УДК 512.662.5

Е. А. Михайлюк

Z_*-проективные цепные комплексы

С точностью до гомотопического типа описаны цепные комплексы проективных модулей, у которых подмодули циклов также проективны.

З точністю до гомотопічного типу описані ланцюгові комплекси проективних модулів, у яких підмодулі циклів також проективні.

Пусть Λ — ассоциативное кольцо с единицей. В дальнейшем будем рассматривать только левые Λ-модули. Для цепного комплекса $(\mathbb{C}, d)$ через $Z_\lambda(\mathbb{C})$, $B_\lambda(\mathbb{C})$, $H_\lambda(\mathbb{C})$ будем обозначать модули циклов, границ, гомологий в размерности λ соответственно. Далее будем рассматривать только ограниченные снизу цепные комплексы проективных левых Λ-модулей.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для комплекса* $(\mathbb{C}, d)$ *следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль* $Z_\lambda(\mathbb{C})$ *проективен для всех* λ;

2) $\operatorname{gl\,dim}(H_\lambda(\mathbb{C})) \leqslant 2$ *для всех* λ, *где* $\operatorname{gl\,dim}(\cdot)$ — *гомологическая размерность*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $Z_\lambda(\mathbb{C})$ — проективен для всех λ, то точная последовательность

$$0 \leftarrow H_\lambda(\mathbb{C}) \leftarrow Z_\lambda(\mathbb{C}) \leftarrow \mathbb{C}_{\lambda+1} \leftarrow Z_{\lambda+1}(\mathbb{C}) \leftarrow 0$$

доставляет проективную резольвенту модуля $H_\lambda(\mathbb{C})$. Отсюда следует $\operatorname{gl\,dim}(H_\lambda(\mathbb{C})) \leqslant 2$.

Докажем обратное утверждение. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\mathbb{C}_\lambda = 0$, если $\lambda < 0$. Рассмотрим последовательность

$$0 \leftarrow H_0(\mathbb{C}) \leftarrow \mathbb{C}_0 \leftarrow \mathbb{C}_1 \leftarrow Z_1(\mathbb{C}) \leftarrow 0.$$

Так как $\operatorname{gl\,dim}(H_0(\mathbb{C})) \leqslant 2$, то используя лемму Шануэля, легко показать, что модуль $Z_1(\mathbb{C})$ проективен. Отсюда аналогично можно показать, что модули $Z_2(\mathbb{C})$, $Z_3(\mathbb{C})$, ... также проективны.

В дальнейшем цепной комплекс $(\mathbb{C}, d)$, удовлетворяющий одному из условий предложения 1, будем называть Z_*-проективным. Отметим, что над кольцом Λ, у которого левая гомологическая размерность не превышает двух, всякий проективный цепной комплекс — Z_*-проективен.

Пусть $G = (G_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, — градуированный левый Λ-модуль. Определим $E^2_\Lambda(G)$ следующим образом:

$$E^2_\Lambda(G) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^2_\Lambda(G_\lambda, G_{\lambda+1}).$$

Если имеется изоморфизм

$$\varphi: G \to H, \ \varphi = \{\varphi_\lambda : G_\lambda \to H_\lambda\}$$

градуированных модулей, то он индуцирует изоморфизм

$$\varphi^\bullet_\bullet : E^2_\Lambda(G) \to E^2_\Lambda(H), \ \varphi^\bullet_\bullet = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\varphi^\bullet_\lambda)^{-1} \circ \varphi_{\lambda+1,\bullet}$$

где

$$\varphi^\bullet_\lambda : \operatorname{Ext}^2_\Lambda(H_\lambda, H_{\lambda+1}) \to \operatorname{Ext}^2_\Lambda(G_\lambda, H_{\lambda+1}),$$

$$\varphi_{\lambda+1,\bullet} : \operatorname{Ext}^2_\Lambda(G_\lambda, G_{\lambda+1}) \to \operatorname{Ext}^2_\Lambda(G_\lambda, H_{\lambda+1}).$$

О п р е д е л е н и е 1. *Элементы* $a \in E^2_\Lambda(G)$ *и* $b \in E^2_\Lambda(H)$ *называются изоморфными, если найдется такой изоморфизм* $\varphi: G \to H$, *что* $\varphi^\bullet_\bullet(a) = b$.

Если $(\mathbb{C}, d)$ — Z_*-проективный комплекс, то последовательность

$$0 \leftarrow H_\lambda(\mathbb{C}) \leftarrow Z_\lambda(\mathbb{C}) \leftarrow \mathbb{C}_{\lambda+1}/B_{\lambda+1}(\mathbb{C}) \leftarrow Z_{\lambda+1}(\mathbb{C})/B_{\lambda+1}(\mathbb{C}) \leftarrow 0$$

точна, а так как $Z_{\lambda+1}(\mathbb{C})/B_{\lambda+1}(\mathbb{C}) = H_{\lambda+1}(\mathbb{C})$, то она определяет некоторый элемент

$$k_\lambda = k_\lambda(\mathbb{C}) \in \operatorname{Ext}^2_\Lambda(H_\lambda(\mathbb{C}), \ H_{\lambda+1}(\mathbb{C})).$$

О п р е д е л е н и е 2. *Элемент* $k_* = k_*(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}} k_\lambda \in E^2_\Lambda(H_*(\mathbb{C}))$ *будем называть полным* k-*инвариантом комплекса* $(\mathbb{C}, d)$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы* Z_*-*проективные комплексы* $(\mathbb{C}, d)$ *и* $(\mathbf{D}, \partial)$ *были цепно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их полные* k-*инварианты* $k_*(\mathbb{C})$ *и* $k_*(\mathbf{D})$ *соответственно были изоморфными*.

Доказательство будет дано ниже.

Определение 3. *Будем говорить, что комплекс (X, d) задан в канонической форме, если выполняются следующие условия:*

1) *для всех λ задано разложение $X_\lambda = F_0^\lambda \oplus F_1^{\lambda-1} \oplus F_2^{\lambda-2}$, где F_i^k — проективный модуль;*

2) *дифференциал d_λ имеет следующий вид:*

$$d_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & f_1^{\lambda-1} & \sigma_{\lambda-2}^{\lambda-1} \\ 0 & 0 & f_2^{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) $\operatorname{coker} f_1^\lambda = H_\lambda(X)$, $\ker f_1^\lambda = \operatorname{im} f_2^\lambda$, $\ker f_2^\lambda = 0$, *другими словами, последовательность $0 \leftarrow H_\lambda(X) \leftarrow F_0^\lambda \leftarrow F_1^\lambda \leftarrow F_2^\lambda \leftarrow 0$ является проективной резольвентой модуля $H_\lambda(X)$.*

Теорема 2. *Всякий Z_*-проективный комплекс $(\mathbb{C}, d)$ цепно эквивалентен некоторому комплексу $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$, заданному в канонической форме.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $(\mathbb{C}, d)$—произвольный Z_*-проективный комплекс. Тогда $(\mathbb{C}, d)$ цепно эквивалентен такому комплексу $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$, у которого*

$$\overline{\mathbb{C}}_\lambda = F_0^\lambda \oplus \mathbf{D}_{\lambda-1},\ \overline{d}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & a_{\lambda-1} \\ 0 & \partial_{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

и для всех λ имеет место точная последовательность

$$0 \leftarrow H_*(\overline{\mathbb{C}}) \leftarrow F_0^* \leftarrow H_*(\mathbf{D}) \leftarrow 0.$$

Доказательство. Стабилизируя комплекс $(\mathbb{C}, d)$, можно получить комплекс $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$, у которого модуль $Z_\lambda(\mathbb{C})$ содержит подмодуль $\Delta_\lambda = \bigoplus_{i \in I_\lambda} \Lambda x_i^\lambda$, выделяющийся в $\mathbb{C}_\lambda$ прямым слагаемым, а элементы его базиса (x_i^λ), $i \in I_\lambda$, находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторой системой образующих (h_i^λ) модуля $H_\lambda(\overline{\mathbb{C}}) \simeq H_\lambda(\mathbb{C})$ и, кроме того, $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}}^\lambda(x_i^\lambda) = 0$, $i \in I_\lambda$, где $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}}^\lambda : Z_\lambda(\mathbb{C}) \to H_\lambda(\mathbb{C})$ — естественная проекция.

Пусть Z_λ^0 — дополнение к Δ_λ в $Z_\lambda(\overline{\mathbb{C}})$. Тогда сужение $\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^\lambda$ на $Z_\lambda^{(0)}$ — эпиморфизм. Выберем элементы (z_i^λ), $i \in I_\lambda$, $z_i^\lambda \in (\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^\lambda)^{-1}(h_i^\lambda)$. Очевидно, что подмодуль, порожденный элементами $(x_i^\lambda + z_i^\lambda)$, $i \in I_\lambda$, свободен и выделяется в $\overline{\mathbb{C}}_\lambda$ прямым слагаемым. Обозначим его через F_0^λ, а его дополнение в $\overline{\mathbb{C}}_\lambda$ через $\mathbf{D}_{\lambda-1}$. Из построения модуля F_0^λ следует, что сужение $\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^\lambda$ на F_0^λ — эпиморфизм.

Если выполнить эту процедуру для всех λ, то получим

$$\overline{\mathbb{C}}_\lambda = F_0^\lambda \oplus \mathbf{D}_{\lambda-1},\ \ d_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & a_{\lambda-1} \\ 0 & \partial_{\lambda-1} \end{bmatrix}.$$

Так как $\partial_{\lambda-1} \circ \partial_\lambda = 0 = d_\lambda \circ d_{\lambda+1}$, то пара $(\mathbf{D}, \partial)$ является цепным комплексом. Далее, комплекс $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$ можно рассматривать как конус цепного отображения

$$(a_\lambda) ; (\mathbf{D}, \partial) \to (F_0, 0)$$

так как $a_{\lambda-1} \circ \partial_\lambda = 0$ и имеет место точная последовательность

$$\leftarrow F_0^{\lambda-1} \xleftarrow{a_{\lambda-1,*}} H_{\lambda-1}(\mathbf{D}) \leftarrow D_\lambda(\overline{\mathbb{C}}) \xleftarrow{\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^\lambda} F_0^\lambda \xleftarrow{a_{\lambda,*}} H_\lambda(\mathbf{D}).$$

Напомним, что $\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^\lambda$ — эпиморфизм, поэтому $a_{\lambda,*}$ — мономорфизм, следовательно, эта последовательность распадается на короткие точные последовательности

$$0 \leftarrow H_\lambda(\overline{\mathbb{C}} \xleftarrow{\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^{\lambda}} F_0^\lambda \xleftarrow{a_{\lambda,\bullet}} H_\lambda(\mathbf{D}) \leftarrow 0.$$

Доказательство теоремы 2. На основании леммы можно предположить, что $(\mathbb{C}, d)$ цепно эквивалентен комплексу $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$, у которого

$$\overline{\mathbb{C}}_\lambda = F_0^\lambda \oplus \mathbf{D}_{\lambda-1},\ d_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & a_{\lambda-1} \\ 0 & \partial_{\lambda-1} \end{bmatrix}$$

и для всех λ имеет место точная последовательность

$$0 \leftarrow H_\lambda(\overline{\mathbb{C}}) \leftarrow F_0^\lambda \leftarrow H_\lambda(\mathbf{D}) \leftarrow 0.$$

Заметим, что $\mathrm{gl}\dim(H_*(\mathbf{D})) \leqslant 1$ и можно показать, что $Z_\lambda(\mathbf{D})$ выделяется прямым слагаемым в $\mathbf{D}_\lambda$, т. е. $\mathbf{D}_\lambda = Z_\lambda(\mathbf{D}) \oplus \Gamma_{\lambda-1}$. Обозначим $Z_\lambda(\mathbf{D})$, $\Gamma_{\lambda-1}$ через F_1^λ, $F_2^{\lambda-1}$ соответственно. Тогда

$$\partial_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & f_2^{\lambda-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ a_\lambda = (f_1^\lambda, \sigma_{\lambda-1}^\lambda)$$

где f_1^λ — сквозной гомоморфизм

$$\begin{array}{c} F_1^\lambda \to F_1^\lambda \oplus F_2^{\lambda-1} \to F_0^\lambda, \\ \| \\ \mathbf{D}_\lambda \end{array}$$

а $\sigma_{\lambda-1}^\lambda$ — сквозной гомоморфизм

$$F_2^{\lambda-1} \to \mathbf{D}_\lambda \to F_0^\lambda.$$

Нетрудно видеть, что последовательность

$$0 \leftarrow H_\lambda(\overline{\mathbb{C}}) \xleftarrow{\mathrm{pr}_{\overline{\mathbb{C}}}^{\lambda}} F_0^\lambda \xleftarrow{f_1^\lambda} F_1^\lambda \xleftarrow{f_2^\lambda} F_2^\lambda \leftarrow 0$$

точна для всех λ и модули F_i^λ проективны. Тем самым мы предъявили разложение $\overline{\mathbb{C}}_\lambda = F_0^\lambda \oplus F_1^{\lambda-1} \oplus F_2^{\lambda-2}$,

$$\overline{d}_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & f_1^{\lambda-1} & \sigma_{\lambda-2}^{\lambda-1} \\ 0 & 0 & f_2^{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

удовлетворяющее требуемым условиям.

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Если $(\mathbb{C}, d)$ и $(\mathbf{D}, \partial)$ — цепно эквивалентные комплексы, то согласно теореме Кокрофта — Суона они будут стабильно изоморфными, т. е. для некоторых комплексов $(\overline{\mathbb{C}}, \overline{d})$ и $(\overline{\mathbf{D}}, \overline{\partial})$, которые получены из $(\mathbb{C}, \partial)$ и $(\mathbf{D}, \partial)$ соответственно с помощью операций стабилизации, найдется цепной изоморфизм $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbf{D}}$, который индуцирует изоморфизм

$$\varphi : H_*(\mathbb{C}) \to H_*(\mathbf{D}).$$

Тогда для каждого λ имеем коммутативную диаграмму с точными строками, вертикальные стрелки у которой — изоморфизмы:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \leftarrow & H_\lambda(\mathbb{C}) & \leftarrow & Z_\lambda(\overline{\mathbb{C}}) & \leftarrow & \overline{\mathbb{C}}_{\lambda+1}/B_{\lambda+1}(\overline{\mathbb{C}}) & \leftarrow & H_{\lambda+1}(\mathbb{C}) & \leftarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \leftarrow & H_\lambda(\mathbf{D}) & \leftarrow & Z_\lambda(\overline{\mathbf{D}}) & \leftarrow & \overline{\mathbf{D}}_{\lambda+1}/B_{\lambda+1}(\overline{\mathbf{D}}) & \leftarrow & H_{\lambda+1}(\mathbf{D}) & \leftarrow 0. \end{array}$$

Отсюда, используя результаты работы [1], можно вывести, что $\varphi_*^*(k_*(\mathbb{C})) = k_*(\mathbf{D})$.

Достаточность. Не ограничивая общности, можно предполагать, что комплексы $(\mathbb{C}, d)$ и $(\mathbf{D}, \partial)$ заданы в канонической форме, т. е.

$$\mathbb{C}_\lambda = F_0^\lambda \oplus F_2^{\lambda-1} \oplus F_2^{\lambda-2}, \quad \mathbf{D}_\lambda = G_0^\lambda \oplus G_1^{\lambda-1} \oplus G_2^{\lambda-2},$$

$$d_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & f_2^{\lambda-1} & a_{\lambda-2}^{\lambda-1} \\ 0 & 0 & f_2^{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \partial_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{\lambda-1} & b_{\lambda-2}^{\lambda-1} \\ 0 & 0 & g_2^{\lambda-2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Гомоморфизм $a_{\lambda-2}^{\lambda-1}: F_2^{\lambda-2} \to F_0^{\lambda-1}$ можно включить в цепное отображение

$$\begin{tikzcd} 0 & F_0^{\lambda-2} \arrow[l] \arrow[d] & F_1^{\lambda-2} \arrow[l] \arrow[d, "a_{\lambda-2}^{\lambda-1}"] & F_2^{\lambda-2} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & 0 & F_0^{\lambda-1} \arrow[l] & F_1^{\lambda-1} \arrow[l] & \arrow[l] , \end{tikzcd}$$

где верхняя и нижняя строки — резольвенты модулей $H_{\lambda-2}(\mathbb{C})$ и $H_{\lambda-1}(\mathbb{C})$ соответственно. Гомотопический класс этого отображения обозначим через $[a_{\lambda-2}^{\lambda-1}]$. Как следует из [2], элемент $[a_{\lambda-2}^{\lambda-1}]$ лежит в $\mathrm{Ext}_\Lambda^2(H_{\lambda-2}(\mathbb{C}), H_{\lambda-1}(\mathbb{C}))$. Более того, $[a_{\lambda-2}^{\lambda-1}] = -k_{\lambda-1}(\mathbb{C})$, что следует из эквивалентности двух определений групп Ext [3]. Точно так же $[b_{\lambda-2}^{\lambda-1}] = -k_{\lambda-1}(\mathbf{D})$.

Если $\varphi: H_*(\mathbb{C}) \to H_*(\mathbf{D})$ — изоморфизм такой, что $\varphi_*^*(k_*(\mathbb{C})) \to k_*(\mathbf{D})$ то, во-первых, для всех λ изоморфизм $\varphi_\lambda: H_\lambda(\mathbb{C}) \to H_\lambda(\mathbf{D})$ накрывается цепной эквивалентностью резольвент модулей $H_\lambda(\mathbb{C})$ и $H_\lambda(\mathbf{D})$

$$\begin{tikzcd} 0 & H_\lambda(\mathbb{C}) \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_\lambda"] & F_0^\lambda \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_\lambda^0"] & F_1^\lambda \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_\lambda^1"] & F_2^\lambda \arrow[l] \arrow[d, "\varphi_\lambda^2"] & 0 \arrow[l] \\ 0 & H_\lambda(\mathbf{D}) \arrow[l] & G_0^\lambda \arrow[l] & G_1^\lambda \arrow[l] & G_2^\lambda \arrow[l] & 0, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

а во-вторых, существуют такие гомоморфизмы

$$p_{\lambda-2}^{\lambda-1}: F_2^{\lambda-2} \to G_0^{\lambda-1} \text{ и } q_{\lambda-2}^{\lambda-1}: F_2^{\lambda-2} \to G_1^{\lambda-1},$$

что квадраты

$$\begin{tikzcd} F_0^{\lambda-1} \arrow[d, "\varphi_{\lambda-1}^0"'] & F_2^{\lambda-2} \arrow[l, "a_{\lambda-2}^{\lambda-1}"'] \arrow[d, "f_2^{\lambda-2}"] \\ G_0^{\lambda-1} & F_1^{\lambda-2} \arrow[l, "p_{\lambda-2}^{\lambda-1}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_1^{\lambda-1} \arrow[d, "g_2^{\lambda-1}"] & F_2^{\lambda-2} \arrow[l, "q_{\lambda-2}^{\lambda-1}"'] \arrow[d, "\varphi_{\lambda-2}^2"] \\ G_0^{\lambda-1} & G_2^{\lambda-2} \arrow[l, "b_{\lambda-2}^{\lambda-1}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны.

Определим $f_\lambda: \mathbb{C}_\lambda \to \mathbf{D}_\lambda$ следующим образом:

$$f_\lambda = \begin{bmatrix} \varphi_\lambda^0 & p_{\lambda-1}^\lambda & 0 \\ 0 & \varphi_{\lambda-1}^1 & q_{\lambda-2}^{\lambda-1} \\ 0 & 0 & \varphi_{\lambda-2}^2 \end{bmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $f_{\lambda-1} \circ d_\lambda = \partial_\lambda \circ f_\lambda$. Таким образом, $f = (f_\lambda)$ — цепное отображение и f индуцирует изоморфизм. Так как $(\mathbb{C}, d)$ и $(\mathbf{D}, \partial)$ — проективные комплексы, то из [2] следует, что f — цепная эквивалентность. Теорема доказана.

1. *Шарко В. В.* K-теория и теория Морса. I.— Киев, 1986.— 52 с.— (Препринт / АН УССР Ин-т математики; 86. 39).
2. *Дольд А.* К гомотопической теории цепных комплексов // Математика: Сб. пер.— 1963.— 7, № 3.— С. 3—26.
3. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 543 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 02.11.88