УДК 517.2

З. С. Зеракидзе

Гильбертово пространство мер

В настоящей работе продолжается изучение структуры семейств вероятностных мер, начатое в работах [1, 2]. Оказалось, что при изучении этого вопроса можно успешно применять теорию гильбертова пространства [3, 4]. При этом приходится рассматривать линейные оболочки знакопеременных σ-аддитивных мер, натянутые на исходное семейство вероятностных мер. Выделяется «остов» такого семейства, устанавливается представление гильбертова пространства мер в виде прямой суммы подпространств, определяемых остовом, изучаются линейные функционалы интегрального типа на гильбертовых пространствах мер и в терминах множества таких функционалов дается критерий слабой разделимости мер, образующих остов.

1. Определение. Пример. Пусть $(X, \mathfrak{B})$ — измеримое пространство, M^σ — линейное пространство всех σ-конечных знакопеременных мер на $\mathfrak{B}$.

Определение 1. *Линейное подмножество мер $M_H \subset M^\sigma$ называется гильбертовым пространством мер, если:*

1) *на M_H можно ввести так скалярное произведение $\langle \mu, \nu \rangle$, $\mu, \nu \in M_H$, что M_H будет гильбертовым пространством и для всяких взаимно сингулярных мер μ и ν, $\mu, \nu \in M_H$, скалярное произведение $\langle \mu, \nu \rangle = 0$;*

2) *если $\nu \in M_H$ и $|f| \leqslant 1$, то $\nu_f(A) = \int\limits_A f(x)\, \nu(dx) \in M_H$ и $\langle \nu_f, \nu_f \rangle \leqslant \leqslant \langle \nu, \nu \rangle$;*

3) *если $\nu_n \in M_H$ и одновременно выполняются условия $\nu_n \geqslant 0$, $\nu_n \downarrow 0$ и $|\nu_n(X)| < \infty$ $\forall n \in N$, то $\langle \nu_n, \psi \rangle \to 0$ $\forall \psi \in M_H$.*

Примеры. 1. Пусть $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — попарно ортогональные вероятностные меры на $(X, \mathfrak{B})$, а $g_\alpha(x)$ — действительные $\mathfrak{B}$-измеримые функции, M_H — множество мер ν вида

$$\nu(B) = \sum_{\alpha \in A_1} \int\limits_B g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx), \tag{1}$$

где $A_1 \subset \mathfrak{A}$ — некоторое счетное подмножество из $\mathfrak{A}$ и

$$\sum_{\alpha \in A_1} \int [g_\alpha(x)]^2\, \eta_\alpha(dx) < \infty. \tag{2}$$

Положим

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = \sum_{\alpha \in A_1 \cap A_2} \int g_\alpha^1(x)\, g_\alpha^2(x)\, \eta_\alpha(dx), \tag{3}$$

где

$$\nu_i(B) = \sum_{\alpha \in A_i} \int\limits_B g_\alpha^i(x)\, \eta_\alpha(dx), \qquad i = 1, 2. \tag{4}$$

Покажем, что пространство M_H полно. Пусть

$$\psi_n(B) = \sum_{\alpha \in A_n} \int_B g_\alpha^n(x)\, \eta_\alpha(dx), \tag{5}$$

$A_n \subset \mathfrak{A}$ — счетные множества, $\{\psi_n\}$ — некоторая фундаментальная последовательность в M_H.

Пусть $A' = \bigcup_n A_n$ меры η_α, $\alpha \in A'$, можно посадить на попарно непересекающиеся множества C_α, $\alpha \in A'$, и вместо функций $g_\alpha(x)$ в формуле (5) взять $g_\alpha(x) I_{C_\alpha}(x)$. Тогда

$$\psi_n(B) = \sum_{\alpha \in A'} \int g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx) \qquad \forall n \in N,$$

$$\| \psi_n - \psi_m \|^2 = \sum_{\alpha \in A'} \int | g_\alpha^n(x) - g_\alpha^m(x) |^2\, \eta_\alpha(dx). \tag{6}$$

Положим $g_{A'}^n(x) = \sum_{\alpha \in A'} g_\alpha^n(x)$, $\eta_{A'}(dx) = \sum_{\alpha \in A'} \eta_\alpha(dx)$. Из (6) следует $\| \psi_n - \psi_m \|^2 = \int | g_{A'}^n(x) - g_{A'}^m(x) |^2\, \eta_{A'}(dx)$. Из полноты пространства $L^2(\eta_{A'})$ вытекает, что существует такая функция $g_{A'}(x)$, что $\int g_{A'}^2(x)\, \eta_{A'}(dx) < \infty$ и $\int | g_{A'}^n(x) - g_{A'}^m(x) |^2\, \eta_{A'}(dx) \to 0$. Полагая $\psi(B) = \sum_{\alpha \in A'} \int_B g_{A'}(x) I_{C_\alpha}(x)\, \eta_\alpha(dx)$, имеем $\| \psi_n - \psi \| \to 0$.

2. Если $\nu(B) = \sum_{\alpha \in A_0} \int_B g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx)$, то $\nu_f(B) = \sum_{\alpha \in A_0} \int_B f(x)\, g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx)$ и $\langle \nu_f, \nu_f \rangle = \sum_{\alpha \in A_0} \int [f(x)\, g_\alpha(x)]^2\, \eta_\alpha(dx) \leqslant \sum_{\alpha \in A_0} \int [g_\alpha(x)]^2\, \eta_\alpha(dx) = \langle \nu, \nu \rangle$.

3. Пусть $\nu = \sum_{\alpha \in A_1} \int g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx)$, $\mu = \sum_{\alpha \in A_2} \int f_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx)$, $A_3 = A_1 \cup A_2$. Построим множества C_α, $\alpha \in A_3$, такие, что $C_\alpha \cap C_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in A_3$ и $\eta_\alpha(C_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in A_3$. Можно считать, что $g_\alpha(x) = 0$ при $x \overline{\in} C_\alpha$. Тогда $\nu \perp \mu$ означает $\sum_{\alpha \in A_3} g_\alpha(x) f_\alpha(x) = 0$ почти всюду по мере μ_{A_3}. И значит, $\langle \nu, \mu \rangle = \int \sum_{\alpha \in A_3} g_\alpha(x) f_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx) = 0$.

4. Пусть $\nu_n \downarrow 0$ и $\nu_n(x) < \infty$. Тогда, если $\nu_n(B) = \sum_{\alpha \in A_n} \int g_\alpha^n(x)\, \mu_\alpha(dx)$, можно считать, что A_n одинаково для всех n и $g_\alpha^n(x) \downarrow 0$ почти всюду по мере $\eta_\alpha(dx)$. Из условия монотонности вытекает, что $A_n \subset A_0$ $\forall n$, поэтому возможно представление $\nu_n(B) = \sum_{\alpha \in A_0} \int g_\alpha^n(x)\, \eta_\alpha(dx)$; $\langle \nu_n, \nu_n \rangle = \int \sum_{\alpha \in A_0} | g_\alpha^n(x) |^2 \times I_{C_\alpha}(x)\, \eta_\alpha(dx) \to 0$, так как подынтегральная функция стремится к нулю и имеется интегрируемая мажоранта $\sum_{\alpha \in A_0} | g_\alpha^1(x) |^2 I_{C_\alpha}(x)$. Тогда $\langle \nu_n, \psi \rangle \Rightarrow 0$ $\forall \psi \in M_H$. Таким образом, M_H — гильбертово пространство мер.

Пусть η — некоторая мера. Обозначим через $H_2(\eta)$ гильбертово пространство мер ν вида $\nu(B) = \int_B f(x)\, \eta(dx)$, где $\int f^2(x)\, \eta(dx) < \infty$ со скалярным произведением $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = \int f_1(x) f_2(x)\, \eta(dx)$, где $\nu_i(B) = \int_B f_i(x)\, \eta(dx)$, $i = 1, 2$.

Определение 2. *Пусть* $\{\eta_\alpha\}$ — *некоторое семейство мер и* $H_2(\eta_\alpha)$ — *множество мер вида* $\int f(x)\,\eta_\alpha(dx)$, *где* $\int f^2(x)\,\eta_\alpha(dx) < \infty$. *Семейство* $\{\eta_\alpha\}$ *называется остовом гильбертова пространства* H, *если* $H = \oplus H_2(\eta_\alpha)$ — *ортогональная сумма семейства гильбертовых пространств* $H_2(\eta_\alpha)$ [*см.* 4].

Замечание 1. В приведенном выше примере построено гильбертово пространство мер, для которого заданное семейство $\{\eta_\alpha\}$ является остовом.

2. Строение гильбертовых пространств мер. Покажем, что приведенный выше пример в принципе описывает все гильбертовы пространства мер.

Теорема 1. *Пусть* M_H — *гильбертово пространство мер. Тогда существует такое семейство попарно ортогональных неотрицательных мер* $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *таких, что* $M_H = \oplus H_2(\eta_\alpha)$, *т. е. семейство* $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *есть остов гильбертова пространства* M_H.

Доказательство. 1. Пусть $\mathfrak{K}_+$ — конус вероятностных мер из M_H. Для каждой меры $\psi \in M_H$ найдется $\eta \in \mathfrak{K}_+$ такая, что $\psi(B) = \int_B g(x)\,\eta(dx)$. Найдем семейство $\{\eta^*_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, которому подчинено $\mathfrak{K}_+$, т. е. $\forall \nu \in \mathfrak{K}_+$ существует счетное подмножество $A_1 \subset \mathfrak{A}$ и действительные $\mathfrak{B}$-измеримые функции $g_\alpha(x)$, $\alpha \in A_1$, такие, что $\nu(B) = \sum_{\alpha \in A_1} \int_B g_\alpha(x)\,\eta^*_\alpha(dx)$.

Пусть $\mathfrak{P} = \{X, \mathfrak{B}, \mu_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ — семейство вероятностных мер, принадлежащих конусу $\mathfrak{K}_+$, где A — отрезок порядковых чисел. Вполне упорядочим $\mathfrak{A}$. Будем строить меры η^*_α с помощью трансфинитной индукции так, чтобы они были попарно ортогональны следующим образом. Положим $\eta^*_1 = \mu_{\alpha_1}$. Пусть определены η^*_γ для $\gamma < \alpha$ (они попарно ортогональны), тогда найдется не более чем счетное множество Γ_α таких $\gamma < \alpha$, что η^*_γ не ортогонально μ_α. Положим

$$\hat{\eta}_\alpha(A) = \mu_\alpha(A) - \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \int_A \frac{d\mu_\alpha}{d\eta^*_\gamma}(x)\,\eta^*_\gamma(dx), \tag{7}$$

и

$$\eta^*_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } \hat{\eta}_\alpha(X) = 0; \\ \hat{\eta}_\alpha / \hat{\eta}_\alpha(x), & \text{если } \hat{\eta}_\alpha(X) > 0. \end{cases}$$

Сумма в (7) конечна, так как меры η^*_γ попарно ортогональны. Справедливо равенство

$$\mu_\alpha(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha} \int_A \frac{d\mu_\alpha}{d\eta^*_\gamma}(x)\,\eta^*_\gamma(dx) + \hat{\eta}_\alpha(A). \tag{8}$$

По построению η^*_α ортогональны η^*_γ при $\gamma < \alpha$. Полагая $A_1 = \{\alpha : \hat{\eta}_\alpha(X) > 0\}$, получаем, что любая мера $\mu_\alpha \in \mathfrak{K}_+$ подчинена семейству попарно ортогональных вероятностных мер $\{\eta^*_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$. Из формулы (8) видно, что $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$ $\eta^*_\alpha \leqslant \mu_\alpha$ и η^*_α абсолютно непрерывна относительно μ_α, поэтому $\frac{d\eta^*_\alpha}{d\mu_\alpha}(x) \leqslant 1$ $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$. Отсюда вытекает, что $\eta^*_\alpha \in \mathfrak{K}_+$ $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$.

2. Пусть H^*_α — множество мер из M_H, абсолютно непрерывных относительно η^*_α. Рассмотрим меру $\nu_C(B) = \int_B I_C(x)\,\eta^*_\alpha(dx)$ и положим $\zeta(C) = \langle \nu_C, \eta^*_\alpha \rangle = \langle \nu_C, \nu_C \rangle \geqslant 0$, ν_C аддитивна. Если $C_n \downarrow \varnothing$, то $\langle \nu_{C_n}, \eta^*_\alpha \rangle \to 0$. Значит, $\zeta(C)$ — мера. Мера ζ абсолютно непрерывна относительно η^*_α. Если

$\zeta(C)=0$, то $\nu_C=0$, значит, $\eta_\alpha^*(C)=0$. Так что $\eta_\alpha^*\sim\zeta$. Поэтому $\langle\nu_C,\eta_\alpha^*\rangle=$ $=\int\limits_C g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)$, где $g_\alpha(x)>0$ почти всюду по мере η_α^*.

3. Пусть $\nu_f^\alpha(B)=\int\limits_B f(x)\,\eta_\alpha^*(dx)$. Обозначим через F_0 пространство конечнозначных измеримых функций. Если $f_1,\ f_2\in F_0$, $f_i(x)=a_k^i$, при $x\in B_k$, $k=\overline{1,m}$, $B_l\cap B_j=\varnothing$, $l\neq j$, $\cup B_l=X$, то

$$\langle\nu_{f_1}^\alpha,\nu_{f_2}^\alpha\rangle=\sum_{k,l}a_k^1a_l^2\langle\nu_{B_k},\nu_{B_l}\rangle=\sum_k a_k^1a_k^2\langle\nu_{B_k},\nu_{B_k}\rangle=$$

$$=\sum_k a_k^1a_k^2\int\limits_{B_k}g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)=\int f_1(x)\,f_2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx).$$

4. Пусть $f\geqslant 0$, $\nu_f^\alpha\in H_\alpha^*$, $f_n\uparrow f$, $f_n\in F_0$. Тогда $\langle\nu_f,\nu_f\rangle\geqslant\langle\nu_{f_n},\nu_{f_n}\rangle=$ $=\int f_n^2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)$ и значит,

$$\int f^2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)=\lim_{n\to\infty}\int f_n^2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)\leqslant\langle\nu_f,\nu_f\rangle<\infty.$$

Так как $\nu_{f-f_n}\downarrow 0$ по вариации, то $\lim\limits_{n\to\infty}\langle\nu_{f-f_n},\psi\rangle=0$, $\langle\nu_f,\psi\rangle=\lim\limits_{n\to\infty}\langle\nu_{f_n},\psi\rangle$ $\forall\psi\in M_H$. Поэтому при $\tilde f\in F_0$

$$\langle\nu_f,\nu_{\tilde f}\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\nu_{f_n},\nu_{\tilde f}\rangle=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,\tilde f(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)=$$

$$=\int f(x)\,\tilde f(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx).$$

Аналогично производим предельный переход по $\tilde f\geqslant 0$, $\nu_{\tilde f}\in H_\alpha^*$, где H_α^* — множество f, для которых $H_\alpha^*=\left\{f:\int f^2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)<\infty\right\}$. Таким оразом, для всех f и $\tilde f$, $f,\tilde f\geqslant 0$, $\nu_f,\nu_{\tilde f}\in H_\alpha^*$,

$$\langle\nu_f,\nu_{\tilde f}\rangle=\int f(x)\,\tilde f(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx). \tag{9}$$

Эта формула очевидным образом распространяется на знакопеременные f, $\tilde f$.

Мы установили, что $H_\alpha^*\subset H_2(\eta_\alpha)$. Теперь покажем, что эти пространства совпадают.

5. Обозначим через F_α множество f, для которых $\int f d\eta^*\in H_\alpha^*$. Покажем, что $F_\alpha=\left\{f:\int f^2(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)<\infty\right\}$. Достаточно установить это для $|f|$. Если $f_n\in F^0$ и $f_n\uparrow|f|$, то для всех $\psi\in H_\alpha^*$ вида $\psi=\int q(x)\,\eta_\alpha(dx)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\langle\nu_{f_n},\psi\rangle=\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,q(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)=\int|f(x)|\,q(x)\,\eta_\alpha^*(dx).$$

(Предельный переход возможен, так как $|f(x)\,q(x)|$ является мажорантой и по предположению $\int|f(x)|^2\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)<\infty$, а $\int|q(x)|^2\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)<\infty$, так как $\psi\in H_\alpha^*$.) Значит, ν_{f_n} слабо сходится в H_α^* к некоторой мере $\nu\in H_\alpha^*$. Если $\nu=\int\tilde f\eta_\alpha^*(dx)$, то

$$\int f(x)\,q(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)=\langle\nu,\psi\rangle=\int\tilde f(x)\,q(x)\,g_\alpha(x)\,\eta_\alpha^*(dx)$$

для всех $q\in F^0$ и, значит. $f=\tilde f$.

6. Итак, $H_\alpha^* = \left\{\nu_f : \int f^2(x)\, g_\alpha(x)\, \eta_\alpha^*(dx) < \infty\right\}$. Положим $\eta_C(C) = = \int\limits_C \frac{1}{g_\alpha(x)}\, \eta_\alpha^*(dx)$, η_α — σ-конечна, так как $g > 0$ почти всюду по мере $\eta_\alpha^*(dx)$.

Если $\nu \in H_\alpha^*$, то $\nu(B) = \int\limits_B f(x)\, \eta_\alpha^*(dx)$, где $\int f^2(x)\, g_\alpha(x)\, \eta_\alpha^*(dx) < \infty$. Значит, $\nu(B) = \int\limits_B (f(x)\, g_\alpha(x))\, \eta_\alpha(dx)$, где $\int (f(x)\, g_\alpha(x))^2\, \eta_\alpha(dx) = \int f^2(x)\, g_\alpha(x) \times \times \eta_\alpha^*(dx) < \infty$, т. е. $H_\alpha^* = H_2(\eta_\alpha)$.

3. Интегральные линейные функционалы и слабая разделимость мер. Покажем, как связана слабая разделимость мер со структурой гильбертова пространства.

Пусть M_H — гильбертово пространство мер. Рассмотрим $\int f(x)\, \nu(dx)$. Так как меры ν, вообще говоря, σ-конечны, то этот интеграл не обязательно определен для ограниченных измеримых f. Зафиксируем совокупность неотрицательных мер η_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, для которой в силу теоремы 1 $M_H = = \oplus H_2(\eta_\alpha)$.

Лемма. *Если $\int f(x)\, \nu(dx)$ определен для всех $\nu \in M_H$, то существует не более чем счетное множество $A_0 \subset \mathfrak{A}$, для которого $\int f^2(x)\, \eta_\alpha(dx) \neq 0$, $\alpha \in A_0$. При этом $\sum\limits_{\alpha \in A_0} \int f^2(x)\, \eta_\alpha(dx) < +\infty$ и для всякой меры $\nu(C) = = \sum\limits_{\alpha \in A_1} \int\limits_C g_\alpha(x)\, \eta_\alpha(dx)$*

$$\int f(x)\, \nu(dx) = \sum_{\alpha \in A_0 \cap A_1} \int g_\alpha(x)\, f(x)\, \eta_\alpha(dx). \tag{10}$$

Доказательство. Если f такова, что $\int f(x)\, \nu(dx)$ определен на $H_2(\eta_\alpha)$, то $\int f^2(x)\, \eta_\alpha(dx) < \infty$. Действительно, тогда $\int f(x)\, g(x)\, \eta_\alpha(dx)$ определен для всех $g \in L^2(\eta_\alpha)$. Существует не более чем счетное подмножество $A_0 \subset \mathfrak{A}$, для которого $\int f^2(x)\, \eta_\alpha(dx) \neq 0$. Действительно, пусть при некотором $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность α_k, что при $\Delta > \varepsilon$ выполняется $\varepsilon \leqslant \int f^2(x)\, \eta_{\alpha_k}(dx) \leqslant \Delta$. Выберем $C_k > 0$ так, чтобы $\sum\limits_k C_k^2 < \infty$, $\sum\limits_k C_k = +\infty$. Тогда $\nu(B) = \sum\limits_k C_k \int\limits_B f(x)\, \eta_\alpha(dx) \in M_H$, так как $\sum\limits_k C_k^2 \int f^2(x) \times \times \eta_{\alpha_k}(dx) \leqslant \Delta \sum\limits_k C_k^2 < \infty$. С другой стороны, $\int f(x)\, \nu(dx) = \sum\limits_k C_k \int f^2(x) \times \times\, \eta_{\alpha_k}(dx) = \infty$.

Пусть $\{\alpha_k\} = A_0$. Тогда

$$\int f(x)\, \nu(dx) = \sum_{\alpha \in A_0 \cap A_1} \int f(x)\, g_{\alpha_k}(x)\, \eta_{\alpha_k}(dx).$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если $\int f(x)\, \nu(dx)$ определен для всех $\nu \in M_H$, то $\int f(x)\, \nu(dx)$ является непрерывным функционалом по ν (в метрике M_H).*

Доказательство. Из формулы (10) вытекает, что $\int f(x)\, \nu(dx)$ — счетная сумма функционалов вида $\int g_\alpha(x)\, f(x)\, \eta_\alpha(dx)$. Этот функционал непрерывен в $H_2(\eta_\alpha)$, так как $\int f^2(x)\, \eta_\alpha(dx) < \infty$. Сходящийся ряд непрерывных функционалов — непрерывный функционал. Следствие доказано.

Напомним, что семейство мер $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется слабо разделимым, если существует семейство множеств C_α таких, что $\eta_\beta(X - C_\alpha) = 0$, $\eta_\beta(C_\alpha) = 0$ $\forall \beta \neq \alpha$.

Обозначим через $F(M_H)$ множество f, для которых $\int f(x)\,\nu(dx)$ определен для всех $\nu \in M_H$.

Теорема 2. *Пусть $M_H = \oplus H_2(\eta_\alpha)$. Для того чтобы семейство мер $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ было слабо разделимо, необходимо и достаточно, чтобы соответствие $f \to \psi_f$, задаваемое равенством $\int f(x)\,\nu(dx) = \langle \psi_f, \nu \rangle$, $\forall \nu \in M_H$, было взаимно однозначно.*

Достаточность. Пусть для $f \in F$ ν_f обозначает меру, для которой $\int f(x)\,\psi(dx) = \langle \nu_f, \psi \rangle$. Для $f \in F$ обозначим через A_f счетное подмножество $\subset \mathfrak{A}$, для которого $\int f^2(x)\,\eta_\alpha(dx) = 0$ при $\alpha \bar{\in} A_f$.

Рассмотрим меры $\psi \in H_2(\eta_\alpha)$ и пусть $f_\psi \in F$ функция, соответствующая мере ψ. Тогда при $\psi_1, \psi_2 \in H_2(\eta_\alpha)$

$$\int f_{\psi_\perp}(x)\,\psi_2(dx) = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int f_1(x)\,f_2(x)\,\eta_\alpha(dx) = \int f_{\psi_1}(x)\,f_2(x)\,\eta_\alpha(dx).$$

Значит, $f_{\psi_1} = f_1$ почти всюду по мере η_α. Пусть $f_\alpha(x) > 0$ почти всюду по мере η_α, $\int f_\alpha^2(x)\,\eta_\alpha(dx) < \infty$, $\eta_\alpha^* = \int f_\alpha(x)\,\eta_\alpha(dx)$, тогда

$$\int f_{\eta_\alpha^*}(x)\,\eta_\beta(dx) = \langle \eta_\alpha^*, \eta_\beta \rangle = 0 \quad \forall \beta \neq \alpha. \tag{11}$$

Обозначим $C_\alpha = \{x : f_{\eta_\alpha^*}(x) > 0\}$. Тогда из (11) вытекает, что $\eta_\beta(C_\alpha) = 0$ $\forall \beta \neq \alpha$. С другой стороны,

$$\eta_\alpha^*(X - C_\alpha) = \int_{X - C_\alpha} f_\alpha(x)\,\eta_\alpha(dx) = \int f_\alpha(x)\,I_{X - C_\alpha}(x)\,\eta_\alpha(dx) =$$

$$= \int f_{\eta_\alpha^*}(x)\,I_{X - C_\alpha}(x)\,\eta_\alpha(dx) = 0,$$

так как $f_{\eta_\alpha^*} = f_\alpha$ почти всюду по мере η_α и $f_{\eta_\alpha^*}(x)\,I_{X - C_\alpha}(x) \equiv 0$.

Необходимость. Так как семейство мер $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ слабо разделимо, то существуют такие множества C_α, что $\eta_\beta(X - C_\beta) = 0$, $\eta_\beta(C_\alpha) = 0$ $\forall \beta \neq \alpha$. Функцию $I_{C_\alpha}(x) \in F$ поставим в соответствие мере $\eta_\alpha \in H_2(\eta_\alpha)$. Тогда $\int I_{C_\alpha}(x)\,\eta_\alpha(dx) = \int I_{C_\alpha}(x)\,I_{C_\alpha}(x)\,\eta_\alpha(dx) = \langle \eta_\alpha, \eta_\alpha \rangle$. Функцию $f_{\psi_1}(x) = f_1(x)\,I_{C_\alpha}(x)$ поставим в соответствие мере $\psi_1 \in H_2(\eta_\alpha)$. Для любого $\psi_1 \in H_2(\eta_\alpha)$

$$\int f_{\psi_1}(x)\,\psi_2(dx) = \int f_1(x)\,I_{C_\alpha}(x)\,\psi_2(dx) = \int f_1(x)\,f_2(x)\,I_{C_\alpha}(x)\,\eta_\alpha(dx) =$$

$$= \int f_1(x)\,f_2(x)\,\eta_\alpha(dx) = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle.$$

Функцию $f(x) = \sum_{\alpha \in A_0} g_\alpha(x)\,I_{C_\alpha}(x) \in F$ поставим в соответствие мере $\nu \in M_H$, где $\nu = \sum_{\alpha \in A_0} \int g_\alpha(x)\,\eta_\alpha(dx)$. Тогда $\forall \nu_1 \in M_H$, $\nu_1(B) = \sum_{\alpha \in A_1} \int_B g_\alpha^1(x)\,\eta_\alpha(dx)$ будем иметь

$$\int f(x)\,\nu_1(dx) = \int \sum_{\alpha \in A_0 \cap A_1} g_\alpha(x)\,g_\alpha^1(x)\,\eta_\alpha(dx) = \sum_{\alpha \in A_0 \cap A_1} \int g_\alpha(x)\,g_\alpha^1(x)\,\eta_\alpha(dx) =$$

$$= \langle \nu, \nu_1 \rangle.$$

Таким образом, построено соответствие $f \to \psi_f$, задаваемое равенством $\int f(x)\,\nu(dx) = \langle \psi_f, \nu \rangle$ $\forall \nu \in M_H$, которое взаимно однозначно. Теорема доказана.

Замечание 2. Из доказанной теоремы вытекает, что указанное соответствие каждой мере $\nu \in M_H$ ставит в соответствие некоторую функцию $f \in F(M_H)$. Если в $F(M_H)$ отождествлять функции, совпадающие по мере $\{\eta_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ $\forall \alpha \in \mathfrak{A}$, то соответствие между $F(M_H)$ и M_H биективно, т. е. взаимно однозначно и на все пространство M_H.

1. *Ибрамхалилов И. М., Скороход А. В.* Состоятельные оценки параметров случайных процессов.— Киев : Наук. думка, 1980.— 188 с.
2. *Зеракидзе З. С.* Строение статистических структур.—Сообщ. АН ГССР, 1984, 113, № 1, с. 37—39.
3. *Морен К.* Методы гильбертова пространства.— М. : Мир, 1965.— 570 с.
4. *Плеснер А. И.* Спектральная теория линейных операторов.— М. : Мир, 1965.— 623 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.09.84