топология произведения пространств групп K_n и B_n (здесь под K^l понимаем прямое произведение l экземпляров группы K)). Определим вложение $J_n : G_n \hookrightarrow G_{n+1}$. Имеем

$$G_{n+1} = (A_n \leftthreetimes (K_n \times \ldots \times K_n)) \times B_{n+1} \hookleftarrow (K_n \times \ldots \times K_n) \times B_{n+1} = \\ = K_n \times (K_n^{p_n - 1} \times B_{n+1}) \hookleftarrow K_n \times B_n = G_n.$$

Заметим, что при определении этого вложения подгруппа G_n открыта в группе G_{n+1} (K_n — первый сомножитель $K_n^{p_n}$, $K_n^{p_n-1}$ — оставшиеся $p_n - 1$ сомножители), поэтому индуктивный предел групп G_n группа $G = \lim \operatorname{ind} G_n$ — локально компактна, индуктивно компактна, σ-компактна. Вес группы G совпадает с весом группы K_1, если K_1 недискретна, и счетен, если K_1 конечна.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Любая открытая некомпактная подгруппа H из G совпадает с группой G.*

Пусть H содержит некоторую окрестность V единицы в группе G. Тогда найдется натуральное число n такое, что подгруппа H содержит подгруппу B_n. Поскольку H некомпактна, для любого m найдется элемент $c_m \in G \setminus G_m$, $m = 1, 2, \ldots$ Пусть $l > n$ и найдется m такое, что $c_m \in G_{l+1} \setminus G_l$. Тогда $c_m = a_l x$, где $a_l \in A_l \setminus \{e\}$, $x \in G_l$. Поскольку $G_{l+1} = A_l \leftthreetimes (K_l \times \ldots \times K_l) \times B_{l+1}$, подгруппа B_l содержится в H и группа A_l порождается элементом a_l, имеем $G_{l+1} \subset H$ и, так как последовательность чисел l возрастает, $H = G$.

2. *Всякая некомпактная инвариантная подгруппа H из G совпадает с группой G.*

Пусть $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — база окрестностей единицы группы G. Для любого α W_α содержит некоторую подгруппу B_n. Тогда множество HW_α содержит подгруппу HB_n. Используя рассуждения предыдущего пункта, имеем $HB_n = G$. Тогда $HW_\alpha = G$ для любого α. Отсюда $H = \overline{H} = \bigcap\limits_{\alpha} HW_\alpha = G$, что и требовалось.

3. *Всякая открытая инвариантная подгруппа H из G совпадает с группой G.*

Поскольку H открыта, найдется натуральное число n такое, что H содержит B_n. Так как $G_{n+1} = A_n \leftthreetimes (K_n \times \ldots \times K_n) \times B_{n+1}$, действуя на B_n элементом $a \in A_n$ $(a \neq e)$ получаем (H — инвариантна!), что подгруппа H содержит подгруппу G_n, но тогда $H \supset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = G$ и $H = G$.

4. *Множество $\mathfrak{N}$ инвариантных подгрупп группы G суть компакт в пространстве $\mathfrak{L}(G)$ замкнутых подгрупп группы G в топологии Вьеториса.*

По поводу определения топологии Вьеториса в пространстве замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G)$ см. работу [3]. Нам достаточно показать, что $\mathfrak{N}$ счетно компактно [3]. Пусть $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность нормальных подгрупп группы G. Если почти все подгруппы N_i содержатся в некоторой подгруппе G_{n_0} то последовательность $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ имеет предельную точку. Пусть теперь это не так и, переходя к подпоследовательности, считаем $N_i \subset G_i$, $N_i \setminus G_{i-1} \neq \varnothing$. Покажем, что $G \in \mathfrak{L}(G)$ — предельная точка последовательности $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$. Пусть

$$\mathfrak{A} = D_2(x_1 V) \cap \ldots \cap D_2(x_k V)$$

— окрестность G в $\mathfrak{L}(G)$, где V — окрестность единицы. Считаем $x_i \in G_n$, $i = \overline{1, k}$, $V \supset B_n$. Тогда $N_n \in \mathfrak{A}$. Действительно, $N_n B_n$ — подгруппа группы G и, как и выше, $N_n B_n = G_n$. Тогда $x_i \in N_n B_n$ и $N_n \cap x_i B_n \neq \varnothing$ для любых $i = \overline{1, k}$. Отсюда $N_n \cap x_i V \neq \varnothing$, $i = \overline{1, k}$ и $N_n \in \mathfrak{A}$.

Заметим, что пример из работы [1] также обладает аналогичным свойством. Последнее утверждение осложняет решение вопроса 8.62 из сборника [2].

Нами доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть K — произвольная компактная группа. Тогда существует локально компактная группа $G(K)$ такая, что*

1) *K — подгруппа группы $G(K)$;*

2) *все собственные открытые подгруппы группы $G(K)$ компактны;*

3) *все собственные инвариантные подгруппы группы $G(K)$ компактны;*

4) *группа $G(K)$ не содержит открытых инвариантных собственных подгрупп*;

5) *если группа K является про-p-группой, то группа $G(K)$ будет индуктивно про-p-группой, p — простое число*;

6) *множество инвариантных подгрупп группы $G(K)$ компактно в пространстве замкнутых подгрупп $\mathfrak{L}(G(K)$ группы $G(K)$ в топологии Вьеториса*.

Отметим также, что пространство $\mathfrak{L}(G(K))$ замкнутых подгрупп группы $G(K)$ в топологии Вьеториса не нормально, не полно по Чеху. Для доказательства достаточно заметить, что в пространство $\mathfrak{L}(G(K))$ вкладывается экспонента счетного дискретного пространства в качестве замкнутого подпространства. Кроме того, группа $G(K)$ универсальна относительно свойства 3 теоремы: если у индуктивно про-p-группы H все собственные инвариантные подгруппы компактны, H_0 — открытая компактная подгруппа группы H, то H вложима в $G(H_0)$ в качестве замкнутой подгруппы. Для доказательства можно воспользоваться теоремой Фробениуса об универсальности сплетений для расширений групп.

1. *Панасюк С. П., Полецких В. М.* О некоторых примерах топологических групп // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 1.— С. 93—95.
2. *Коуровская* тетрадь / Ред. В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чуркин: 6-е изд.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982.— 118 с.
3. *Протасов И. В.* Компактность в пространстве подгрупп топологической группы // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 600—605.

Киев. ун-т

Получено 14.02.89