УДК 517.926

И. Н. Грод

О сохранении ограниченного решения уравнения Риккати при малом нелинейном возмущении

При изучении линейных систем дифференциальных уравнений возникает необходимость исследовать дифференциальное матричное уравнение вида

$$dX/dt = XA_1(t)X + A_2(t)X + XA_3(t) + A_4(t) + \varepsilon F(t, X), \tag{1}$$

где X — матрица размерности $r_1 \times r_2$, $t \in R$, $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$,— непрерывные и ограниченные на всей оси R матричные функции размерности соответственно $r_2 \times r_1$, $r_2 \times r_2$, $r_1 \times r_1$, $r_1 \times r_2$. Пространство таких функций, не обязательно матричных, обозначим $C^0(R)$. $F(t, X)$ — матричная функция, определена и непрерывна по совокупности переменных в области $R \times K$, $K = \{X : \|X\| < 1\}$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма $\|X\| = \max\limits_{\|\xi\|_0=1} \|X_\xi\|$, $\xi \in \in R^{r_2}$, R^r — евклидово пространство размерности r, $\|\xi\|_0 = \langle\xi, \xi\rangle$ — обычное скалярное произведение евклидова пространства, ε — малый параметр.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, удовлетворяют неравенству*

$$|\langle A_2(t)\eta_1, \eta_1\rangle + \langle[A_4(t) + A_1^T(t)]\eta_1, \eta_2\rangle + \langle A_3(t)\eta_2, \eta_2\rangle| \geqslant \gamma(\|\eta_1\|_0^2 + \|\eta_2\|_0^2) \tag{2}$$

при всех $\eta_1 \in R^{r_2}$, $\eta_2 \in R^{r_1}$, где $\gamma = \text{const} > 0$, а матричная функция $F(t, X)$ удовлетворяет следующим условиям: $\|F(t, X)\| \leqslant M$, $\|F(t, X) - F(t, \tilde{X})\| \leqslant L\|X - \tilde{X}\|$ $\forall t \in R$, X, $\tilde{X} \in K$.

Тогда можно указать такое положительное $\bar{\varepsilon}$, что для всякого $\varepsilon \in \in [-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ уравнение (1) *имеет единственное решение $X^*(t, \varepsilon)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|X^*(t, \varepsilon)\| < 1 \tag{3}$$

при всех $t \in R$.

Доказательство. В случае $\varepsilon = 0$ существование и единственность такого решения непосредственно следует из работы [1].

В случае $\varepsilon \neq 0$ заметим, что если

$$\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \quad \varepsilon_0 = \gamma/M, \tag{4}$$

то при каждой матричной функции $Y(t) \in C^0(R)$ уравнение $dX/dt = XA_1(t)X + A_2(t)X + XA_3(t) + A_4(t) + \varepsilon F(t, Y(t))$ также имеет ограниченное решение $X = X_y^*(t, \varepsilon)$, $\|X_y^*\| < 1$.

Из неравенства (2) и выбора ε согласно (4) следует выполнение неравенства

$$|\langle A_2(t)\eta_1, \eta_1\rangle + \langle[A_4(t) + \varepsilon F(t, Y(t)) + A_1^T(t)]\eta_1, \eta_2\rangle +$$
$$+ \langle A_3(t)\eta_2, \eta_2\rangle| \geqslant \frac{\gamma}{2}(\|\eta_1\|_0^2 + \|\eta_2\|_0^2). \tag{5}$$

Выполнение неравенства (5) обеспечивает существование и единственность искомого ограниченного решения.

Далее рассмотрим последовательность $\{X_n^*(t, \varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$ ограниченных матричных функций, $X_0^* = 0$, $X_n^*(t, \varepsilon)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{X}_n = X_n A_1(t) X_n + A_2(t) X_n + X_n A_3(t) + \varepsilon F(t, X_{n-1}^*(t, \varepsilon)). \qquad (6)$$

Покажем, что построенная последовательность $\{X_n^*, (t, \varepsilon)\}_{n=0}^{\infty}$ имеет предел $X^*(t, \varepsilon)$ в пространстве $C^0(R)$ и $X^*(t, \varepsilon)$ есть искомое решение уравнения (1). Для этого достаточно показать, что ряд

$$X_1^*(t, \varepsilon) + (X_2^*(t, \varepsilon) - X_1^*(t, \varepsilon)) + (X_3^*(t, \varepsilon) - X_2^*(t, \varepsilon)) + \ldots + (X_{n+1}^*(t, \varepsilon) - X_n^*(t, \varepsilon)) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (X_{k+1}^*(t, \varepsilon) - X_k^*(t, \varepsilon)) \qquad (7)$$

равномерно сходится $\forall t \in R$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Рассмотрим вспомогательные системы линейных дифференциальных уравнений

$$dh/dt = \tilde{A}_\varepsilon^i(t) h, \quad i = k, k+1, \qquad (8)$$

где $h \in R^{r_1 + r_2}$, $\tilde{A}_\varepsilon^i(t) = \begin{pmatrix} -A_2(t) & -A_1(t) \\ A_4(t) + \varepsilon F(t, X_i^*(t, \varepsilon)) & A_3(t) \end{pmatrix}$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

Известно [1], что для систем (8) в силу выполнения условия (5) существует единственная функция Грина задачи об ограниченных решениях. Обозначим эти функции соответственно $G_k(t, \tau, \varepsilon)$, $G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon)$.

Рассмотрим разность $G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon)$ и определим для этой разности дифференциальное уравнение. Имеем

$$d(G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon))/dt = \tilde{A}_\varepsilon^{k+1}(t)(G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon)) + [\tilde{A}_\varepsilon^{k+1}(t) - \tilde{A}_\varepsilon^k(t)] G_k(t, \tau, \varepsilon) \qquad (9)$$

при $t \neq \tau$.

Поскольку $G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon)$ — матрица, ограниченная на всей оси R, то в силу единственности функции Грина из (9) получаем

$$G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{k+1}(t, \sigma, \varepsilon) [\tilde{A}_\varepsilon^{k+1}(\sigma) - \tilde{A}_\varepsilon^k(\sigma)] G_k(\sigma, \tau, \varepsilon) \, d\sigma.$$

Следовательно,

$$\| G_{k+1}(t, \tau, \varepsilon) - G_k(t, \tau, \varepsilon) \| \leqslant 2\varepsilon \frac{\|A\|}{\gamma} L M_2 \| X_{k+1}^*(t, \varepsilon) - X_k^*(t, \varepsilon) \|, \qquad (10)$$

где $M_2 \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}(|t-\sigma| + |\tau - \sigma|)} d\sigma$, $M_2 = \text{const} = \dfrac{2}{\gamma}$.

Обозначим $2\varepsilon \dfrac{\|A\|}{\gamma} L M_2 = \beta(\varepsilon)$. С другой стороны, напомним [1], что функцию Грина можно представить в следующем виде:

$$G_i(t, \tau, \varepsilon) = \begin{cases} \Omega_\tau^i \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ X_i^*(\tau, \varepsilon) \end{pmatrix} C_1^i(\tau, \varepsilon), & \tau \leqslant t \\ \Omega_\tau^i \begin{pmatrix} Z_i^*(\tau, \varepsilon) \\ E_{r_1} \end{pmatrix} C_2^i(\tau, \varepsilon), & \tau > t \end{cases} \quad i = k+1, \ k+2, \qquad (11)$$

где

$$C_1^i(t,\varepsilon) = (E_{r_2} - Z_i^*(t,\varepsilon)X_i^*(t,\varepsilon))^{-1} \times [(E_{r_2} \vdots 0) - Z_i^*(t,\varepsilon)(0 \vdots E_{r_1})],$$

$$C_2^i(t,\varepsilon) = (X_i^*(t,\varepsilon)Z_i^*(t,\varepsilon) - E_{r_1})^{-1} \times [(0 \vdots E_{r_1}) - X_i^*(t,\varepsilon)(E_{r_2} \vdots 0)],$$

$Z_i^*(t,\varepsilon)$ — ограниченное решение уравнения

$$dZ/dt = -Z[A_4(t) + \varepsilon F(t, X_{i-1}^*(t,\varepsilon))]Z - A_2(t)Z - \\ - ZA_3(t) - A_1(t), \quad \|Z_i(t,\varepsilon)\| < 1. \tag{12}$$

Существование такого решения уравнения (12) следует из выполнения неравенства (5).

Из построения (11) нетрудно видеть, что

$$\lim_{\tau \to t-0} G_i(t,\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ X_i^*(t,\varepsilon) \end{pmatrix} C_1(t,\varepsilon). \tag{13}$$

Таким образом, учитывая равенство (13) и структуру функции Грина (19), из (18) получаем

$$\left\| \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ X_{k+2}^*(t,\varepsilon) \end{pmatrix} C_1^{k+2}(t,\varepsilon) - \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ X_{k+1}^*(t,\varepsilon) \end{pmatrix} C_1^{k+1}(t,\varepsilon) \right\| \leqslant \\ \leqslant \beta(\varepsilon) \| X_{k+1}^*(t,\varepsilon) - X_k^*(t,\varepsilon) \|. \tag{14}$$

Отсюда имеем

$$\begin{gathered} \|(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)^{-1}(E_{r_2} \vdots - Z_{k+1}^*) - (E_{r_2} - Z_{k+2}^* X_{k+2}^*)^{-1} \times \\ \times (E_{r_2} \vdots - Z_{k+2}^*)\| \leqslant \beta(\varepsilon)\|X_{k+1}^* - X_k^*\|, \\ \| X_{k+1}^*((E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)^{-1}(E_{r_2} \vdots - Z_{k+1}^*) - (E_{r_2} - Z_{k+2}^* X_{k+2}^*)^{-1} \times \\ \times (E_{r_2} \vdots - Z_{k+2}^*))\| \leqslant \beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|, \end{gathered} \tag{14'}$$

или

$$\|(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)^{-1} - (E_{r_2} - Z_{k+2}^* X_{k+2}^*)^{-1}\| \leqslant \beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|,$$

$$\| E_{r_2} - Z_{k+2}^* X_{k+2}^*)^{-1} Z_{k+2}^* - (E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*) Z_{k+1}^* \| \leqslant \beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|,$$

$$\| X_{k+2}^*(E_{r_2} - Z_{k+2}^* X_{k+2}^*)^{-1} + X_{k+1}^*(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)\| \leqslant \beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|.$$

После простых подсчетов из (14′) имеем

$$\|(X_{k+2}^* - X_{k+1}^*)(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)^{-1}\| \leqslant 2\beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|. \tag{15}$$

Таким образом, получаем

$$\|(X_{k+2}^* - X_{k+1}^*)\| = \|(X_{k+2}^* - X_{k+1}^*)(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)^{-1}(E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^*)\| \leqslant \\ \leqslant \| E_{r_2} - Z_{k+1}^* X_{k+1}^* \| 2\beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\| \leqslant 4\beta(\varepsilon)\| X_{k+1}^* - X_k^*\|,$$

т. е.

$$\| X_{k+2}^*(t,\varepsilon) - X_{k+1}^*(t,\varepsilon)\| \leqslant 4\beta(\varepsilon)\| X_{k+1}(t,\varepsilon) - X_k(t,\varepsilon)\|. \tag{15'}$$

Выбирая ε_1 из условия $4\beta(\varepsilon) < \alpha < 1$, имеем $\varepsilon_1 < \dfrac{\gamma}{8\|A\|LM_2}$. Следовательно, для любого $\varepsilon \in [-\bar\varepsilon, \bar\varepsilon]$, $\bar\varepsilon = \min\left\{\dfrac{\gamma}{M}, \dfrac{\gamma}{8\|A\|LM_2}\right\}$ существует $0 < \alpha < 1$ такое, что

$$\| X_{k+1}^* - X_k^*\| < \alpha \| X_k^* - X_{k-1}^*\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^k \| X_1^* - X_0\| = \alpha \| X_1^*\| \quad \forall k \in N.$$

Таким образом, если $\varepsilon \in [-\bar\varepsilon, \bar\varepsilon]$, то ряд (7) меньше следующего числового ряда с положительными членами: $\| X_1^*(t, \varepsilon) \| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$, сходимость которого очевидна, поскольку $0 < \alpha < 1$.

В силу критерия Вейерштрасса ряд (7) сходится равномерно для всех $t \in R$. Поскольку каждый член ядра (7) есть непрерывная матричная функция от t, то предел $\lim_{n\to\infty} X_n^*(t, \varepsilon) = X^*(t, \varepsilon)$ существует и является непрерывной функцией от t, а также $\| X^*(t) \| < 1$.

Для доказательства теоремы осталось показать, что $X^*(t, \varepsilon)$ есть решением уравнения (1). Легко видеть, что $X_m^*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет интегральному равенству

$$X_m^*(t, \varepsilon) = X_m^*(0, \varepsilon) + \int_0^t X_m^*(s, \varepsilon) A_1(s) X_m^*(s, \varepsilon) + A_2(s) X_m^*(s, \varepsilon) +$$
$$+ X^*(s, \varepsilon) A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X_{m-1}^*(s, \varepsilon))\, ds. \qquad (6')$$

Зафиксируем теперь произвольную точку T, $0 < T \in R$ и покажем, что $X^*(t, \varepsilon)$ есть решением уравнения (6′) на интервале $[-T, T]$.

Очевидно, что $\forall \delta > 0$ можно подобрать номер m_0 так, чтобы при $m - 1 > m_0$ для всех $t \in [-T, T]$ имело место неравенство

$$\| X_m^*(t, \varepsilon) A_1(t) X_m^*(t, \varepsilon) + A_2(t) X^*(t, \varepsilon) + X_m^*(t, \varepsilon) A_3(t) +$$
$$+ A_4(t) + \varepsilon F(t, X_{m-1}^*(t, \varepsilon)) - X^*(t, \varepsilon) A_1(t) X^*(t, \varepsilon) -$$
$$- A_2(t) X^*(t, \varepsilon) - X^*(t, \varepsilon) A_3(t) - A_4(t) - \varepsilon F(t, X^*(t, \varepsilon)) \| < \delta.$$

Отсюда следует

$$\left\| \int_0^t (X_m^*(s, \varepsilon) A_1(s) X_m^*(s, \varepsilon) + A_2(s) X_m^* + X_m^* A_3(s) + \right.$$
$$+ X_m^* A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X_{m-1}^*(s, \varepsilon))\, ds - \int_0^t (X^* A_1(s) X^* +$$
$$\left. + A_2(s) X^* + X^* A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X^*(s, \varepsilon))\, ds \right\| \leqslant \delta T. \qquad (16)$$

Пользуясь произволом в выборе δ, находим

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^t X_m^*(s, \varepsilon) A_1(s) X_m^*(s, \varepsilon) + A_2(s) X_m^*(s, \varepsilon) +$$
$$+ X_m^*(s, \varepsilon) A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X_{m-1}^*(s, \varepsilon))\, ds = \int_0^t X^*(s, \varepsilon) A_1(s) X^*(s, \varepsilon) +$$
$$+ A_2(s) X^*(s, \varepsilon) + X^*(s, \varepsilon) A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X^*(s, \varepsilon))\, ds.$$

Таким образом, переходя к пределу в (6′) при $m \to \infty$, получаем тождество

$$X^*(t, \varepsilon) - X^*(0, \varepsilon) = \int_0^t X^*(s, \varepsilon) A_1(s) X^*(s, \varepsilon) + A_2(s) X^*(s, \varepsilon) +$$
$$+ X^*(s, \varepsilon) A_3(s) + A_4(s) + \varepsilon F(s, X^*(s, \varepsilon))\, ds,$$

т. е. функция $X^*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет в силу произвольности T тождеству (16) для любого $t \in R$. Далее, функция $X^*(t)$ дифференцируема по t, так как в правой части тождества стоит интеграл от непрерывной функции, и дифференцируема по верхнему пределу. Дифференцируя тождество (16), получаем

$$dX^*(t,\varepsilon)/dt = X^*(t,\varepsilon)A_1(t)X^*(t,\varepsilon) + A_2(t)X^*(t,\varepsilon) + \\ + X^*(t,\varepsilon)A_3(t) + A_4(t) + \varepsilon F(t, X^*(t,\varepsilon)).$$

т. е. $X^*(t, \varepsilon)$ удовлетворяет данному уравнению (1).

Единственность такого решения $X^*(t, \varepsilon)$ очевидна. Действительно, если $Y^*(t, \varepsilon)$, $X^*(t, \varepsilon)$ — решение уравнения (1) такое, что $\|Y^*(t, \varepsilon)\| < 1$, $\|X^*(t, \varepsilon)\| < 1$, то аналогично доказательству неравенства (15') можно показать, что

$$\|X^*(t,\varepsilon) - Y^*(t,\varepsilon)\| \leqslant \alpha \|X^*(t,\varepsilon) - Y(t,\varepsilon)\|. \tag{17}$$

Но так как $\alpha < 1$, то из (17) следует $X^*(t,\varepsilon) \equiv Y^*(t,\varepsilon)$. Этим и завершается доказательство теоремы.

1. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
2. *Митропольский Ю. А.* Об исследовании интегрального многообразия для нелинейных уравнений с переменными коэффициентами. // Укр. мат. журн.— 1958.— **10**, № 3.— С. 270—279.
3. *Самойленко А. М., Кулик В. Л.* К вопросу о существовании функции Грина задачи об инвариантном торе // Там же.— 1975.— **27**, № 3.— С. 348—359.
4. *Барис Я. С.* Интегральные многообразия и решения матричного уравнения Риккати // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1986.— № 1.— С. 7.—10.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.02.88