УДК 512.546:515.12

М. Г. Ткаченко

Обобщение теоремы Комфорта—Росса. II

Настоящая работа является продолжением [1]. Здесь показывается, что ограниченность (топологическое свойство расположения подпространства в объемлющем пространстве (см. определение 1 из [1])) сохраняется при расширениях топологических групп (теорема 1) и при произведении некоторых классов пространств, тесно связанных с топологическими группами (теоремы 3 и 4). Теорема 5 является аналогом теоремы Стоуна — Вейерштрасса для ограниченного подпространства, лежащего в произведении топологических групп.

Определение понятий, используемых в данной статье, можно найти в [1]. Топологические группы предполагаются отделимыми, а пространства — вполне регулярными.

Следующая лемма является переформулировкой утверждения 2 из [1].

Лемма 1. *Пусть X — подпространство топологической группы G и $\gamma = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — локально конечное семейство открытых в G множеств, причем $V_n \cap X \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существуют допустимая подгруппа N в G и локально конечное семейство $\mu = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в G/N множеств такие, что $\pi^{-1}(U_n) \subseteq V_n$ и $X \cap \pi^{-1}(U_n) \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\pi : G \to G/N$.*

Лемма 2. *Пусть N — замкнутая подгруппа топологической группы G, $\hat{G}$ — пополнение группы G и $\hat{N} = \mathrm{cl}_{\hat{G}} N$. Тогда G/N топологически вкладывается в $\hat{G}/\hat{N}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi : G/N \to \hat{G}/\hat{N}$, где $\varphi(g \cdot N) = g \cdot \hat{N}$ для каждого $g \in G$. Пусть $\pi : G \to G/N$ и $\hat{\pi} : \hat{G} \to \hat{G}/\hat{N}$ — соответствующие фактор-отображения. Тогда для любого открытого в $\hat{G}$ множества U и для множества $V = U \cap G$ справедливо равенство $\varphi\pi(V) = \hat{\pi}(U) \cap \varphi(G/N)$. Это означает, что φ = гомеоморфное вложение G/N в $\hat{G}/\hat{N}$.

Лемма 3. *Пусть K — ограниченное подмножество топологической группы G с единицей e и $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — семейство открытых в G множеств, причем $e \in V_n = V_n^{-1}$ и $V_{n+1}^2 \subseteq V_n$ для каждого $p \in \mathbb{N}$. Тогда множество $K \cdot P$ всюду плотно в $F = \bigcap\{K \cdot U_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $P = \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Доказательство. Пусть $x \in F \setminus \mathrm{cl}_G(K \cdot P)$. Тогда $(x \cdot V_n) \cap K \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и существует открытое в G симметричное множество $U \ni e$ такое, что $U^2 \cdot x \cap K \cdot P = \varnothing$. Следовательно, $U \cdot x \cdot P \cap U \cdot K = \varnothing$. Положим $\gamma^* = \{x \cdot V_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\gamma = \{x \cdot V_n \setminus \mathrm{cl}_G(U \cdot x \cdot P) : n \in \mathbb{N}\}$. Тогда γ — бесконечное локально-конечное семейство непустых открытых в G множеств.

Действительно, γ комбинаторно вписано в γ^*, а все предельные точки семейства γ^* содержатся в $x \cdot P$. Кроме того, $W \cap K \neq \varnothing$ для всех $W \in \gamma$. Последнее противоречит ограниченности K в G.

Следующая лемма является следствием утверждения 8 из [1].

Лемма 4. *Пусть K — ограниченное подмножество топологической группы G с единицей e. Тогда для любого открытого в G множества $U \ni e$ существует такое открытое в G множество $V \ni e$, что $V \cdot K \subseteq K \cdot U$.*

Теорема 1. *Пусть K — замкнутая подгруппа топологической группы G, K ограничено в G и X — ограниченное подмножество фактор-пространства G/K. Тогда множество $p^{-1}(X)$ ограничено в G, где $p: G \to G/K$ — фактор-отображение.*

Доказательство. Предположим, что $p^{-1}(X)$ не ограничено в G. Согласно лемме 1 существуют допустимая подгруппа $P = \cap \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ в G и локально-конечное семейство $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в G/P множеств такие, что $\pi^{-1}(U_n) \cap Y \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, где $Y = p^{-1}(X)$ и $\pi: G \to G/P$. При этом ввиду леммы 4 открытые в G множества V_n могут быть выбраны так, чтобы $V_{n+1} \cdot K \subseteq K \cdot V_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $F = \cap \{K \cdot V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Нетрудно проверить, что F — замкнутая подгруппа в G и $K \subseteq F$. Следовательно, существуют такие непрерывные отображения $q: G/P \to G/F$ и $w: G/K \to G/F$, что $w \circ p = q \circ \pi \overset{\text{def}}{=} \lambda$. Из открытости фактор-отображений p, π и $\lambda: G \to G/F$ вытекает, что q и w также открыты. Согласно лемме 3 $K \cdot P$ всюду плотно в F. Поэтому $q^{-1}(\bar{e}) = \mathrm{cl}_{G/P}\pi(K)$, где $\bar{e} = \lambda(e)$. Действительно, $\pi^{-1} q^{-1}(\bar{e}) = \lambda^{-1}(\bar{e}) = F$, а из открытости отображения π следует $\pi^{-1}(\mathrm{cl}_{G/P}\pi(K)) = \mathrm{cl}_G \pi^{-1}\pi(K) = \mathrm{cl}_G(K \cdot P) = F$. Отсюда вытекает нужное равенство. Согласно утверждениям 3 и 6 из [1] множество $B = \mathrm{cl}_{G/P}\pi(K)$ является компактом. Утверждается, что отображение q совершенно. В самом деле, все слои отображения q гомеоморфны множеству $q^{-1}(\bar{e})$ и поэтому компактны. Покажем, что отображение q замкнуто. Пусть O — открытое в G/P множество и $B \subseteq O$. Пользуясь леммой 2, отождествим G/P с соответствующим подпространством в $\hat{G}/\hat{P}$ и зафиксируем открытое в $\hat{G}/\hat{P}$ множество $\hat{O}$ так, чтобы $\hat{O} \cap G/P = O$. Пусть $\hat{\pi}: \hat{G} \to \hat{G}/\hat{P}$. Тогда $\hat{K}$ — компактная подгруппа в $\hat{G}$ и $\hat{\pi}(\hat{K}) = B \subseteq \hat{O}$. Поэтому $\hat{\pi}^{-1}(\hat{O})$ — открытая окрестность компакта $\hat{K}$ в $\hat{G}$. Следовательно, существует открытое в $\hat{G}$ множество $\hat{V} \ni e$ такое, что $\hat{V} \cdot \hat{K} \subseteq \hat{\pi}^{-1}\hat{O}$. Положим $V = \hat{V} \cap G$. Тогда $\pi(V \cdot K) \subseteq \hat{\pi}(\hat{V} \cdot \hat{K}) \cap G/P \subseteq \hat{O} \cap G/P = O$. Нетрудно видеть, что открытое в G/F множество $U = \lambda(V)$ содержит точку $\bar{e}$ и $q^{-1}(U) \subseteq O$. Действительно, $\pi^{-1} q^{-1}(U) = \lambda^{-1}(U) = \lambda^{-1}\lambda(V) = V \cdot F$ и $V \cdot F = V \cdot K \cdot P$, поскольку $K \cdot P$ всюду плотно в F (лемма 3). Однако, $\pi(V \cdot K) \subseteq O$, поэтому $\pi^{-1}\pi(V \cdot K) \subseteq \pi^{-1}(O)$ или $V \cdot K \cdot P \subseteq \pi^{-1}(O)$. Таким образом, $\pi^{-1} q^{-1}(U) \subseteq \pi^{-1}(O)$, откуда $q^{-1}(U) \subseteq O$. Это доказывает замкнутость отображения q в точке $\bar{e} \in G/F$. Аналогично доказывается замкнутость отображения q в произвольной точке $x \in G/F$. Итак, отображение q совершенно.

Из локальной конечности семейства $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в G/P множеств и совершенности отображения q следует, что семейство $\{q(U_n) : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в G/K множеств также локально конечно. Поэтому открытые в G/K множества $w^{-1} q(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$, образуют локально конечное семейство. Заметим теперь, что для каждого $p \in \mathbb{N}$

$$w^{-1} q(U_n) = p\pi^{-1}(U_n). \qquad (*)$$

В самом деле, последнее равенство эквивалентно тому, что $p^{-1} w^{-1} q \times (U_n) = p^{-1} p \pi^{-1}(U_n)$, или $W_n \cdot F = W_n \cdot K$, где $W_n = \pi^{-1} U_n$. Однако, $K \cdot P$ всюду плотно в F (лемма 3), поэтому $(K \cdot P)^{-1} = P \cdot K$ всюду плотно в

$F^{-1} = F$. Следовательно, $W_n \cdot F = W_n \cdot P \cdot K = W_n \cdot K$, ибо $W_n = \pi^{-1}\pi(W_n) = W_n \cdot P$. Тем самым равенство (*) доказано.

Ввиду выбора множеств U_n имеем $\pi^{-1}(U_n) \cap p^{-1}(X) \neq \varnothing$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из равенства (*) следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ открытое в G/K множество $p\pi^{-1}(U_n) = w^{-1}q(U_n)$ пересекается с X. Последнее противоречит ограниченности множества X в G/K.

Следствие 1. *Класс псевдокомпактных топологических групп замкнут относительно расширений. Более того, если K — замкнутая псевдокомпактная подгруппа в G и фактор-пространство G/K псевдокомпактно, то группа G также псевдокомпактна.*

Замечание 1. Первое из утверждений следствия 1 доказано независимо Комфортом и Робертсоном в [2].

Замечание 2. В условиях следствия 1 можно показать, что фактор-отображение $p: G \to G/K$ является z-замкнутым, т. е. переводит функционально замкнутые множества в замкнутые.

Теорема 1 из [1] допускает некоторые обобщения. Приведем необходимые определения и вспомогательные результаты.

Определение 1. *Назовем подмножество B пространства X сильно ограниченным в X, если для любого бесконечного семейства γ открытых в X множеств, пересекающихся с B, существует бесконечное подсемейство $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \gamma$ такое, что для любого фильтра Φ на $\mathbb{N}$ множество $\bigcap_{S \in \Phi} \mathrm{cl}_X \left(\bigcup_{n \in S} U_n \right)$ непусто.*

Очевидно, каждое сильно ограниченное множество в X ограничено в X. Следующее утверждение доказывается аналогично соответствующей лемме из [3].

Лемма 5. *Пусть Φ — фильтр на $\mathbb{N}$, $x \in X_0 \supseteq B_0$ и $U_n \cap B_0 \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, где U_n открыто в X_0, причем $x \in \mathrm{cl}_{X_0}\left(\bigcup_{n \in F} U_n\right)$ для каждого $F \in \Phi$. Если V_n открыто в X_1 и $V_n \cap B_1 \neq \varnothing$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, где B_1 сильно ограничено в X_1, то найдется точка $y \in X_1$ такая, что $(x, y) \in \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \in F} U_n \times V_n\right)$ для любого $F \in \Phi$.*

Из леммы 5 немедленно вытекает такое следствие.

Следствие 2. *Если B_0 ограничено в X_0, а B_1 сильно ограничено в X_1, то $B_0 \times B_1$ ограничено в $X_0 \times X_1$.*

Приводимая ниже теорема доказывается так же, как теорема 3.1 из [3].

Теорема 2. *Пусть B_α сильно ограничено в пространстве X_α, $\alpha \in A$. Тогда $\Pi\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ сильно ограничено в $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Пусть $f: X \to Y$ и $g: X \to Z$ — непрерывные отображения. Неравенство $f \leqslant g$ означает, что существует непрерывное отображение $h: Y \to Z$ такое, что $g = h \circ f$. Семейство $\mathcal{L}$ непрерывных отображений пространства X в какие-то пространства назовем $\aleph_0$-направленной решеткой, если $\mathcal{L}$ порождает исходную топологию на X и для любого счетного подсемейства $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ существует элемент $\varphi \in \mathcal{L}$ такой, что $\varphi \leqslant \psi$ для всех $\psi \in \mathcal{L}'$.

Согласно определению 4 из [4] непрерывное отображение $f: X \to Y$ называется d-открытым, если $f(O)$ всюду плотно в некотором открытом в Y множестве $V \supseteq f(O)$.

Лемма 6. *Пусть пространство X обладает $\aleph_0$-направленной решеткой из непрерывных d-открытых отображений на полные по Дьедонне пространства. Тогда любое ограниченное в X множество сильно ограничено в X.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}$ — соответствующая решетка для X и B ограничено в X. Зафиксируем произвольное семейство $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых в X множеств, каждый элемент которого пересекается с B. Пусть $x_n \in B \cap U_n$, $n \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{L}$ порождает топологию на X, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют отображение $\varphi_n \in \mathcal{L}$, $\varphi_n: X \to X_n$, и открытое в X_n множество V_n такие, что $x_n \in \varphi_n^{-1}(V_n) \subseteq U_n$. Существует $\varphi \in \mathcal{L}$ такой, что

$\varphi \leqslant \varphi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда в пространстве $Y = \varphi(X)$ найдутся такие открытые множества W_n, что $x_n \in \varphi^{-1}(W_n) \subseteq U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $\varphi(B)$ ограничено в полном по Дьедонне пространстве Y, поэтому $K = \mathrm{cl}_Y \varphi(B)$ — компакт. Следовательно, для любого фильтра Φ на $\mathbb{N}$ множество $\bigcap\limits_{F \in \Phi} \mathrm{cl}\left(\bigcup\limits_{n \in F} W_n\right)$ непусто. Однако, отображение φ d-открыто и поэтому $\varphi^{-1}(\mathrm{cl}\, W) = \mathrm{cl}\, \varphi^{-1}(W)$ для любого открытого в Y множества W (см. лемму 5 из [4]). В частности,

$$\bigcap_{F \in \Phi} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \in F} U_n\right) \supseteq \bigcap_{F \in \Phi} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \in F} \varphi^{-1}(W_n)\right) = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{F \in \Phi} \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n \in F} W_n\right)\right) \neq \varnothing.$$

Определение 2. *Y называется* dop-*подмножеством в X, если Y всюду плотно лежит в некотором открытом множестве U из X.*

Лемма 7. *Всякое* dop-*подмножество топологической группы обладает $\aleph_0$-направленной решеткой из d-открытых отображений на полные по Дьедонне пространства.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}$ — семейство всех допустимых подгрупп в группе G и X является dop-подмножеством в G. Для каждого $N \in \mathcal{D}$ через π_N обозначим фактор-отображение G на G/N. Пусть $\mathcal{L} = \{\pi_N|_X : N \in \mathcal{D}\}$. Тогда $\mathcal{L}$ — нужная решетка для X. Действительно, каждое отображение $\varphi \in \mathcal{L}$ d-открыто как сужение открытого отображения π_N на dop-подмножество X (см. лемму 7 из [4]). Для каждого $N \in \mathcal{D}$ фактор-пространство G/N уплотняется на метризуемое пространство (утверждение 3 из [1]), поэтому любое подпространство в G/N полно по Дьедонне (см. упражнение 8.5.13 (g) из [5]).

Из теоремы 2 и лемм 6,7 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть X_α является* dop-*подмножеством некоторой топологической группы и B_α ограничено в X_α, где $\alpha \in A$. Тогда $\Pi\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ ограничено в $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.*

С помощью теоремы 21 из [6] доказывается, что любое всюду плотное подпространство $\varkappa$-метризуемого компакта обладает $\aleph_0$-направленной решеткой из d-открытых отображений на пространства счетного веса. Поэтому справедлива такая теорема.

Теорема 4. *Пусть X_α является всюду плотным подпространством некоторого $\varkappa$-метризуемого компакта и B_α ограничено в X_α, $\alpha \in A$. Тогда $\Pi\{B_\alpha : \alpha \in A\}$ ограничено в $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.*

Следствие 3. *Пусть X — псевдокомпактная топологическая группа (или псевдокомпактное $\varkappa$-метризуемое пространство). Тогда $X \times Y$ псевдокомпактно для любого псевдокомпактного пространства Y.*

Доказательство. Любая псевдокомпактная группа G $\varkappa$-метризуема, поскольку ее пополнение $\hat{G}$ — компактная группа. Поэтому $\hat{G}$ и G $\varkappa$-метризуемы [7, с. 201]. Рассмотрим случай, когда X — псевдокомпактное $\varkappa$-метризуемое пространство. По теореме 2 из [8] стоун-чеховское расширение βX пространства X также $\varkappa$-метризуемо и поэтому X обладает $\aleph_0$-направленной решеткой из d-открытых отображений на пространства счетного веса. Остается применить леммы 5 и 6.

Пусть Y — подпространство в X. Обозначим через $C(X)$ семейство всех непрерывных вещественных функций на X и положим $C(X)|_Y = \{f|_Y : f \in C(X)\}$.

Пусть $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и π_α — проекция произведения X на сомножитель X_α, $\alpha \in A$. Через π_α^* обозначим отображение из $C(X_\alpha)$ в $C(X)$, определенное правилом $\pi_\alpha^*(f) = f \circ \pi_\alpha$ для любой функции $f \in C(X_\alpha)$. Пусть $\mathcal{L}_X$ — минимальное подкольцо в $C(X)$, содержащее множество $\bigcup\{\pi_\alpha^* C \times (X_\alpha) : \alpha \in A\}$. Другими словами, $\mathcal{L}_X$ состоит из конечных сумм функций вида $\pi_{\alpha_1}^*(f_1) \cdot \ldots \cdot \pi_{\alpha_n}^*(f_n)$, где $\alpha_i \in A$ и $f_i \in C(X_{\alpha_i})$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Ясно, что $\mathcal{L}_X$ разделяет точки в X и содержит константы. Имеет место следующий аналог теоремы Стоуна — Вейерштрасса [9].

Теорема 5. *Пусть $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение топологических групп G_α, $\alpha \in A$, и X — ограниченное подпространство в G. Тогда $\mathcal{L}_G|_X$ равномерно плотно в $C(G)|_X$.*

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть X ограничено в топологической группе G и $f \in C(G)$. Тогда существуют допустимая подгруппа N в G и функция $g \in C(G/N)$ такие, что $f|_X = g \circ \pi|_X$, где $\pi : G \to G/N$.*

Доказательство. Ввиду следствия 3 из [1] для каждого натурального n существует окрестность единицы U_n в группе G такая, что $|f(x) - f(y)| \leqslant 1/n$, как только $x, y \in X$ и $x^{-1} \cdot y \in U_n$. При этом последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ можно выбрать так, чтобы $U_{n+1}^3 \subseteq U_n$ и $U_n^{-1} = U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Положим $N = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ и через π обозначим фактор-отображение G на G/N. Из построения следует, что если $x, y \in X$ и $\pi(x) = \pi(y)$, то $f(x) = f(y)$. Пусть $\mu(G)$ — пополнение по Дьедонне пространства группы G. Тогда замыкание X в $\mu(G)$, обозначаемое через B, является компактом. Пусть $\hat{f}$ — продолжение f до непрерывной вещественной функции на $\mu(G)$. Так как G/N полно по Дьедонне, существует продолжение отображения π до непрерывного отображения $\hat{\pi} : \mu(G) \to G/N$. Согласно утверждению 6 из [1] замыкание множества $\pi(X)$ в G/N является компактом. Ясно, что $\hat{\pi}(B) = \mathrm{cl}(\pi(X))$. Утверждается, что если $x, y \in B$ и $\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(y)$, то $\hat{f}(x) = \hat{f}(y)$. Предположим противное, пусть $|\hat{f}(x) - \hat{f}(y)| = \varepsilon > 0$ для некоторых $x, y \in B$, где $\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(y) = t$. Найдем номер $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1/n \leqslant \varepsilon/2$. Положим $O = \pi(t_1 \cdot V_{n+2})$, где $t_1 \in \pi^{-1}(t)$. Существуют открытые в $\mu(G)$ окрестности $V(x) \ni x$ и $V(y) \ni y$ такие, что $|\hat{f}(x_1) - \hat{f}(y_1)| > \varepsilon/2$ для любых $x_1 \in V(x)$ и $y_1 \in V(y)$, причем $\hat{\pi}(V(x)) \subseteq O$ и $\hat{\pi}(V(y)) \subseteq O$. Пусть $g \in V(x) \cap X$ и $h \in V(y) \cap X$. Тогда $|f(g) - f(h)| = |\hat{f}(g) - \hat{f}(h)| > \varepsilon/2$. С другой стороны, $\pi(g)$ и $\pi(h)$ принадлежат множеству $\pi(t_1 \cdot V_{n+2})$, поэтому $g^{-1} \cdot h \in N \cdot V_{n+2}^2 \cdot N \subseteq V_{n+1}^3$, откуда $g^{-1} \cdot h \in V_{n+1}^3 \subseteq V_n$. Отсюда и из определения множества V_n следует, что $|f(g) - f(h)| < 1/n \leqslant \varepsilon/2$. Полученное противоречие доказывает равенство $\hat{f}(x) = \hat{f}(y)$.

Таким образом, на компакте $K = \hat{\pi}(B)$ можно определить функцию g_1 так, что $\hat{f}(x) = g_1\hat{\pi}(x)$ для любого $x \in B$. Так как B — компакт и сужение $\hat{\pi}|_B$ — замкнутое отображение, то g_1 — непрерывная функция на K. Поскольку K — компакт, существует непрерывная функция g на G/N, сужение которой на K совпадает с g_1. Следовательно, допустимая подгруппа N в G и функция $g \in C(G/N)$ — искомые.

Доказательство теоремы 5. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и функцию $f \in C(G)$. По лемме 8 и утверждению 5 из [1] для каждого $\alpha \in A$ существуют допустимая подгруппа N_α в G_α и непрерывная функция g на пространстве $H = \Pi\{G_\alpha/N_\alpha : \alpha \in A\}$ такие, что $f|_X = g \circ \psi|_X$, где ψ — произведение отображений ψ_α и $\psi_\alpha : G_\alpha \to G_\alpha/N_\alpha$ — соответствующее фактор-отображение, $\alpha \in A$. По утверждению 6 из [1] замыкание множества $\psi(X)$ в H, обозначаемое через C, является компактом. Следовательно, применима теорема Вейерштрасса — Стоуна и поэтому существует функция $h \in \mathcal{L}_H$ такая, что $|g(y) - h(y)| < \varepsilon$ для любого $y \in C$. Ясно, что $h_1 = h \circ \psi \in \mathcal{L}_G$ и $|f(x) - h_1(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in X$.

Следствие 4. *Пусть $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ — произведение псевдокомпактных групп G_α, $\alpha \in A$. Тогда $\mathcal{L}_G$ равномерно плотно в $C(G)$.*

В случае, когда заранее известно, что произведение пространств псевдокомпактно, следствие 4 допускает существенное усиление.

Предложение. *Пусть произведение $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ пространств X_α псевдокомпактно. Тогда $\mathcal{L}_X$ равномерно плотно в $C(X)$.*

Доказательство. По теореме 1 из [10] стоун-чеховское расширение βX гомеоморфно произведению $X^* = \Pi\{\beta X_\alpha : \alpha \in A\}$. Следовательно, любая функция $f \in C(X)$ продолжается до непрерывной функции $f^* \in C(X^*)$, после чего остается применить теорему Стоуна — Вейерштрасса.

1. *Ткаченко М. Г.* Обобщение теоремы Комфорта—Росса // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 3.— С. 377—382.
2. *Comfort W. W., Robertson L. C.* Extremal phenomena in certain classes of totally bounded groups // Pacif. J. Math.— 1966.— **16**, N 3.— P. 483—496.
3. *Noble N.* Countably compact and pseudocompact products // Czech. Math. J.— 1969.— **19**, N 2.— P. 390—397.
4. *Tkačenko M. G.* Some results on inverse spectra. II // Comment. math. Univ. carol.— 1981.— **22**, N 4.— P. 819—841.
5. *Engelking R.* Generae Topology.— Warszawa : PWN, 1977.— 626 s.
6. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук.— 1981.— **36**, вып. 3.— С. 3—62.
7. *Щепин Е. В.* Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // Там же.— 1976.— **31**, вып. 5.— С. 191—226.
8. *Чигогидзе А. Ч.* О $\varkappa$-метризуемых пространствах // Там же.— 1982.— **37**, вып. 2.— С. 241—242.
9. *Stom M. H.* The generalized Weierstrass approximation theorem // Math. Mag.— 1948.— **21**.— P. 167—184.
10. *Glicksberg J.* Stone — Čech compactifications of products // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959.— **90**.— P. 369—382.

Сарат. политехн. ин-т

Получено 16.09.86