УДК 517.53

В. В. Андриевский

К вопросу о гладкости интеграла типа Коши

1. Пусть L — жорданова замкнутая спрямляемая кривая, разбивающая плоскость на две области $G = \operatorname{int} L$ и $\Omega = \operatorname{ext} L$. Для заданной и непрерывной на L функции $f(\zeta)$ положим

$$F(z) = (Kf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in G. \tag{1}$$

При исследовании интеграла типа Коши (1) традиционным является вопрос о влиянии структурных свойств функции $f(\zeta)$ на аналогичные свойства функции $F(z)$. При этом существенную роль играет геометрическое строение кривой L.

Нас будут интересовать кривые L, для которых справедлива теорема Племеля—Привалова, т. е. из условия $f(\zeta) \in H^\alpha(L)$, $0 < \alpha < 1$, следует возможность непрерывного продолжения $F(z)$ на $\overline{G}$ до функции класса $H^\alpha(\overline{G})$, где $H^\alpha(L)$ и $H^\alpha(\overline{G})$, $0 < \alpha < 1$, — соответствующие классы Гельдера.

Известно (см. [1, с. 232—243; 2, 3]), что теорема Племеля—Привалова справедлива для кривых L, удовлетворяющих условию

$$\theta_L(\delta) \overset{\text{df}}{=} \sup_{z \in L} \operatorname{mes}\{\zeta : \zeta \in L,\ |\zeta - z| \leqslant \delta\} \asymp \delta, \quad 0 < \delta \leqslant \operatorname{diam} L.$$

При отсутствии этого условия, вообще говоря, наблюдается падение гладкости, т. е. уменьшение показателя α.

В данной работе для любого фиксированного μ, $0 < \mu < 1$, построен пример спрямляемой квазиконформной (см. [4]) кривой L^μ, у которой

$$\theta_{L^\mu}(\delta) \geqslant C\delta^\mu; \qquad 0 < \delta < 1, \quad C = \text{const} > 0, \tag{2}$$

и тем не менее справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $0 < \mu < 1$, $G^\mu = \operatorname{int} L^\mu$. *Если* $f(\zeta) \in H^\alpha(L^\mu)$, $0 < \alpha < 1$, *то* $F(z) \in H^\alpha(\overline{G}^\mu)$.

Следовательно, справедливость теоремы Племеля — Привалова зависит, по-видимому, от более тонких геометрических характеристик кривой L, чем скорость убывания к 0 при $\delta \to 0$ величины $\theta_L(\delta)$, так как согласно сформулированной выше теореме это убывание может быть произвольно медленным по степенной шкале *.

2. Пусть $0 < \mu < 1$ — произвольное фиксированное число. Через C, C_1, … будем обозначать различные константы, а через ε, ε_1, … — достаточно малые константы, зависящие (если не оговорено особо) только от μ и в различных соотношениях, вообще говоря, разные.

Наши построения базируются на некотором видоизменении процедуры построения локально неспрямляемой квазиконформной кривой, изложенной в работе [7, с. 42 — 45]. Следуя [7], рассмотрим вспомогательное семейство функций $w = f(\varepsilon_n, \delta_n, z)$, $\delta_n > 1$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, обладающих следующими свойствами:

* Возможность построения подобных примеров отмечалась в работах [5, 6].

I. Функция $w = f(\varepsilon_n, \delta_n, z)$ квазиконформно отображает круг $\{|z| \leqslant 1\}$ на круг $\{|w| \leqslant 1\}$, причем характеристики отображения непрерывны. При этом если $\operatorname{Im} z = 0$ или $|z| = 1$, то $p_n(z) = 1$ ($p_n(z)$ — соответствующая характеристика отображения $f(\varepsilon_n, \delta_n, z)$, называемая деформацией [7, с. 7]).

II. $p_n(z) \leqslant 1 + \varepsilon_n$.

III. Отображение $w = f(\varepsilon_n, \delta_n, z)$ оставляет неподвижной границу единичного круга $\{|z| = 1\}$.

IV. Действительный диаметр $\{z : |z| \leqslant 1, \ \operatorname{Im} z = 0\}$ переводится отображением $w = f(\varepsilon_n, \delta_n, z)$ в спрямляемую дугу, удлиняясь при этом не менее, чем в δ_n раз.

При $n = 1, 2, \ldots$ положим $z_n = 2^{-n}$, $\delta_n = 2^{n(1-\mu)+1}$. Рассмотрим последовательность квазиконформных отображений $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ плоскости на плоскость, задаваемых рекуррентным соотношением $f_1(z) = z$,

$$f_{n+1}(z) = \begin{cases} z_n + r_n f\left(\varepsilon_n, \delta_n, \dfrac{z - z_n}{r_n}\right), & |z - z_n| \leqslant r_n; \\ f_n(z), & |z - z_n| > r_n, \end{cases}$$

где $r_n \leqslant 2^{-n-2}$ выбрано так, чтобы длина образа отрезка $[z_n - r_n, z_n + r_n]$ удовлетворяла условию $\operatorname{mes} f_{n+1}([z_n - r_n, z_n + r_n]) = 2^{-n\mu}$. Нетрудно видеть, что последовательность $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к функции $w = f_\mu(z)$, квазиконформно отображающей плоскости на плоскость, причем $f_\mu(\infty) = \infty$, $f_\mu(0) = 0$. Деформация $p_\mu(z)$ этого отображения непрерывна и, если $\operatorname{Im} z = 0$ или $|z| \geqslant 1$, то $p_\mu(z) = 1$. Отрезок $[-1, 1]$ отображение $f_\mu(z)$ переводит в спрямляемую квазиконформную дугу γ_μ, для которой

$$\theta_{\gamma_\mu}(2^{-n}) \geqslant C 2^{-n\mu}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Рассмотрим дробно-линейное отображение $\varphi_0(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ и в качестве искомой дуги L^μ возьмем образ единичной окружности $\{|w| = 1\}$ при отображении $\varphi_0 \circ f_\mu \circ \varphi_0^{-1}$. Справедливость неравенства (2) следует из оценки (3).

3. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число. В силу свойств деформации $p_\mu(z)$ кривую L^μ можно рассматривать как образ окружности $\{|w| = 1\}$ при $(1 + \varepsilon)$-квазиконформном отображении $r(w)$ области $\Delta = \Delta(\varepsilon) = \{w : (1 + \varepsilon_1)^{-1} < |w| < 1 + \varepsilon_1\}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$. Определим в окрестности кривой L^μ $(1 + \varepsilon)^2$-квазиконформное отражение $y(\zeta)$, положив $y(\zeta) = r\left(\dfrac{1}{\overline{r^{-1}(\zeta)}}\right)$, $\zeta \in B = r(\Delta)$.

Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, конформно и однолистно отображающую область $\Omega^\mu = \operatorname{ext} L^\mu$ на $\Omega' = \{w : |w| > 1\}$ с нормировкой $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$. Ее удобно представить в виде сужения на Ω^μ $(1 + \varepsilon)^2$-квазиконформного отображения

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \Phi(\zeta), & \zeta \in \overline{\Omega}^\mu; \\ \dfrac{1}{\overline{(\Phi \circ y)(\zeta)}}, & \zeta \in B \setminus \overline{\Omega}^\mu \end{cases} \tag{4}$$

области $\Omega_1 = \Omega^\mu \cup B$ на $\Omega_1' \supset \overline{\Omega}'$.

Лемма. *Пусть точки $z_j \in \overline{\Omega}^\mu$, $j = 1, 2, 3$, таковы, что $|z_1 - z_2| \leqslant C_1 |z_1 - z_3| \leqslant C_2$; $\Phi(z_j) = \tau_j$. Тогда при $0 < \varepsilon < 1$ выполняется неравенство*

$$\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}\right| \leqslant C_3 \left|\frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 - \tau_3}\right|^{1-\varepsilon}, \tag{5}$$

в котором $C_3 = C_3(\mu, \varepsilon, C_1, C_2) > 0$.

Доказательство. В предшествующих лемме рассуждениях возьмем достаточно малое число $\varepsilon = \varepsilon_1$ и пусть $\varphi(\zeta)$ есть $(1+\varepsilon_1)^2 = (1+\varepsilon_2)$-квазиконформное отображение, задаваемое формулой (4).

Рассмотрим семейство Γ замкнутых жордановых локально-спрямляемых кривых $\gamma \subset \Omega_1$, каждая из которых разбивает всю плоскость на две области: ограниченную, содержащую точки z_1 и z_2, и неограниченную, содержащую точку z_3 и границу $\partial\Omega_1$ области Ω_1. Модуль этого семейства [4] и его образа $\Gamma' = \varphi(\Gamma)$ несложно оценивается следующим образом (см., например, [8]):

$$m(\Gamma) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right| + C_4, \tag{6}$$

$$m(\Gamma') \geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} \right| - C_5, \tag{7}$$

где $C_j = C_j(\mu, \varepsilon_1, C_1, C_2) > 0$, $j = 4, 5$. Так как при K-квазиконформном отображении, $K > 1$, модули произвольных семейств кривых изменяются не более, чем в K раз [4, с. 25], то при достаточно малых ε_1 выполняется неравенство

$$\frac{m(\Gamma)}{m(\Gamma')} \geqslant (1+\varepsilon_2)^{-1} \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{8}$$

Таким образом, согласно (6) — (8) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \right| \geqslant m(\Gamma) - C_4 \geqslant (1-\varepsilon)\, m(\Gamma') - C_4 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \ln \left| \frac{\tau_1 - \tau_3}{\tau_1 - \tau_2} \right| - (1-\varepsilon) C_5 - C_4,$$

откуда следует соотношение (5).

4. Доказательство теоремы. Согласно [9] нам надо убедиться в справедливости при $z \in G^\mu$ оценки

$$|F'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L^\mu} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leqslant C_1 d^{\alpha-1}(z, L^\mu), \tag{9}$$

где $d(z, L^\mu) \overset{\mathrm{df}}{=} \inf\limits_{\zeta \in L^\mu} |\zeta - z|$. Продолжим функцию $f(z)$ непрерывно в $\Omega^\mu = \operatorname{ext} L^\mu$ так, чтобы она была там непрерывно частно дифференцируемой, а ее формальная производная удовлетворяла неравенству $|\partial f(\zeta)/\partial\bar{\zeta}| \leqslant C_2 \times d^{\alpha-1}(\zeta, L^\mu)$, $\zeta \in \Omega^\mu$. Возможность такого продолжения оговорена в [10, 11] и следует также из результатов работы [2]. Воспользуемся далее формулой Коши — Грина

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_2^\mu} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2} - \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\Omega_2^\mu} \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\sigma_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \tag{10}$$

где $L_2^\mu = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 2\}$, $\Omega_2^\mu = \operatorname{int} L_2^\mu \setminus \overline{G}$. Контурный интеграл из соотношения (10) оценивается тривиально. Для обоснования оценки (9) остается убедиться в справедливости при $z \in G^\mu$ неравенства

$$\iint\limits_{\Omega_2^\mu} \frac{d^{\alpha-1}(\zeta, L^\mu)}{|\zeta - z|^2}\, d\sigma_\zeta \leqslant C_3 d^{\alpha-1}(z, L^\mu). \tag{11}$$

Пусть $z^* \in L^\mu$ такова, что $|z - z^*| = d(z, L^\mu) \overset{\mathrm{df}}{=} d_z$. Положим $d_\zeta = d(\zeta, L^\mu)$, $D_2^\mu = \Phi(\Omega_2^\mu)$, $U_1 = \{\zeta : \zeta \in \Omega_2^\mu,\ |\zeta - z^*| \leqslant d_z\}$, $U_2 = \Omega_2^\mu \setminus U_1$; $U_j' = \Phi(U_j)$, $j = 1, 2$; $\Phi(z^*) = \tau^*$, $\Phi(\zeta) = w$.

Через $s > 0$ обозначим любое из решений уравнения $|z^* - \tilde{z}^*_{1+s}| = d_z$, где $\tilde{z}^*_{1+s} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi^{-1}[(1+s)\Phi(z^*)]$. Применяя лемму последовательно к тройкам точек ζ, $\zeta' = \Phi^{-1}[\Phi(\zeta)|\Phi(\zeta)|^{-1}]$, z^*; z^*, $\tilde{z}^*_{1+s}$, ζ и ζ', $\tilde{\zeta}'_{1+s} = \Phi^{-1}[(1+s) \times \Phi(\zeta')]$, ζ, получаем с учетом результатов работы [12]

$$\frac{d_\zeta}{|\zeta - z|} \asymp \left|\frac{\zeta - \zeta'}{\zeta - z^*}\right| \leqslant C_4 \left|\frac{|w| - 1}{w - \tau^*}\right|^{1-\varepsilon}, \quad \zeta \in U_2, \tag{12}$$

$$\frac{d_z}{|\zeta - z|} \asymp \left|\frac{z^* - z^*_{1+s}}{z^* - \zeta}\right| \leqslant C_5 \left|\frac{s}{w - \tau^*}\right|^{1-\varepsilon}, \quad \zeta \in U_2, \tag{13}$$

$$\frac{d_\zeta}{d_z} \asymp \left|\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta' - \tilde{\zeta}'_{1+s}}\right| \leqslant C_6 \left(\frac{|w| - 1}{s}\right)^{1-\varepsilon}, \quad \zeta \in U_1. \tag{14}$$

Зафиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon < \min\{\alpha/4, (1-\alpha)/4\}$. Положим для удобства $(1-\varepsilon)(1+\alpha) = 1 + a$, $(1-\varepsilon)(1-\alpha) = 1 - b$. В силу сделанного предположения $\alpha/2 < a = \alpha - \varepsilon(1+\alpha) < \alpha$, $\alpha < b = \alpha + \varepsilon(1-\alpha) < ((1+\alpha)/2)^2 < 1$. Согласно неравенствам (12)—(14), а также теореме 1 работы [13] имеем

$$d_z^{1-\alpha} \iint\limits_{\Omega_2^\mu} \frac{d_\zeta^{\alpha-1}}{|\zeta - z|^2}\, d\sigma_\zeta \asymp d_z^{1-\alpha} \iint\limits_{D_2^\mu} \frac{d_\zeta^{\alpha+1} d\sigma_w}{|\zeta - z|^2 (|w| - 1)^2} \asymp$$

$$\asymp \iint\limits_{U_1'} \left(\frac{d_\zeta}{d_z}\right)^{1+\alpha} \frac{d\sigma_w}{(|w| - 1)^2} + \iint\limits_{U_2'} \left|\frac{d_\zeta}{\zeta - z}\right|^{1+\alpha} \left|\frac{d_z}{\zeta - z}\right|^{1-\alpha} \frac{d\sigma_w}{(|w| - 1)^2} \leqslant$$

$$\leqslant C_7 \iint\limits_{U_1'} \frac{(|w| - 1)^{a-1}}{s^{a+1}}\, d\sigma_w + C_8 \iint\limits_{U_2'} \frac{s^{1-b}(|w| - 1)^{a-1}}{|w - \tau^*|^{2+a-b}}\, d\sigma_w \leqslant$$

$$\leqslant C_9 s^{-1-a} \int\limits_0^{C_{10}s} r\,dr \int\limits_0^{2\pi} (r\varphi)^{a-1} d\varphi + C_{11} s^{1-b} \int\limits_s^{C_{12}} \frac{dr}{r^{1+a-b}} \int\limits_0^{2\pi} (r\varphi)^{a-1} d\varphi \asymp 1,$$

т. е. неравенство (11) справедливо.

1. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения.— Киев : Наук. думка, 1975.— 271 с.
2. *Салаев В. В.* Прямые и обратные оценки для особого интеграла Коши по замкнутой кривой.— Мат. заметки, 1976, 19, № 3, с. 365—380.
3. *Герус О. Ф.* Конечноразностные гладкости интегралов типа Коши.— Укр. мат. журн., 1977, 29, № 5, с. 642—646.
4. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям.— М. : Мир, 1969.— 133 с.
5. *Андриевский В. В.* Конструктивное описание классов функций на континуумах комплексной плоскости с учетом роста аппроксимационных полиномов.— Киев, 1983.— 20 с.— (Препринт/АН УССР, Ин-т математики; 83-12).
6. *Салимов Т. С.* Сингулярный интеграл Коши в пространствах H_ω.— Тр. Сарат. ун-та, 1983, с. 130—134.
7. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений.— Новосибирск : Наука, 1974.— 98 с.
8. *Андриевский В. В.* Некоторые свойства континуумов с кусочно-квазиконформной границей.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 4, с. 435—440.
9. *Двейрин М. З.* Теорема Харди — Литллвуда о приближении гармонических функций в областях с квазиконформной границей.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 11—14.
10. *Андриевский В. В.* Прямые теоремы приближения на квазиконформных дугах.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, 44, № 2, с. 243—261.
11. *Андриевский В. В., Исрафилов Д. М.* Приближение функций на квазиконформных кривых рациональными функциями.— Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук, 1980, № 4, с. 21—26.

12. *Белый В. И.* Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей.— Мат. сб., 1977, 102, № 3, с. 331—361.
13. *Андриевский В. В.* О приближении функций частными суммами ряда по полиномам Фабера на континуумах с ненулевой локальной геометрической характеристикой.— Укр. мат. журн., 1980, 32, № 1, с. 3—10.

Ин-т прикл. математики и механики
АН УССР, Донецк

Получено 02.03.84,
после доработки — 26.08.85