УДК 517.948.3

Нгуен Ван Нгок, Г. Я. Попов

О парных интегральных уравнениях, связанных с преобразованиями Фурье

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty A(\xi)\gamma(\xi)\sin\xi x d\xi = f_n(x), \quad x\in I_n, \quad n=\overline{1,N},$$

$$\int_0^\infty A(\xi)\cos\xi x d\xi = 0, \quad x\in\overline{R}^+\diagdown\bigcup_{n=1}^{N} I_n, \tag{1}$$

где $A(\xi)$ — неизвестная функция, $\gamma(\xi)$ и $f_n(\xi)$ — заданные функции, $\overline{R}^+ = [0,\infty]$, $I_n=(a_n, b_n)$ — некоторые конечные не пересекающиеся между собой интервалы, содержащиеся в $\overline{R}^+$, причем $a_1<a_2<\ldots<a_N$.

Уравнения вида (1) часто встречаются в приложениях, особенно в контактных задачах и в задачах о трещинах теории упругости. При $N=1$ их называют парными или тройными уравнениями в зависимости от расположения интервала I_1 в $\overline{R}^+$. Поскольку этот термин не распространяется на уравнения при $N=2, 3, \ldots$, а неизвестная функция $A(\xi)$ содержится только в двух (в паре) различных выражениях, уравнения вида (1) при произвольном N естественно называть парными уравнениями на системе интервалов. Отметим также, что во многих работах производная от первого выражения слева в (1) формально перенесена под знак интеграла. Оказывается, что такой перенос усложняет строгое исследование разрешимости уравнения (1).

Обзоры методов решения и применения парных уравнений даются в [1, 2]. В указанных работах также отмечено, что в исследовании парных уравнений (уравнений на двух интервалах) к настоящему времени основное внимание уделялось конструктивно формальной стороне дела и почти не изучались вопросы строгого обоснования применяемых построений. Для парных уравнений на системе интервалов эти вопросы тем более не изучены.

Цель настоящей работы — строгое исследование вопросов разрешимости парных уравнений на системе интервалов вида (1).

1. Обозначения и предварительные результаты. Символами $F_c[f]$ и $F_s[f]$ обозначаются косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(\xi)$, а $F_c^{-1}[f]$ и $F_s^{-1}[f]$ — их соответствующие обратные преобразования.

Для $x\in I_n=(a_n, b_n)$ положим

$$\rho_n(x) = [(x-a_n)(b_n-x)]^{-1/2}, \quad L^2_{\rho_n}(I_n) = \left\{u(x)/\|u\|^2_{\rho_n} = \int_{a_n}^{b_n}\rho_n(x)u^2(x)dx<\infty\right\},$$

$$M^2_{\rho_n}(I_n) = \{u(x)=\rho_n(x)\tilde{u}(x)/\tilde{u}(x)\in L^2_{\rho_n}(I_n)\}.$$

При $a_1=0$ положим $\rho_1(x) = (b_1^2-x^2)^{-1/2}$.

Символом $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_n\})$ обозначим класс функций $f(\xi)$ из $C(\overline{R}^+)\cap L^1(R^+)$, для которых $dF_c[f(\xi)](x)/dx\in M^2_{\rho_n}(I_n)$, $n=\overline{1,N}$. Очевидно, что если $f(\xi)\in C_N(\overline{R}^+, \{\rho_n\})$, то существуют $F_c^{\pm1}[f]$ и $F_s^{\pm1}[f]$. Символом $L^{p\pm0}(I)$ обозначим класс функций $u(x)$ таких, что $u(x)\in L^{p\pm\varepsilon}(I)$ при достаточно малом $\varepsilon>0$.

Лемма 1. *Пусть* $v(x)\in M^2_{\rho_n}(I_n)$. *Тогда* $v(x)\in L^{4/3-0}(I_n)$.

Доказательство. Нам понадобится следующее неравенство:

$$|ab|^s\leqslant s|a|^p/p + s|b|^q/q, \quad 1/p+1/q=1/s, \tag{2}$$

где p, q и s — положительные числа. Чтобы убедиться в справедливости неравенства (2), достаточно показать, что $\varphi(t) \leqslant \varphi(1)$, где $\varphi(t) = t^{\lambda} - \lambda t$, $0 < \lambda < 1$, $t \geqslant 0$, затем положить $\lambda = s/p$ и $t = |a|^p |b|^q$.

Далее, по условию $v(x) = \rho_n(x)\tilde{v}(x)$, где $\tilde{v}(x) \in L^2_{\rho_n}(I_n)$. Эту функцию можно записать в виде $v(x) = \sqrt{\rho_n(x)}\,(\tilde{v}(x)\sqrt{\rho_n(x)}$, где первый множитель, очевидно, принадлежит $L^{4-0}(I_n)$, а второй — $L^2(I_n)$. С помощью неравенства (2), нетрудно убедиться, что $v(x) \in L^{4/3-0}(I_n)$. Лемма доказана.

Пусть $\Phi_j(x) \in M^2_{\rho_j}(I_j)$, $j = \overline{1, N}$, удовлетворяют условию

$$\int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x)\,dx = 0, \quad j = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\operatorname{supp}\Phi_j \in I_j$.

Решение уравнения (1) строим в виде

$$A(\xi) = \frac{2}{\xi}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(y)\sin y\xi dy. \tag{4}$$

Теорема 1. *Функция* $\Phi(\xi)$, *определяемая формулой* (4), *принадлежит классу* $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ *и для нее справедливы равенства*

$$F_c[A](x) = \frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(y)\,[1 - \operatorname{sign}(x-y)]\,dy, \quad x \in \overline{R}^+, \tag{5}$$

$$F_c[A](x) = -\pi\int\limits_{a_j}^{x} \Phi_j(y)\,dy = \pi\int\limits_{x}^{b_j} \Phi_j(y)\,dy, \quad x \in I_j, \tag{6}$$

$$F_c[A](x) = 0, \quad x \in \overline{R}^+ \Big| \bigcup_{j=1}^{N} I_j. \tag{7}$$

Доказательство. Принадлежность функции $A(\xi)$ классу $C(\overline{R}^+)$ нетрудно доказать на основании теоремы 7 работы [3], пользуясь тем, что возможна фиксация значения этой функции в нуле равенством

$$A(0) = \lim_{\xi \to 0} A(\xi) = 2\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_j}^{b_j} x\Phi_j(x)\,dx.$$

Далее, по лемме 1 $\Phi_j(x) \in L^{4/3-0}(I_j)$. Тогда, если положить

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{N} \chi_j(x)\,\Phi_j(x), \quad x \in \overline{R}^+, \tag{8}$$

где $\chi_j(x)$ — характеристическая функция интервала I_j, и продолжить $\Phi(x)$ в R^- нечетным образом, придем к выводу, что финитная нечетная функция $\Phi(x)$ очевидно принадлежит $L^{4/3-0}(R)$. Перепишем (4) в виде

$$\xi A(\xi) = 2F_s[\Phi](\xi) = -iF[\Phi](\xi). \tag{9}$$

Отсюда, применяя теорему IX из [4], получаем $\xi A(\xi) \in L^{4+0}(R^+)$. Следовательно,

$$\int\limits_0^\infty |A(\xi)|\,d\xi = \int\limits_0^1 |A(\xi)|\,d\xi + \int\limits_1^\infty (\xi|A(\xi)|)\,\frac{d\xi}{\xi} \leqslant \int\limits_0^1 |A(\xi)|\,d\xi +$$

$$+ \left(\int\limits_1^\infty |\xi A(\xi)|^{4+\varepsilon} d\xi\right)^{1/(4+\varepsilon)} \left(\int\limits_1^\infty \frac{d\xi}{\xi^{4/3-\varepsilon_1}}\right)^{1/(4/3-\varepsilon_1)} < \infty,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon/(9 + 3\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Таким образом, $A(\xi) \in C(\overline{R}^+) \cap L^1(R^+)$. Применив оператор F_c к обеим частям (4), получим (5). С учетом того, что функции $\Phi_j(x)$ удовлетворяют условию (3) из (5), после некоторых преобразований придем к (6) и (7). Из (6) найдем $dF_c[A](x)/dx = -\pi\Phi_j(x)$, $x \in I_j$.

Следовательно, $dF_c[A](x)/dx$ при этом принадлежит $M^2_{\rho_j}(I_j)$, $j = \overline{1, N}$, значит, и $A(\xi) \in C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $A(\xi) \in C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ удовлетворяет соотношению* (7). *Тогда эта функция представима в виде* (4), *где* $\Phi_j(x)$, $j = \overline{1, N}$, *принадлежат классам $M^2_{\rho_j}(I_j)$ и удовлетворяют равенствам* (3), *т. е. интегральное уравнение* (4) *относительно* $\{\Phi_j(x)\}_{j=1}^N$ *при этом разрешимо.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что из условий теоремы вытекает справедливость формулы обращения $F_c^{-1}[F_c[A](x)](\xi) = A(\xi)$. Воспользовавшись этим, непосредственной проверкой можно убедиться, что функции $\Phi_j(x) = dF_c[A](x)/dx$, $x \in I_j$, $j = \overline{1, N}$, удовлетворяют (3) и (4) тождественно, что и требовалось доказать.

Изучим функцию $F_s[\gamma(\xi)A(\xi)](x) = \int\limits_0^\infty \gamma(\xi)A(\xi)\sin\xi x d\xi$, где $A(\xi)$ имеет вид (4), а $\gamma(\xi)$ обладает следующими свойствами:

а) $\gamma(\xi) = -\gamma(-\xi) \in C^\infty(R)$, $\gamma(\xi) > 0$, $\xi > 0$;

б) $\xi^{-1}\gamma(\xi) = o(\xi^\lambda)$, $\lambda \geqslant 0$, $\xi \to 0$;

в) $\lim\limits_{\xi\to\infty}\gamma(\xi) = \gamma_0 \neq 0$, $\gamma(\xi) - \gamma_0 = o(\xi^{-p})$, $p \gg 1$, $\xi \to \infty$;

г) $\xi^{-1}\gamma(\xi)$ — монотонно убывающая функция хотя бы для достаточно больших ξ.

В силу свойств интегралов Фурье при этом нетрудно видеть, что $F_s[\gamma A](x)$ — равномерно непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$.

Лемма 2. *Справедливо следующее равенство*:

$$2\sum_{j=1}^N \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x) F_s[\gamma A](x)\, dx = \int\limits_0^\infty \xi\gamma(\xi) A^2(\xi)\, d\xi. \quad (10)$$

Доказательство. Заметим, что интегралы слева в (10) существуют в силу свойств функций $\Phi_j(x)$ и $F_s[\gamma A](x)$.

Возьмем произвольное число $B > 0$ и на основании теоремы Фубини преобразуем

$$\int\limits_0^B \gamma(\xi)A(\xi)\,d\xi \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x)\sin\xi x dx = \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x)\,dx \int\limits_0^B \gamma(\xi)A(\xi)\sin\xi x d\xi. \quad (11)$$

Поскольку внутренний интеграл справа в (11) сходится равномерно по x при $B \to \infty$ (так как $\gamma(\xi)A(\xi) \in L^1(R^+)$), то, совершив предельный переход при $B \to \infty$ в (11)

$$\int\limits_0^\infty \gamma(\xi)A(\xi)\,d\xi \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x)\sin\xi x dx = \int\limits_{a_j}^{b_j} \Phi_j(x)\,dx \int\limits_0^\infty \gamma(\xi)A(\xi)\sin\xi x d\xi$$

и просуммировав обе части полученного равенства по j с учетом (4), получим (10), что и требовалось.

2. Сведение парного интегрального уравнения к системе интегральных уравнений. Рассмотрим парное уравнение (1) с весовой функцией $\gamma(\xi)$ и интервалами I_n, имеющими указанные выше свойства. Функции $f_n(x)$ предполагаются такими, что

$$\tilde{f}_n(x) \equiv \int\limits_{a_n}^x f_n(t)\,dt \in L^2(I_n), \quad x \in I_n. \quad (12)$$

Считая, что решение $A(\xi)$ парного уравнения (1) в классе $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ существует, и используя теорему 2, представим его в виде (4) и (3).

Теорема 3. *Парное интегральное уравнение* (1) *в классе* $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (1), в данном классе может иметь только нулевое решение. Действительно, положив в (1) $f_n(x) \equiv 0$, проинтегрируем первое соотношение в (1) по x от a_n до x. После умножения полученного равенства на $\Phi_n(x)$, интегрирования по I_n, суммирования по n, используя (3), (4) и (10), получаем $\int\limits_0^\infty \xi\gamma(\xi) A^2(\xi)\, d\xi = 0$. Отсюда следует $A(\xi) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Парное уравнение* (1) *в классе* $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ *разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима относительно* $\{\Phi_j(x), C_j\}_{j=1}^N$ *система интегральных уравнений*

$$\sum_{j=1}^{N} \int\limits_{a_j}^{b_j} F_s[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sin\xi x](y)\,\Phi_j(y)\,dy = \widetilde{f}_n(x) + C_n, \quad x \in I_n, \quad n = \overline{1, N}, \tag{13}$$

где $\Phi_j(y) \in M^2_{\rho_j}(I_j)$ *и связаны с функцией* $A(\xi)$ *формулой* (4) *при условии* (3), C_n — *произвольные константы, а функции* $\widetilde{f}_n(x)$ *определяются формулой* (12).

Доказательство. Пусть $A(\xi) \in C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ и удовлетворяет парному уравнению (1). Тогда по теореме 2 она представима в виде (4), где $\Phi_j(y)$ принадлежит классам $M^2_{\rho_j}(I_j)$ и удовлетворяет условию (3). Интегрируя обе части первого соотношения в (1) по x от a_n до x и подставляя в полученное выражение (4), находим

$$F_s\left[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_j}^{b_j}\Phi_j(y)\sin\xi y\,dy\right](x) = \widetilde{f}(x) + c_n, \quad a_n < x < b_n, \quad n = \overline{1, N}, \tag{14}$$

а меняя порядок, получаем (13).

Для обоснования этих преобразований отметим, что справедливо следующее представление:

$$F_s[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sin\xi x](y) = \gamma_0 \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + D_0(x, y),$$

$$D_0(x, y) = 2\int\limits_0^\infty \xi^{-1}(\gamma(\xi) - \gamma_0)\sin\xi x \sin\xi y\, d\xi. \tag{15}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно воспользоваться свойством в) функции $\gamma(\xi)$ и формулой 3.784 (1) из [5]. Используя свойства логарифмической функции и функции $\gamma(\xi)$, нетрудно также показать, что $D_0(x, y)$ — непрерывная функция на $\overline{I}_n \times \overline{I}_j$, а $F_s[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sin\xi x](y)$ — на $\overline{I}_n \times \overline{I}_j$ при $n \neq j$. Кроме того, $F_s[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sin\xi y]$ принадлежит $L^2_{\rho_n\rho_j}(I_n \times I_j)$ для любых $n, j = \overline{1, N}$. Здесь символом $L^2_{\rho_n\rho_j}(I_n \times I_j)$ обозначено пространство квадратично суммируемых функций на $I_n \times I_j$ с весами $\rho_n(x)\rho_j(x)$. Учитывая это и свойства функций $\Phi_j(y)$, нетрудно показать, что выражения слева в (14) и (13) суть функции из $L^2_{\rho_n}(I_n)$. Поэтому в силу леммы Дюбуа-Реймона [6] достаточно доказать, что они равны между собой в смысле S', где S' — пространство обобщенных функций медленного роста [6, 7]. Для этого определим функцию $\Phi(y)$ формулой (8) и продолжим ее в R^- нечетным образом. Тогда выполняются равенства (9) и

$$F_s[\gamma(\xi) A(\xi)](x) = F[\gamma(\xi) A(\xi)/2i](x). \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что $\gamma(\xi) A(\xi)$, $\xi A(\xi)$ и $\Phi(y)$ — локально интегрируемые функции; следовательно, они и их преобразования Фурье принадлежат пространству обобщенных функций S' [6, 7]. Пусть $\varphi(x)$— произвольная функция из пространства S основных функций [6, 7]. Применяя преобразование Фурье обобщенных функций [7] к равенству (18), получаем

$$(F_s[\gamma A](x), \varphi(x)) = (F[\gamma A](x)/2i, \varphi(x)) = (\xi A(\xi), \xi^{-1}\gamma(\xi) F[\varphi](\xi)/2i),$$

(f, φ) — значение обобщенной функции f из S' на элементе $\psi \in S$. В данном случае это значение задается в виде интеграла по действительной прямой. Подставив сюда вместо $\xi A(\xi)$ выражение справа в (9), после некоторых преобразований получим

$$(F_s[\gamma A](x), \varphi(x)) = \left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty}\xi^{-1}\gamma(\xi)\,e^{i\xi(x+y)}d\xi, \varphi(x)\right). \quad (17)$$

С учетом того, что $\Phi(y)$ имеет вид (8) и является нечетной функцией вместе с функцией $\gamma(\xi)$, нетрудно преобразовать правую часть (17) в $\left(\sum_{j=1}^{N}\int_{a_j}^{b_j}\Phi_j(y)\,F_s[2\xi^{-1}\gamma(\xi)\sin\xi x](y)\,dy, \varphi(x)\right)$, и, следовательно, левые части (14) и (13) равны между собой в смысле S'. Тем самым показано, что они равны в обычном смысле, т. е. имеет место (13).

Отметим также, что преобразования, сделанные при получении равенства (19), допустимы, так как $\varphi(x) \in S$, $\Phi(y)$ — финитная функция из $L^{4/3-0}(R)$, а внутренний интеграл справа в (19) сходится равномерно в силу свойства б) функции $\gamma(\xi)$.

Пусть $\{C_n\}_{n=1}^N$ и $\{\Phi_j\}_{j=1}^N$ удовлетворяют системе (13) и условиям (3), где $\Phi_j(y) \in M^2_{\rho_j}(I_j)$. Используя сделанные выше преобразования, из (14) легко получить первое соотношение в (1) (путем дифференцирования), где через $A(\xi)$ обозначено выражение справа в (4). Тогда по теореме 1 функция $A(\xi)$ принадлежит классу $C_N(\bar{R}^+, \{\rho_j\})$ и удовлетворяет второму соотношению в (1), т. е. парному уравнению (1). Теорема доказана.

3. Решение системы интегральных уравнений. Не нарушая общности, будем считать $\gamma_0 = 1$ и ограничимся случаем $a_1 > 1$. Случай $a_1 = 0$ требует некоторого видоизменения, но по существу и для него применим излагаемый ниже метод. Преобразуем систему (14) к более удобной форме. Для этого при $x \in (a_n, b_n)$ сделаем замены $\Phi_n(x) = \rho_n(x)\varphi_n(x)$, $x = \zeta(t) = [(b_n - a_n)t + \beta a_n - \alpha b_n]/(\beta + \alpha)$ и обозначим

$$\varphi_n^*(t) = \varphi_n(\zeta_n(t)), \quad f_n^* = \tilde{f}_n(\zeta_n(t)), \quad D_{nn}(t,\tau) = \ln(\zeta_n(t) + \zeta_n(\tau)) +$$

$$+ D_0(\zeta_n(t), \zeta_n(\tau)), \quad D_{nj}(t,\tau) = \ln\left(\frac{\zeta_n(t) + \zeta_j(\tau)}{\zeta_n(t) - \zeta_j(\tau)}\right) + D_0(\zeta_n(t), \zeta_j(\tau)), \quad n \neq j,$$

$$\rho(t) = [(t-\alpha)(\beta - t)]^{-1/2}, \quad \zeta(t) = (2t - \alpha - \beta)(\beta - \alpha)^{-1},$$

$$\pi_0(t) = \pi^{-1/2}, \quad \pi_m(t) = \sqrt{2/\pi}\,T_n(\zeta(t)), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_0 = \pi\ln 4/(\beta - \alpha), \quad \mu_m = \pi/m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где $D_0(x, y)$ определена формулой (15), $T_m(x)$ — полиномы Чебышева первого рода, а α и β — произвольные конечные числа, удовлетворяющие условию $\beta - \alpha < 4$. Например, в случае a_n/b_n ($n = \overline{1, N}$) $= \lambda$ можно взять $\alpha = \lambda$, $\beta = 1$.

Введем также векторы и матрицы

$$\vec{\varphi}(t) = [\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots, \varphi_N^*(t)], \quad \vec{f}(t) = [f_1^*(t), \ldots, f_N^*(t)],$$

$$\vec{c} = [c_1, \ldots, c_N], \quad C(t,\tau) = \| D_{nj}(t,\tau) \|_{n,j=1}^{N}.$$

В этих обозначениях переменные t и τ изменяются в интервале (α, β), а система (13) и условия (3) с учетом (15) приобретают вид

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\tau) \ln \left| \frac{1}{t-\tau} \right| \vec{\varphi}(\tau)\, d\tau + \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\tau) D(t, \tau) \vec{\varphi}(\tau)\, d\tau = \vec{f}(t) + \vec{c},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(\tau) \vec{\varphi}(\tau)\, d\tau = 0. \tag{18}$$

С целью исследования системы (18) для вектора $\vec{\xi} \in R^N$ введем обозначения $|\vec{\xi}|_N = \left(\sum_{n=1}^{N} |\xi_n|^2 \right)^{1/2}$ и пространство $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta) = \{\vec{u}(t) = [u_1(t), \ldots, u_N(t)] / /u_n(t) \in L_\rho^2(\alpha, \beta),\ n = \overline{1, N}\}$. Снабдив это пространство нормой $\|\vec{u}\|_{\rho,N} = \left(\sum_{n=1}^{N} \|u_n\|_\rho^2 \right)^{1/2}$, превратим его в банахово пространство.

Легко доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть* $\vec{u}(t) \in L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$, *а* $M(t)$ — *квадратная матрица порядка* $N \times N$ *элементов* $M_{nj}(t) \in L_\rho^2(\alpha, \beta)$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) M(t) \vec{u}(t)\, dt \right|_N \leqslant \|\vec{u}\|_{\rho,N} \left(\sum_{n,j=1}^{N} \|M_{nj}\|^2 \right)^{1/2}. \tag{19}$$

Лемма 4. *Пусть* $\vec{u}_m(t) \in L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ *и ряд* $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ *сходится в этом же пространстве. Тогда для любой вектор-функции* $v(t)$ *из* $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ *справедлива формула почленного интегрирования*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \vec{v}(t) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \vec{u}_m(t) \right) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \vec{v}(t) \vec{u}_m(t)\, dt, \tag{20}$$

где через $\vec{a}\vec{b}$ *обозначено скалярное произведение векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Так как $\{\pi_m(t)\}_{m=0}^{\infty}$ полная ортонормированная система в $L_\rho^2(\alpha, \beta)$, то легко доказать такую лемму.

Лемма 5. *Для любой вектор-функции* $\vec{\varphi}(t) \in L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\vec{\varphi}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{\xi}_m \pi_m(t), \quad \vec{\xi}_m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \pi_m(t) \varphi(t)\, dt, \quad \|\vec{\varphi}\|_{\rho,N} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |\vec{\xi}_m|_N^2 \right)^{1/2}, \tag{21}$$

где ряд в первом равенстве сходится в $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$.

Введем обозначения

$$S\vec{f}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_m(t)}{\mu_m} \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\tau) \pi_m(\tau) \vec{f}(\tau)\, d\tau, \quad \vec{w} = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) S\vec{f}(t)\, dt,$$

$$(S\vec{f}, \pi_m)_{\rho,N} = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \pi_m(t) Sf(t)\, dt, \quad R_m^{nj}(\tau) = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) \pi_m(t) D_{nj}(t, \tau)\, dt,$$

$$R_m(\tau) = \| R_m^{nj} \|_{n,j=1}^{N}, \quad \sigma_N = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^{-2} \sum_{n,j=1}^{N} \| R_m^{nj} \|_\rho^2 \right)^{1/2}$$

и докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть* $\{|\mu_m^{-1}(Sf, \pi_m)_{\rho,N}|_N\}_{m=0}^{\infty}$ *принадлежит* l_2 *и* $\sigma_N < 1$. *Тогда система* (18) *в* $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ *имеет единственное решение* $\vec{\varphi}(t)$, *которое можно найти методом последовательных приближений из системы*

$$\vec{\varphi}(t) = S\vec{f}(t) - \frac{\vec{\omega}}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\pi_m(t)}{\mu_m} \int_\alpha^\beta \rho(\tau) R_m(\tau) \vec{\varphi}(\tau) d\tau, \tag{22}$$

а постоянный вектор $\vec{c}$ *определяется формулой*

$$\vec{c} = \pi^{-1/2} \int_\alpha^\beta \rho(t) R_0(t) \vec{\varphi}(t) dt - \ln\frac{4}{\beta - \alpha} \vec{\omega}, \tag{23}$$

причем для $\vec{\varphi}(t)$ *справедлива оценка*

$$\|\vec{\varphi}(t)\|_{\rho,N} \leqslant (1 - \sigma_N)^{-1} \|S\vec{f} - \vec{\omega}/\pi\|_{\rho,N}. \tag{24}$$

Доказательство. Разлагая $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{f}(t)$ в ряды по формуле (21) и используя спектральное соотношение

$$\int_\alpha^\beta \rho(\tau) \ln\left|\frac{1}{t-\tau}\right| \pi_m(\tau) d\tau = \mu_m \pi_m(t),$$

после некоторых преобразований, аналогичных использованным в [8] для случая $N = 1$, из (18) находим

$$\vec{\varphi}(t) = S\vec{f}(t) + \frac{\vec{c}}{\mu_0} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\pi_m(t)}{\mu_m} \int_\alpha^\beta \rho(\tau) R_m(\tau) \varphi(\tau) d\tau. \tag{25}$$

Пользуясь ортогональностью полиномов $\pi_m(t)$, вторым равенством из (18) и учитывая $\pi_0(t) = \pi^{-1/2}$, из (25) находим (23). Подстановка (23) в (25) дает (22). Эти преобразования допустимы, так как при выполнении условий теоремы, используя неравенство (19), нетрудно доказать, что ряд справа в (25) сходится в $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ и $S\vec{f}(t) \in L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$, а почленное интегрирование последнего ряда возможно в силу (20).

Далее, обозначим через $T\vec{\varphi}$ выражение справа в (25). При выполнении условий теоремы оператор T переводит $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ в $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$. Покажем, что T — оператор сжатия. Действительно, воспользовавшись (21) и (19), получим

$$\|T\vec{\varphi} - T\vec{\psi}\|_{\rho,N}^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \mu_m^{-1} \int_\alpha^\beta \rho(\tau) R_m(\tau) (\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\psi}(\tau)) d\tau \right|_N^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|\vec{\varphi} - \vec{\psi}\|_{\rho,N}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m^{-2} \sum_{n,j=1}^{N} \|R_m^{n,j}\|_\rho^2 = \|\vec{\varphi} - \vec{\psi}\|_{\rho,N}^2 \sigma_N^2.$$

Поскольку $\sigma_N < 1$, система (22) в $L_\rho^{2,N}(\alpha, \beta)$ имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Оценка (24) легко получается с помощью соответствующего равенства из (21) и неравенства (19). Теорема доказана.

Поскольку система (18) равносильна парному уравнению (1), то при выполнении условий теоремы 5 это уравнение в классе $C_N(\overline{R}^+, \{\rho_j\})$ имеет единственное решение. Отметим также, что в приложениях условие $\{|\mu_m^{-1}(S\vec{f}, \pi_m)_{\rho,N}|_N\}_{m=1}^{\infty} \in l_2$, как правило, выполняется, а в условии $\sigma_N < 1$ содержатся параметры геометрического или механического характера.

1. *Развитие* теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина.— М. : Наука, 1976.— 493 с.
2. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М. : Наука, 1976.— 391 с.
4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.— М. : Мир, 1978.— Т. 2. 395 с.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. : Физматгиз, 1962.— 1100 с.
6. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М. : Наука, 1979.— 318 с.
7. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.— М. : Мир, 1968.— 276 с.
8. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, вып. 3, с. 518—531.

Одес. ун-т Получено 15.03.84