УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, Нгуен Донг Ань

Случайные колебания в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием

Теория случайных колебаний — из перспективных направлений современной прикладной механики. Методы теории случайных колебаний применяются при расчетах транспортных средств, испытывающих влияние вибраций при движении по неровной поверхности; пульсаций давления в турбулентном пограничном слое; наземных и морских высотных сооружений, расположенных в сейсмозоне; конструкций летательных аппаратов и судов, находящихся под воздействием ветра, морских волн, атмосферной турбулентности. При исследовании случайных колебаний в механических и электрических системах основные результаты были получены для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, подверженных частным конкретным случайным процессам (таким, как «белый шум», нормальным стационарным процессам) (см. [1—6]). Дальнейшее развитие идет в основном по двум направлениям:

I. Распространение полученных основных результатов на другие виды случайных возмущенных процессов, имеющих важное применение в практических задачах. Так, многие авторы [4, 5] исследуют системы обыкновенных дифференциальных уравнений, подверженных случайным процессам с дробно-рациональными спектральными плотностями с помощью формирующего линейного фильтра. В этих работах изучение проводится в расширенной системе дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей не только фазовые переменные исходной исследуемой системы, но и переменные формирующего линейного фильтра. При таком подходе увеличивается число рассматриваемых переменных и таким образом возникает задача расщепления этих переменных. Эта задача решается с помощью стохастических дифференциальных уравнений высших порядков со систематическим применением асимптотических методов Крылова — Боголюбова — Митропольского в зависимости от свойств характеристических чисел формирующего линейного фильтра [7, 8]. Например, если все характеристические числа имеют различные отрицательные действительные части, то расщепление переменных можно провести до максимально возможного, в результате чего число расширенных рассматриваемых переменных равно числу фазовых переменных исходной системы.

II. Распространение полученных основных результатов на другие виды систем стохастических уравнений. В последние годы все больше появляется работ, посвященных системам с запаздыванием, системам интегро-дифференциальных уравнений, системам с импульсным воздействием и т. п. При действии на эти системы случайных процессов возникают случайные колебания, изучение которых приводит к необходимости создания теории случайных колебаний для указанных выше систем. В этом направлении возможны два основных подхода: первый заключается в создании специальных математических методов для исследуемых систем, с помощью которых изучаются случайные колебания; второй состоит в построении для исследуемых систем приближенных (в том или ином смысле) стохастических обыкновенных дифференциальных уравнений и, таким образом, дает возможность применения полученных результатов, созданных для последних.

В данной работе второй подход применяется для изучения случайных колебаний в квазилинейных системах стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием. Предлагается один метод построения приближенных стохастических дифференциальных уравнений без запаздывания. Исследуется вопрос математического обоснования предложенного метода.

1. Рассмотрим систему уравнений с запаздыванием в векторно-матричном виде

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \varepsilon Bx(t-\Delta) + \varepsilon F(x(t), t) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x(t))\, q(t), \tag{1}$$

A, B, f — квадратные матрицы порядка n, причем A, B — постоянные, $x = (x_1, \ldots, x_n)'$, $F = (F_1, \ldots, F_n)'$, $q = (q_1, \ldots, g_n)'$, штрих обозначает операцию транспонирования, $q(t)$ — векторный случайный центрированный стационарный процесс, Δ — положительные постоянные запаздывания, ε — малый положительный параметр. Пусть для системы (1) начальные условия имеют вид

$$x(t) = \varphi(t), \quad -\Delta \leqslant t \leqslant 0, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — наперед заданная детерминированная непрерывная вектор-функция. Применим к запаздывающему члену уравнения (1) метод статистической линеаризации, т. е. заменим уравнение (1) следующим:

$$dx(t)/dt = Ax(t) + \varepsilon Cx(t) + \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x(t))\, q(t), \tag{3}$$

где C — квадратная матрица порядка n, определенная из условия минимизации

$$\min_{C} \langle [Bx(t-\Delta) - Cx(t)]\, [Bx(t-\Delta) - Cx(t)]' \rangle, \tag{4}$$

откуда путем дифференцирования по C и приравнивания результата нулю получаем

$$\langle x(t)\, [Bx(t-\Delta) - Cx(t)]' \rangle + \langle [Bx(t-\Delta) - Cx(t)]\, x'(t) \rangle = 0.$$

Решая эту систему, имеем

$$C = \langle Bx(t-\Delta)\, x'(t)\rangle \langle x(t)\, x'(t)\rangle^{-1}. \tag{5}$$

Чтобы привести выражение (5) к известным величинам, сделаем в уравнении (1) линейную замену переменных

$$x(t) = H(t)\, z(t). \tag{6}$$

Здесь $z = (z_1, \ldots, z_n)'$, $H(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной порождающей системы

$$dx(t)/dt = Ax(t). \tag{7}$$

Очевидно, $H(t)$ обладает свойством [10]

$$H(t-\sigma) = H(t)\, H(-\sigma) = H(-\sigma)\, H(t). \tag{8}$$

Подставляя (6) в (1), получаем уравнение для $z(t)$:

$$dz(t)/dt = \varepsilon H^{-1}(t)\,[BH(t-\Delta)\, z(t-\Delta) + F(t, H(t), z(t)) + \\ + f(\varepsilon, t, H(t)\, z(t))\, q(t)]. \tag{9}$$

Поскольку ε — малый параметр, будем предполагать, что система (9) имеет решение $z(t)$, являющееся медленно изменяющейся случайной функцией, т. е. можно приближенно положить

$$z(t-\sigma) \approx z(t). \tag{10}$$

Теперь с помощью (6), (8), (10) находим

$$Bx(t-\Delta) = BH(t-\Delta)\, z(t-\Delta) \approx BH(-\Delta)\, H(t)\, z(t) = BH(-\Delta)\, x(t). \tag{11}$$

С учетом (11) из (5) следует

$$C = BH(-\Delta). \tag{12}$$

Подставляя (12) в уравнение (3), имеем

$$dx(t)/dt = (A + \varepsilon BH(-\Delta))\, x(t) + \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon f(\varepsilon, t, x(t))\, q(t). \tag{13}$$

Таким образом, предлагается метод, с помощью которого стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием (1) заменяется стохастическим дифференциальным уравнением (13). К последнему применяются известные методы статистической динамики, такие, как методы спектральной теории, методы марковских процессов, методы статистической линеаризации и др.

2. Приведем математическое обоснование метода. В п. 1 мы предположили для стохастического дифференциального уравнения с запаздыванием (1) замену (13) исходя из эвристических рассуждений. Математическое обоснование предложенного метода состоит в доказательстве (при определенных условиях) близости решений уравнений (1) и (13) при одинаковом начальном значении.

Изложим подход к решению указанного вопроса математического обоснования, который базируется на понятии фундаментальной матрицы решений линейной детерминированной системы. Для простоты изложения рассмотрим только скалярное уравнение (1).

Рассмотрим скалярное уравнение

$$dx(t)/dt = -\alpha x(t) + \varepsilon\beta x(t-\Delta) + F(t, x(t)) + f(t, x(t))\,\dot{\xi}(t), \quad t \in [0, T], \tag{14}$$

α, β, $\Delta = \text{const}$, $\Delta > 0$, $F(t, x)$ и $f(t, x)$ — детерминированные функции, $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум», являющийся обобщенной производной винеровского процесса $\xi(t)$. При заданном начальном значении $x(t) = \varphi(t)$, $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$, где $\varphi(t)$ — детерминированная непрерывная функция, стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием (14) можно представить в виде стохастического интегрального уравнения

$$x(t) = u(t)\varphi(0) + \varepsilon \int_{-\Delta}^{0} u(t-s-\Delta)\beta\varphi(s)\,ds + \int_0^t u(t-s)F(s, x(s))ds +$$

$$+ \int_0^t u(t-s) f(s, x(s))\,d\xi(s), \tag{15}$$

в котором $u(t)$ — решение детерминированного линейного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$du(t)/dt = -\alpha u(t) + \varepsilon\beta u(t-\Delta),\ u(0) = 1,\ u(t) = 0 \text{ при } -\Delta \leqslant t < 0. \tag{16}$$

Под решением уравнения (16) будем понимать непрерывную функцию, имеющую кусочно-непрерывную производную. Доказательство представления (15) из-за его громоздкости опустим.

Наряду с уравнением (14) рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$\dot{\bar{x}}(t) = (-\alpha + \varepsilon\beta e^{\alpha\Delta})\bar{x}(t) + F(t, \bar{x}(t)) + f(t, \bar{x}(t))\,\dot{\xi}(t) \tag{17}$$

с начальным значением $\bar{x}(t) = \varphi(t)$, $-\Delta \leqslant t \leqslant 0$. Близость решений уравнений (14), (17), определенных одинаковым начальным значением $\varphi(t)$, рассматривается в следующей теореме.

Т е о р е м а. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции* $F(t, x)$, $f(t, x)$ *определены при* $t \in [0, T]$, $x \in (-\infty, +\infty)$ *и измеримы по совокупности переменных;*

2) *существует такая постоянная* K, *что при* $t \in [0, T]$, $x, y \in (-\infty, +\infty)$ *справедливы неравенства*

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |F(t,x) - F(t,y)| \leqslant K|x-y|,$$

$$|f(t,x)|^2 + |F(t,x)|^2 \leqslant K(1+|x|^2);$$

3) $\alpha > 0$. *Тогда для сколько угодно малого числа* $\delta > 0$ *существует положительное число* $\varepsilon(\delta)$ *такое, что для всех* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon(\delta)$ *выполняется неравенство*

$$M[x(t) - \bar{x}(t)]^2 < \delta \text{ при } t \in [0, T]. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим уравнение (17) в интегральной форме

$$\bar{x}(t) = \bar{u}(t)\varphi(0) + \int_0^t \bar{u}(t-s)F(s, \bar{x}(s))\,ds + \int_0^t \bar{u}(t-s) f(s, \bar{x}(s))\,d\xi(s), \tag{19}$$

где

$$\dot{\bar{u}}(t) = (-\alpha + \varepsilon\beta e^{\alpha\Delta})\bar{u}(t), \quad \bar{u}(0) = 1. \tag{20}$$

Рассматривая детерминированные уравнения (16), (20), нетрудно показать [11], что существует постоянная A, для которой

$$|u(t)| + |\bar{u}(t)| < A \text{ при } t \in [0, T] \tag{21}$$

и что для числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon(\delta_1) > 0$ такое, что для всех $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon(\delta_1)$

$$|u(t) - \bar{u}(t)|^2 < \delta_1 \text{ при } t \in [0, T]. \tag{22}$$

При выполнении условий 1—3 теоремы следует [12], что решения стохастических интегральных уравнений (15), (19) единственны и существует такая постоянная B, что

$$M[\bar{x}(t)]^2 < B \text{ при } t \in [0, T]. \tag{23}$$

Согласно (15), (19) для $t\in[0,T]$ имеем

$$M[x(t)-\bar{x}(t)]^2 = M\Bigg\{(u(t)-\bar{u}(t))\,\varphi(0)+\varepsilon\int_{-\Delta}^{0}u(t-s-\Delta)\,\beta\varphi(s)\,ds+$$

$$+\int_0^t(u(t-s)F(s,x(s))-\bar{u}(t-s)F(s,\bar{x}(s)))\,ds+\int_0^t(u(t-s)f(s,x(s))-$$

$$-\bar{u}(t-s)f(s,\bar{x}(s)))\,d\xi(s)\Bigg\}^2\leqslant 4M[(u(t)-\bar{u}(t))^2\varphi^2(0)]+$$

$$+4\varepsilon^2\beta^2M\left(\int_{-\Delta}^{0}u(t-s-\Delta)\,\varphi(s)\,ds\right)^2+4M\left[\int_0^t(u(t-s)F(s,x(s))-\right.$$

$$\left.-u(t-s)F(s,\bar{x}(s)))\,ds\right]^2+4M\left[\int_0^t(u(t-s)f(s,x(s))-\bar{u}(t-s)f(s,\right.$$

$$\left.\bar{x}(s)))\,d\xi(s)\right]^2\leqslant 4\delta_1\varphi^2(0)+4\varepsilon^2\beta^2A^2\Delta^2\max_{t\in[-\Delta,0]}[\varphi^2(t)]+$$

$$+4tM\left[\int_0^t[u(t-s)F(s,x(s))-\bar{u}(t-s)F(s,\bar{x}(s))]^2\,ds\right]^2+$$

$$+4M\int_0^t[u(t-s)f(s,x(s))-\bar{u}(t-s)f(s,\bar{x}(s))]^2\,ds=4\delta_1\varphi^2(0)+$$

$$+4\varepsilon^2\beta^2A^2\Delta^2\max_{t\in[-\Delta,0]}[\varphi^2(t)]+4tM\int_0^t[u(t-s)(F(s,x(s))-F(s,\bar{x}(s)))+$$

$$+F(s,\bar{x}(s))(u(t-s)-\bar{u}(t-s))]^2\,ds+4M\int_0^t[u(t-s)(f(s,x(s))-$$

$$-f(s,\bar{x}(s)))+f(s,\bar{x}(s))(u(t-s)-\bar{u}(t-s))]^2\,ds\leqslant 4\delta_1\varphi^2(0)+$$

$$+4\varepsilon^2\beta^2A^2\Delta^2\max_{t\in[-\Delta,0]}[\varphi^2(t)]+8tM\int_0^t[u(t-s)(F(s,x(s))-F(s,\bar{x}(s)))]^2\,ds+$$

$$+8tM\int_0^t F^2(s,x(s))[u(t-s)-\bar{u}(t-s)]^2\,ds+8M\int_0^t[u(t-s)(f(s,x(s))-$$

$$-f(s,x(s)))]^2\,ds+8M\int_0^t[f(s,\bar{x}(s))(u(t-s)-\bar{u}(t-s))]^2\,ds\leqslant 4\delta_1\varphi^2(0)+$$

$$+4\varepsilon^2\beta^2A^2\Delta^2\max_{t\in[-\Delta,0]}[\varphi^2(t)]+8tA^2K^2\int_0^t M[x(s)-x(s)]^2\,ds+$$

$$+8t\delta_1K^2\int_0^t M(1+|\bar{x}|^2)\,ds+8A^2K^2\int_0^t M(x(s)-\bar{x}(s))^2\,ds+$$

$$+6\delta_1K^2\int_0^t M(1+|\bar{x}|^2)\,ds\leqslant 4\delta_1\varphi^2(0)+4\varepsilon^2\beta^2A^2\Delta^2\max_{t\in[-\Delta,0]}[\varphi^2(t)]+$$

$$+8K^2\delta_1(T+1)T(B+1)+6K^2A^2(T+1)\int_0^t M[x(s)-\bar{x}(s)]^2\,ds\leqslant\delta_1N+$$

$$+L\int_0^t[M[x(s)-\bar{x}(s)]^2\,ds,$$

где $N = 4\varphi^2(0) + 4\beta^2 A^2 \Delta^2 \max_{t\in[-\Delta,0]} [\varphi^2(t)] + 8K^2 (T+1) T (B+1)$, $L = 6K^2 A^2 (T+1)$.

Таким образом, установлено, что при $t \in [0, T]$

$$M[x(t) - \bar{x}(t)]^2 \leqslant \delta_1 N + L \int_0^t M[x(s) - \bar{x}(s)]^2 ds,$$

откуда по известному интегральному неравенству следует

$$M[x(t) - \bar{x}(t)]^2 \leqslant \delta_1 N + L \int_0^t e^{L(t-s)} \delta_1 N ds \leqslant$$

$$\leqslant \delta_1 N \left(1 + \frac{e^{LT} - 1}{L}\right) \quad \text{при} \quad t \in [0, T].$$

Итак, если взять $\delta_1 = \delta / N \left(1 + \frac{e^{LT} - 1}{L}\right)$, то $M[x(t) - \bar{x}(t)]^2 \leqslant \delta$ при $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

3. Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon\alpha x(t-\Delta) + \varepsilon\beta\dot{x}(t-\Delta) + \varepsilon F(t, x(t), \dot{x}(t)) + $$
$$+ \sqrt{\varepsilon} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, \dot{\xi}(t), \tag{24}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — «белый шум» с единичной интенсивностью, или в матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x(t-\Delta) \\ \dot{x}(t-\Delta) \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} + \sqrt{\varepsilon} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \dot{\xi}(t), \tag{25}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Фундаментальная матрица решений системы (7)

$$H(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Следовательно, из (26), (27) получаем

$$BH(-\Delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha\cos\omega\Delta + \beta\omega\sin\omega\Delta & -\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\Delta + \beta\cos\omega\Delta \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в уравнение (13), получаем следующее приближенное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon(\alpha\cos\omega\Delta + \beta\omega\sin\omega\Delta)\, x(t) + \varepsilon\left(\beta\cos\omega\Delta - \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\Delta\right)\dot{x}(t) + $$
$$+ \varepsilon F(t, x(t), \dot{x}(t)) + \sqrt{\varepsilon} f(t, x(t), \dot{x}(t))\, \dot{\xi}(t). \tag{29}$$

К уравнению (29) применимы методы марковских процессов. В качестве примера рассмотрим случайное колебание в неавтономной линейной системе с запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon\alpha x(t-\tau) + \varepsilon\beta\dot{x}(t-\tau) + \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t) \tag{30}$$

в окрестности главного резонанса

$$\omega^2 - \nu^2 = \varepsilon\Delta. \tag{31}$$

Соответствующее приближенное уравнение (29) имеет вид

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon(\alpha\cos\omega\tau + \beta\omega\sin\omega\tau)\,x(t) + \varepsilon\left(\beta\cos\omega\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\tau\right)\dot{x}(t) + \varepsilon P\cos\nu t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \qquad (32)$$

Неавтономная линейная система (32) детально исследована в [13]. Решение уравнения (32) имеет вид

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\nu\sin\psi, \quad \psi = \nu t + \theta. \qquad (33)$$

Стационарная плотность вероятностей амплитуды и фазы $W(a, \theta)$ равна

$$W(a, \theta) = Ca\exp\left\{\frac{2P\Gamma\nu a}{[\Gamma^2 + H^2]\sigma^2}\left(\frac{H}{2\nu}\cos\theta - \Gamma\sin\theta\right) - \frac{2\Gamma\nu^2}{\sigma^2}a^2\right\} \qquad (34)$$

при условии $\Gamma > 0$, где

$$\Gamma = \alpha/\omega\sin\omega\tau - \beta\cos\omega\tau, \qquad (35)$$

$$H = \Delta - \alpha\cos\omega\tau - \beta\omega\sin\omega\tau. \qquad (36)$$

Функция (34) достигает максимума в точке

$$a^2 = \frac{1}{2}\left[a_0^2 + \frac{\sigma^2}{2\Gamma\nu^2} + \sqrt{\left(a_0^2 + \frac{\sigma^2}{2\Gamma\nu^2}\right)^2 - \frac{\sigma^4}{4\Gamma^2\nu^4}}\right], \qquad (37)$$

a_0 — амплитуда детерминированного колебания системы (30) при отсутствии случайного воздействия ($\sigma = 0$),

$$a_0^2 = \frac{P^2}{4\nu^2\left[\Gamma^2 + \left(\frac{H}{2\nu}\right)^2\right]}. \qquad (38)$$

Таким образом, если параметры α, β, ω, τ удовлетворяют условию (35), то в системе (30) возможны установившиеся случайные колебания с амплитудой, вычисленной по формуле (37).

1. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике.— М. : Сов. радио, 1961.— 558 с.
2. *Случайные* колебания / Под ред. С. Кренделла.— М. : Мир, 1967.— 356 с.
3. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976, с. 122—147.
4. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем.— М. : Наука, 1979.— 336 с.
5. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний.— М. : Наука, 1980.— 368 с.
6. *Crandall S. H., Zhu W. Q.* Random Vibration. A Survey of Recent Developments.— J. Appl. Mech. Trans. ASME, 50th Anniversary, 1983, **50**, p. 953—962.
7. *Нгуен Донг Ань.* Случайные колебания в нелинейных системах под действием «белого шума», проходящего через линейный фильтр, имеющий отрицательные характеристические числа.— Мат. физика, 1983, вып. 34, с. 86—89.
8. *Нгуен Донг Ань.* Многочастотные случайные колебания в механических системах с одной степенью свободы под действием «белого шума», проходящего через линейный фильтр, имеющий все пары чисто мнимых характеристических чисел.— Укр. мат. журн., 1984, **36**, № 4, с. 515—518.
9. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М. : Наука, 1973.— 584 с.
10. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
11. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квази-периодические колебания с запаздыванием.— Киев : Вища шк., 1979.— 248 с.
12. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
13. *Нгуен Донг Ань.* О периодических решениях усредненных уравнений КФП для линейной неавтономной механической системы с одной степенью свободы.— В кн.: Приближенные методы анализа нелинейных колебаний. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984, с. 72—80.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 05.11.85