УДК 517.955

С. В. ЖЕСТКОВ, канд. физ.-мат. наук (Могилев. отд-ние ин-та физики АН БССР)

Об устойчивости задачи Коши для матричной системы уравнений в частных производных типа Ф. И. Федорова

Получены достаточные коэффициентные условия устойчивости нулевого решения для одной матричной системы дифференциальных уравнений в частных производных типа Ф. И. Федорова.

Одержані достатні коефіцієнтні умови стійкості нульового розв'язку для однієї матричної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних типу Ф. І. Федорова.

В работах [1, 2] развит подход к исследованию устойчивости задачи Коши для некоторых линейных систем в частных производных. В настоящей статье указанный подход применен к исследованию устойчивости нулевого решения одной матричной системы дифференциальных уравнений в частных производных типа Ф. И. Федорова:

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n} C_k(t, x)\frac{\partial U}{\partial x_k}=A(t, x)U+UB(t, x)+UP(t, x)U+\Phi(t, x), \quad (1)$$

$$U|_{t=t_0}=\Psi(x), \ t_0\geqslant 0, \quad (2)$$

где $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C_k(t, x)$, $P(t, x)$, $\Phi(t, x)$, $\Psi(x)$, $U(t, x)$ — квадратные матрицы размера $m\times m$.

Система (1) имеет важное физическое значение [3]. С математической точки зрения она является естественным обобщением уравнения Риккати.

В отличие от теории устойчивости для обыкновенных дифференциальных уравнений матрица начальных возмущений $\Psi(x)$ и матрица постоянно действующих (внешних) возмущений $\Phi(t, x)$ вместе с матричными коэффициентами системы (1) должны принадлежать определенным функциональным пространствам, которые обеспечивают существование и единственность глобального по t решения возмущенной задачи (1), (2). Поэтому будем предполагать, что в области $G=\{t, x: t\geqslant 0, \|x\|\leqslant Q\}$, $Q>0$, входные данные задачи (1), (2) (т. е. матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C_k(t, x)$, $P(t, x)$, $\Phi(t, x)$, $\Psi(x)$) непрерывны по t, а по переменным x_k являются матрицами экспоненциального типа [4]. Иначе говоря, они являются бесконечно дифференцируемыми по x_k матрицами, для которых справедливы следующие оценки:

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial^{|j|}A(t, x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant\alpha(t)R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n}, \quad \left\|\frac{\partial^{|j|}B(t, x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant\beta(t)R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n},\\ \left\|\frac{\partial^{|j|}C_k(t, x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant c(t)R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n}, \quad \left\|\frac{\partial^{|j|}P(t, x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant p(t)R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n},\\ \left\|\frac{\partial^{|j|}\Phi(t, x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant\varphi(t)R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n}, \quad \left\|\frac{\partial^{|j|}\Psi(x)}{\partial x^{|j|}}\right\|\leqslant\psi R_1^{j_1}\ldots R_n^{j_n},\\ t, x\in G; \quad \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^{|j|}}\equiv\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_n^{j_n}}, \quad |j|=0, 1, 2, \ldots,\end{gathered} \quad (3)$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $c(t)$, $p(t)$, $\varphi(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0, \infty)$ функции, $R_1>0, \ldots, R_n>0$, $\psi>0$ — некоторые постоянные.

Под нормой вектора (матрицы) понимаются величины

$$\|x\|=\max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|, \ \|A\|=\max_{1\leqslant s\leqslant m}\sum_{i=1}^{m}|a_{si}|.$$

Кроме того, будем считать, что

$$\varphi(t)\equiv\max_{\|x\|\leqslant Q}\|\Phi(t, x)\|, \quad \psi\equiv\max_{\|x\|\leqslant Q}\|\Psi(x)\|.$$

Определение. *Нулевое решение невозмущенной задачи* (1), (2) *будем называть устойчивым относительно указанного класса начальных и внешних возмущений, если для каждого решения задачи* (1), (2) *и при любом* $t_0\geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\|U(t, x)\|\leqslant\vartheta_1\psi+\vartheta_2\int_{t_0}^{\infty}\varphi(t)\,dt, \quad t\geqslant t_0, \ \|x\|\leqslant Q,$$

где $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ — положительные постоянные, не зависящие от выбора решения $U(t, x)$.

Заметим, что величина $\int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(t)\, dt < \infty$ представляет собой меру внешних (постоянно действующих) возмущений [5].

Очевидно, что в данном определении содержится основное требование устойчивости по Ляпунову, при котором малые возмущения вызывают и малые отклонения от невозмущенного решения на всем временном интервале $[t_0, \infty)$.

Решение задачи (1), (2) можно найти классическим методом последовательных приближений $U(t, x) = U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \ldots$, где

$$U_0(t, x) = \Psi(x) + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(\tau, x)\, d\tau,$$

$$U_{l+1}(t, x) = \Psi(x) + \int\limits_{t_0}^{t} \Big\{A(\tau, x) U_l(\tau, x) + U_l(\tau, x) B(\tau, x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} C_k(\tau, x) \frac{\partial U_l(\tau, x)}{\partial x_k} + U_l(\tau, x) P(\tau, x) U_l(\tau, x) + \Phi(\tau, x)\Big\}\, d\tau,$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots .$$

Для обоснования этого решения построим соответствующую мажорантную скалярную задачу [2]

$$\frac{\partial z}{\partial t} - c(t) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_k} = \alpha(t) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\} z +$$

$$+ \beta(t) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\} z + p(t) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\} z^2 + \varphi(t) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\}, \tag{4}$$

$$z|_{t=t_0} = \psi \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i x_i\Big\},$$

решение которой также может быть найдено по аналогичным формулам. При этом прямым вычислением с использованием оценок (3) проверяется, что

$$\left\| \frac{\partial^{|j|} (U_{l+1} - U_l)}{\partial x^{|j|}} \right\| \leqslant \left. \frac{\partial^{|j|} (z_{l+1} - z_l)}{\partial x^{|j|}} \right|_{x=0}, \quad l = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\left\| \frac{\partial^{|j|} U_0}{\partial x^{|j|}} \right\| \leqslant \left. \frac{\partial^{|j|} z_0}{\partial x^{|j|}} \right|_{x=0}, \quad |j| = 0, 1, 2, \ldots .$$

С помощью характеристик задача (4) представляется в эквивалентной форме

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)) = \psi \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i(t_0)\Big\} \cdot \exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{\tau} \gamma(s) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i(s)\Big\} ds\Big\} +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{\tau} \exp\Big\{\int\limits_{\delta}^{\tau} \gamma(s) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i(s)\Big\} ds\Big\} \cdot \Big[p(\delta) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i(\delta)\Big\} \times$$

$$\times z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \ldots \lambda_n(\delta)) + \varphi(\delta) \exp\Big\{\sum_{i=1}^{n} R_i \lambda_i(\delta)\Big\}\Big]\, d\delta, \tag{5}$$

где

$$\gamma(t) \equiv \alpha(t) + \beta(t),$$

$$\lambda_1(\tau) \equiv \lambda_1(\tau, t, x) = -\frac{1}{R}\ln\Big\{R\exp\{R_2(x_2-x_1)+\ldots+R_n(x_n-x_1)\}\times$$

$$\times\int_t^\tau c(\theta)\,d\theta + \exp\{-Rx_1\}\Big\},\quad R\equiv\sum_{i=1}^n R_i,$$

$$\lambda_2(\tau) \equiv \lambda_1(\tau) + (x_2-x_1), \ldots, \lambda_n(\tau) \equiv \lambda_1(\tau) + (x_n-x_1).$$

Так как нам требуется лишь значение $z(t, 0)$, то в (5) можно положить $x = 0$, поскольку x — параметр. Имеем

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau))|_{x=0} = \frac{\psi}{1-R\int\limits_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta}\exp\left\{\int\limits_{t_0}^\tau \frac{\gamma(s)\,ds}{1-R\int\limits_s^t c(\theta)\,d\theta}\right\} +$$

$$+\int\limits_{t_0}^\tau \exp\left\{\int\limits_\delta^\tau \frac{\gamma(s)\,ds}{1-R\int\limits_s^t c(\theta)\,d\theta}\right\}\left[\frac{p(\delta)\,z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \ldots \lambda_n(\delta))|_{x=0}}{1-R\int\limits_\delta^t c(\theta)\,d\theta} +\right.$$

$$\left.+\frac{\varphi(\delta)}{1-R\int\limits_\delta^t c(\theta)\,d\theta}\right]d\delta. \tag{6}$$

Предположим теперь, что выполнены условия

$$1 - R\int\limits_0^\infty c(\theta)\,d\theta \geqslant \delta > 0,\quad \int\limits_0^\infty \gamma(s)\,ds < \infty, \tag{7}$$

где δ — некоторое малое фиксированное число. Тогда из уравнения (6) получим

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau))|_{x=0} \leqslant \frac{N\psi}{1-R\int\limits_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta} +$$

$$+\frac{N}{1-R\int\limits_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta}\int\limits_{t_0}^\tau \{p(\delta)\,z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \ldots, \lambda_n(\delta))|_{x=0} + \varphi(\delta)\}\,d\delta,$$

где в качестве параметра N можно взять число $N = \exp\left\{\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\infty \gamma(s)\,ds\right\}$.

Далее из предыдущего неравенства следует

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau))|_{x=0} \leqslant \frac{N\left(\psi + \int\limits_{t_0}^\infty \varphi(\delta)\,d\delta\right)}{1-R\int\limits_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta} +$$

$$+\frac{N\int\limits_{t_0}^\tau p(\delta)\,z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \ldots, \lambda_n(\delta))|_{x=0}\,d\delta}{1-R\int\limits_{t_0}^t c(\theta)\,d\theta}.$$

В силу оценки Бихари [6, с. 26] получим

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau))|_{x=0} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)}{\left(1 - R\int\limits_{t_0}^{t} c(\theta)\, d\theta\right)^2 - N^2\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)\int\limits_{t_0}^{\tau} p(\delta)\, d\delta},$$

и, следовательно,

$$z(t, 0) \leqslant \frac{N\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)}{\left(1 - R\int\limits_{t_0}^{t} c(\theta)\, d\theta\right)^2 - N^2\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)\int\limits_{t_0}^{t} p(\delta)\, d\delta}.$$

Для положительности правой части при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, очевидно, необходимо, чтобы знаменатель был больше нуля, т. е. должно выполняться неравенство

$$1 - R\int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta - N\left[\left(\psi + \int\limits_0^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)\int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta\right]^{1/2} \geqslant \varepsilon > 0,$$

где ε — малое фиксированное число.

Данное неравенство представляет собой основное требование к входным данным задачи (1), (2), которое обеспечивает существование глобального по t решения. Для удобства дальнейшего анализа представим его в виде

$$\int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta < \frac{1}{R}\left[1 - N\left\{\left(\psi + \int\limits_0^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)\int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta\right\}^{1/2}\right]. \tag{8}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть при сделанных выше предположениях о гладкости входных данных задачи* (1), (2) *выполнены условия* (7), (8). *Тогда тривиальное решение устойчиво в указанном смысле.*

Для иллюстрации исследуем устойчивость нулевого решения задачи (1), (2) относительно только начальных возмущений, т. е. $\Phi(t, x) \equiv 0$. В этом случае мажорантная задача (4) представляет собой аналог уравнения Бернулли и интегрируется в замкнутом виде. Таким образом, имеем

$$z(t, 0) = \frac{\psi \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\gamma(\tau)\, d\tau}{1 - R\int\limits_{\tau}^{t} c(\theta)\, d\theta}\right\}}{1 - R\int\limits_{t_0}^{t} c(\theta)\, d\theta - \psi\int\limits_{t_0}^{t} \frac{p(s)}{1 - R\int\limits_{s}^{t} c(\theta)\, d\theta} \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{s} \frac{\gamma(\tau)\, d\tau}{1 - R\int\limits_{\tau}^{t} c(\theta) d\theta}\right\} ds}.$$

Следовательно,

$$z(t, 0) \leqslant \frac{\psi N}{\left(1 - R\int\limits_{t_0}^{t} c(\theta)\, d\theta\right)^2 - \psi N\int\limits_{t_0}^{t} p(\delta)\, d\delta},$$

и основное требование к входным данным принимает вид

$$\int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta < \frac{1}{R}\left[1 - \left\{\psi N\int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta\right\}^{1/2}\right]. \tag{9}$$

Сравнивая (9) с неравенством (8), убеждаемся, что оно представляет собой менее жесткие ограничения на входные данные задачи (1), (2), чем в общем случае.

Изучим далее устойчивость тривиального решения относительно аналитического класса функциональных возмущений. Предположим, что в области G матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C_k(t, x)$, $P(t, x)$, $\Phi(t, x)$, $\Psi(x)$ непрерывны по t и аналитичны по x (точнее говоря, они разлагаются по x в абсолютно сходящиеся по норме пространства R^m матричные ряды Маклорена). В этом случае соответствующая мажорантная задача для (1), (2) примет вид [2]

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c(t)}{(1 - x_1/Q)^2 \dots (1 - x_k/Q) \dots (1 - x_n/Q)^2} \frac{\partial z}{\partial x_k} =$$

$$= \frac{\gamma(t) z}{(1 - x_1/Q) \dots (1 - x_n/Q)} + \frac{p(t) z^2}{(1 - x_1/Q) \dots (1 - x_n/Q)} +$$

$$+ \frac{\varphi(t)}{(1 - x_1/Q) \dots (1 - x_n/Q)}, \tag{10}$$

$$z|_{t=t_0} = \frac{\psi}{(1 - x_1/Q) \dots (1 - x_n/Q)}, \ \|x\| \leqslant Q_0 < Q,$$

где

$$\gamma(t) \equiv \alpha(t) + \beta(t), \quad \psi \equiv \max_{\|x\| \leqslant Q} \|\Psi(x)\|, \quad \varphi(t) \equiv \max_{\|x\| \leqslant Q} \|\Phi(t, x)\|,$$

$\alpha(t)$, $\beta(t)$, $c(t)$, $p(t)$, $\varphi(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0, \infty)$ функции.

С помощью характеристик задача (10) приводится к эквивалентному виду

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \dots \lambda_n(\tau)) = \frac{\psi}{R(t, t_0, x)} \exp\left\{\int_{t_0}^{\tau} \frac{\gamma(s)\, ds}{R(t, s, x)}\right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{\tau} \exp\left\{\int_{\delta}^{\tau} \frac{\gamma(s)\, ds}{R(t, s, x)}\right\} \left[\frac{p(\delta) z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \dots \lambda_n(\delta))}{R(t, \delta, x)} + \frac{\varphi(\delta)}{R(t, \delta, x)}\right] d\delta, \tag{11}$$

$$R(t, s, x) \equiv \left[\left(1 - \frac{x_1}{Q}\right)^2 \dots \left(1 - \frac{x_n}{Q}\right)^2 - \frac{2n}{Q} \int_s^t c(\theta)\, d\theta\right]^{1/2}.$$

Предположим, что выполнены условия

$$\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - \frac{2n}{Q} \int_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta \geqslant \delta > 0, \quad \int_0^{\infty} \gamma(s)\, ds < \infty, \tag{12}$$

где δ — малое фиксированное число.

Тогда из уравнения (11) найдем

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \dots, \lambda_n(\tau)) \leqslant \frac{N}{R(t, t_0, x)} \left[\psi + \int_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta + \right.$$

$$\left. + \int_{t_0}^{\tau} p(\delta) z^2(\delta, \lambda_1(\delta), \dots \lambda_n(\delta))\, d\delta\right].$$

Здесь в качестве параметра N можно взять число $N = \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^{\infty} \gamma(s)\, ds\right\}$.

Используя оценку Бихари [6, с. 26], получаем

$$z(\tau, \lambda_1(\tau), \ldots, \lambda_n(\tau)) \leqslant \frac{N\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)}{R^2(t, t_0, x) - N^2\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right) \int\limits_{t_0}^{\tau} p(\delta)\, d\delta},$$

и, следовательно,

$$z(t, x) \leqslant \frac{N\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right)}{R^2(t, t_0, x) - N^2\left(\psi + \int\limits_{t_0}^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right) \int\limits_{t_0}^{t} p(\delta)\, d\delta}.$$

Чтобы обеспечить существование глобальной по t оценки решения уравнения (11) в области $t \geqslant t_0$, $\|x\| \leqslant Q_0 < Q$, следует положить

$$\left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - \frac{2n}{Q} \int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta - N^2\left(\psi + \int\limits_0^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right) \int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta \geqslant \varepsilon > 0,$$

где ε — малое фиксированное число.

Для удобства анализа представим последнее неравенство в виде

$$\frac{2n}{Q} \int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta < \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - N^2\left(\psi + \int\limits_0^{\infty} \varphi(\delta)\, d\delta\right) \int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть при сделанных выше предположениях о гладкости входных данных задачи* (1), (2) *выполнены условия* (12), (13). *Тогда тривиальное решение устойчиво относительно аналитического класса функциональных возмущений.*

Для иллюстрации исследуем устойчивость нулевого решения относительно только начальных возмущений, т. е. $\Phi(t, x) \equiv 0$. В этом случае мажорантная задача (10) представляет собой аналог уравнения Бернулли и интегрируется в замкнутом виде

$$z(t, x) = \frac{\psi \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\gamma(\tau)\, d\tau}{R(t, \tau, x)}\right\}}{R(t, t_0, x) - \psi \int\limits_{t_0}^{t} \frac{p(s)}{R(t, s, x)} \exp\left\{\int\limits_{t_0}^{s} \frac{\gamma(\tau)\, d\tau}{R(t, \tau, x)}\right\} ds}.$$

Следовательно,

$$z(t, x) \leqslant \frac{\psi N}{R^2(t, t_0, x) - \psi N \int\limits_{t_0}^{t} p(\delta)\, d\delta},$$

и основное требование к входным данным принимает вид

$$\frac{2n}{Q} \int\limits_0^{\infty} c(\theta)\, d\theta < \left(1 - \frac{Q_0}{Q}\right)^{2n} - \psi N \int\limits_0^{\infty} p(\delta)\, d\delta.$$

Сравнивая его с (13), видим, что оно обеспечивает менее жесткие ограничения на входные данные задачи (1), (2), чем в общем случае.

1. *Жестков С. В., Лаптинский В. Н.* О некоторых оценках решения задачи Коши для общих нормальных систем в частных производных // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1988.— № 2.— С. 107—110.
2. *Жестков С. В.* Об устойчивости по Ляпунову задачи Коши для линейных систем в частных производных // Дифференц. уравнения.— 1990.— **26**, № 4.— С. 706—709.

3. *Пташник Б. И., Скоробогатько В. Я.* Некоторые идеи и результаты Львовской математической школы в области ветвящихся цепных дробей и дифференциальных уравнений.— Львов, 1989.— 33 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. пробл. механики и математики; № 27. 88).
4. *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа и функциональное исчисление // Докл. АН БССР.— 1983.— 27, № 10.— С. 875—878.
5. *Иво Вркоч.* Интегральная устойчивость // Чехосл. мат. журн.— 1959.— 9, № 1.— С. 71—129.
6. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.— 152 с.

Получено 06.07.90