УДК 519.21

Л. С. ИВАНИЦКАЯ, стажер,
А. В. ИВАНОВ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики АН УССР, Киев)

Асимптотическое разложение распределения дисперсии ошибки наблюдения в нелинейной регрессионной модели

В модели нелинейной регрессии получено асимптотическое разложение функции распределения оценки наименьших квадратов дисперсии ошибки наблюдения. Найдены первые два члена асимптотического разложения.

В моделі нелінійної регресії одержано асимптотичний розклад функції розподілу оцінки найменших квадратів дисперсії помилки спостереження. Знайдено перші два члени асимптотичного розкладу.

Рассмотрим модель наблюдений вида $X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j$, $j = 1, \ldots, n$, где $g(j, \theta)$ — последовательность функций, нелинейно зависящая от неизвестного параметра $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^q) \in \Theta$, $\Theta \subseteq R^q$ — открытое множество, ε_j — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 > 0$. Полноценная статистическая обработка наблюдений X_j, $j = 1, \ldots, n$, предусматривает получение статистических оценок как θ, так и σ^2. В качестве оценки σ^2 рассмотрим статистику $\widehat{\sigma}_n^2 = n^{-1} L_n(\widehat{\theta}_n)$, где $L_n(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{n} [X_j - g(j, \tau)]^2$, $\widehat{\theta}_n = (\widehat{\theta}_n^1, \ldots, \widehat{\theta}_n^q)$ — оценка наименьших квадратов параметра θ, т. е. случайный вектор, удовлетворяющий соотношению $L_n(\widehat{\theta}_n) = \inf\limits_{\theta \in \Theta^c} L_n(\theta)$, Θ^c — замыкание Θ.

В предлагаемой работе получена теорема об асимптотическом при $n \to \infty$ разложении (а.р.) распределения с.в. $\widehat{\sigma}_n^2$ и найдены первые два члена а.р. Теорема усиливает результат работ [1 — 3].

Предположим, что $g(j, \theta) \in C^k(\Theta)$, $j = 1, 2, \ldots$, для некоторого $k \geqslant 2$ и обозначим через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_q$,

$$g^{(\alpha)} = (\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1}\theta^1 \ldots \partial^{\alpha_q}\theta^q)\, g, \quad b_n^{(\alpha)}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j g^{(\alpha)}(j, \theta),$$

$$d_n^2(\alpha; \theta) = \sum_{j=1}^{n} [g^{(\alpha)}(j, \theta)]^2.$$

Используя иное обозначение для производной $g_{i_1 \ldots i_r} = (\partial^r / \partial\theta^{i_1} \ldots \partial\theta^{i_r})\, g$, $r = 1, \ldots, k$, положим $\mathcal{I}_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} g_i(j, \theta)\, g_l(j, \theta)\right)_{i,l=1}^{q}$, $\Lambda_n(\theta) = (\Lambda_n^{il})_{i,l=1}^{q} = \mathcal{I}_n^{-1}(\theta)$, $b_n^{i_1 \ldots i_r}(\theta) = n^{-1/2} \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j g_{i_1 \ldots i_r}(j, \theta)$. Будем далее считать, что если в произведении двух или большего числа сомножителей какой-либо индекс встречается дважды, то это означает суммирование по всем значениям этого индекса от 1 до q. Для $r = 1, \ldots, k-1$ и $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, q$ положим $v_n^{i_1 \ldots i_r}(\theta) = \Lambda_n^{i_1 l}(\theta)\, b^{l i_2 \ldots i_r}(\theta)$. Введем вектор, состоящий из всех различных величин $u^{i_1 \ldots i_r} \not\equiv 0$, взятых в естественном порядке:

$$v_n^*(\theta) = (v^1, \ldots, v^q, v^{11}, \ldots, v^{1q_1}, v^{21}, \ldots, v^{2q}, \ldots, v^{qq}, v^{111}, \ldots, v^{11q}, v^{121}, \ldots, v^{12q},$$

$$v^{131}, \ldots, v^{\overbrace{q \ldots q}^{k-1}}), \quad p = \dim v_n \leqslant q \begin{pmatrix} q \\ q+k-2 \end{pmatrix}.$$

Этот вектор можно представить в виде $v_n(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j w_n(j, \theta)$, где векторы $w_n(j,\theta)$ размерности p построены из величин $\Lambda_n^{i_1 l}(\theta)\, g_{li_2\ldots i_r}(j,\theta)$, $r = 1, \ldots, k-1$. Тогда $\sigma^2 K_n(\theta) = \sigma^2 n^{-1} \sum_{j=1}^{n} w_n(j,\theta)\, w_n^*(j,\theta)$ — корреляционная матрица вектора $v_n(\theta)$. Обозначим $m_r = E\varepsilon_j^r$, $\mu_r = E|\varepsilon_j|^r$ (таким образом, $\sigma^2 = \mu_2$).

Пусть $T \subset \Theta$ — фиксированный компакт, $\lambda_{\min}(M)$ ($\lambda_{\max}(M)$) — наименьшее (наибольшее) собственное число положительно определенной матрицы M. Буквами c будем обозначать константы. Положим для множества $S \subset R^q$ $\rho(x, S) = \inf\{|x - y|, y \in S\}$, $S_\delta = \{x \in R^q : \rho(x, S) < \delta\}$. Потребуем выполнения следующих условий:

1) $\forall \delta > 0 \sup\limits_{\tau \in T_\delta^c \cap \Theta^c} n^{-1} d_n(\alpha; \tau) \leqslant c_1(\alpha; R) < \infty$, $|\alpha| = 1, \ldots, k$;

2) $\forall \delta > 0 \sup\limits_{\tau_1, \tau_2 \in T_\delta^c \cap \Theta^c} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} [g^{(\alpha)}(j, \tau_1) - g^{(\alpha)}(j, \tau_2)]^2 |\tau_1 - \tau_2|^{-2} \leqslant c_2(\alpha; R)$, $|\alpha| = k$;

3) при $|\alpha| = 1$ и $|\alpha| = 2, \ldots, k$, для которых $g^{(\alpha)} \not\equiv 0$,

$$\varliminf_{n \to \infty} \inf_{\tau \in T} n^{-1/2} d_n(\alpha; \tau) > 0;$$

4) $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\tau \in T} n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |g^{(\alpha)}(j, \tau)|^{k+1} < \infty$, $|\alpha| = 1, \ldots, k$;

5) $\varliminf\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{\tau \in T} \lambda_{\min}(\mathcal{I}_n(\tau)) > 0$;

пусть P_θ^n — вероятностная мера на $(R^n, \mathcal{B}^n)$ ($\mathcal{B}^n$ — σ-алгебра борелевских множеств R^n) порожденная последовательностью с.в. X_j, $j = 1, \ldots, n$,

6) $\sup\limits_{\theta \in T} P_\theta^n \{n^{1/2} |\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant H\} = O(H^{-k})$ при $H \to \infty$;

утверждение о степенной скорости убывания хвоста распределения нормированной о. н. к., выражаемое условием 6, было получено в [4] для $q = 1$ и в [5] для $q \geqslant 1$;

7) существует целое число $h > 0$ такое, что среди любых h векторов из совокупностей $\{w_n(j, \theta), j = s+1, \ldots, s+h\}$, $0 \leqslant s \leqslant n-h$, $n \geqslant h+1$, найдется p векторов $w_n(j_1, \theta), \ldots, w_n(j_p, \theta)$ таких, что матрицы $W_{sn}^{(h)}(\theta) = \sum_{i=1}^{p} w_n(j_i, \theta)\, w_n^*(j_i, \theta)$ равномерно положительно определены в следующем смысле:

$$\inf_{\substack{0 \leqslant s \leqslant n-h \\ n \geqslant h+1}} \inf_{\theta \in T} \lambda_{\min}(W_{sn}^{(h)}(\theta)) \geqslant \lambda_* > 0;$$

из условия 7, в частности, следует

7^0) $\varliminf\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{\theta \in T} \lambda_{\min}(K_n(\theta)) > 0$;

8) $\mu_{2(k+1)} < \infty$;

9) с. в. ε_j обладает плотностью $f(x)$, которая имеет ограниченную вариацию на R^1.

Пусть $[a, b]$, $a > 0$, $b < \infty$, — произвольный, но фиксированный интервал, $T' = [a, b] \times T$, $\theta' = (\sigma^2, \theta)$, $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$ — эксцесс распределения ε_j; $\varphi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}$ — стандартная гауссовская плотность. Буквой Π будем обозначать суммы произведений производных функций $g(j, \theta)$. Например, $\Pi_n^{(i_1 i_2)(i_3)}(\theta) = h^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_{i_1 i_2}(j, \theta)\, g_{i_3}(j, \theta)$.

Теорема. *Если выполнены условия 1—9, то*

$$\sup_{\theta'\in T'}\sup_{z\in R^1}\left|P_\theta^n\left\{\left(\frac{n}{\beta_2+2}\right)^{1/2}\left(\frac{\hat\sigma_n^2}{\sigma^2}-1\right)<z\right\}-\int_{-\infty}^{z}\varphi(z)\left(1+\sum_{\nu=1}^{k-2}R_{\nu h}(\theta',z)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times h^{-\nu/2}\right)dz\right|=O(h^{-\frac{k-1}{2}}\log^{\frac{k}{2}}h),$$

где $R_{\nu h}$ — полиномы от z степени 3ν с равномерно ограниченными по $\theta'\in T'$ и n коэффициентами.

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если выполнены условия 1—6, то существует константа $c_3>0$ такая, что*

$$\sup_{\theta'\in T'}P_\theta^n\left\{\left|h^{1/2}(\hat\sigma_n^2-\sigma^2)-\sum_{\nu=0}^{k-2}P_{\nu n}(\theta)h^{-\nu/2}\right|\geqslant c_3n^{-\frac{k-1}{2}}\log^{\frac{k}{2}}h\right\}=$$

$$=O(h^{-\frac{k-1}{2}}\log^{-\frac{k}{2}}h),$$

где $P_{\nu n}$, $\nu=1,\ldots,k-2$, — однородные полиномы степени $\nu+1$ относительно величин $b_n^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha|=1,\ldots,\nu$, а $P_{0n}=n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_j^2-\sigma^2)$ по определению. В частности, $P_{1n}=-\Lambda^{ij}b^ib^j$, $P_{2n}=\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2i_2}\Lambda^{j_3j_3}\Pi^{(i_1i_2)(i_3)}b^{j_1}b^{j_2}b^{j_3}-$ $-\Lambda^{i_1j_1}\Lambda^{i_2j_2}b^{i_1i_2}b^{j_1}b^{j_2}$.

Лемма обобщает результат работы [6]. Следующий факт вытекает из равномерного по $\theta'\in T'$ варианта теоремы 19.3 работы [7] и замечания на с. 213 там же.

Лемма 2. *Пусть $\xi_{jn}(\theta')$, $j=1,\ldots,n$, $\theta'\in T'$, — последовательность серий независимых в каждой серии векторных случайных полей со значениями в R^d с нулевым средним. Предположим, что*

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{\theta'\in T'}\lambda_{\min}(B_n(\theta'))>0,\quad B_n(\theta')=h^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}E_\theta^n\xi_{jn}(\theta')\xi_{jn}^*(\theta')$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\theta'\in T'}\left(h^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n}E_\theta^n|B_n^{-1/2}(\theta')\xi_{jn}(\theta)|^{k+1}\right)<\infty$ *при некотором целом* $k\geqslant 2$;

в) *существует целое $u>0$ такое, что функция*

$$\Psi_{sn}(\tau)=\prod_{j=s+1}^{s+u}|E_\theta^n\exp\{i\langle B_n^{-1/2}(\theta')\xi_{jn}(\theta'),\tau\rangle\}|,$$

$0\leqslant s\leqslant n-u$, $n\geqslant u+1$, *удовлетворяет условию*

$$\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant n-u\\ n\geqslant u+1}}\sup_{\theta'\in T'}\int_{R^d}\Psi_{sn}(\tau)d\tau<\infty,\tag{1}$$

и для любого числа $b'>0$

$$\sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant n-u\\ n\geqslant u+1}}\sup_{\substack{\theta'\in T'\\ |\tau|\geqslant b'}}\Psi_{sn}(\tau)<1.\tag{2}$$

Тогда для распределения $G_n(\theta')$ суммы $n^{-1/2}B_n^{-1/2}(\theta')\sum_{j=1}^{n}\xi_{jn}(\theta')$ справедливо а. р.

$$\sup_{\theta'\in T'}\sup_{A\in\mathscr{B}^d}\left|\int_A G_n(\theta')(dx)-\int_A\left(\sum_{r=0}^{k-2}n^{-r/2}P_r(-\varphi_d:\{\overline{\chi}_\nu\})(x)\varphi_d(x)\right)dx\right|=$$

$$=O(h^{-\frac{k-1}{2}}).\tag{3}$$

В формулировке леммы 2 φ_d — стандартная гауссовская плотность в R^d, $P_r(-\varphi_d : \{\overline{\chi}_\nu\})$ — полиномы от $x \in R^d$, которые определены в § 7 [7], $\overline{\chi}_\nu$ — средние арифметические кумулянтов порядка ν случайных векторов $\xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn}$.

Введем вектор $\widetilde{v}_n(\theta') = (v_{0n}; v_n(\theta))$, $v_{0n} = P_{0n}$. Корреляционная матрица вектора $\widetilde{v}_n(\theta')$ суть

$$B_n(\theta') = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} E_\theta^n \xi_{jn}(\theta') \xi_{jn}^*(\theta'), \quad \xi_{jn}(\theta') = (\varepsilon_j^2 - \sigma^2; w_n(j, \theta) \varepsilon_j).$$

Лемма 3. *В условиях теоремы для суммы* $B_n^{-1/2}(\theta') \widetilde{v}_n(\theta')$ *справедливо а. р.* (3), *при этом* $d = p + 1$.

Доказательство. Выполнение условия а) леммы 2 вытекает из условия 7^0 и рассуждений, содержащихся в [3]. Проверка условия б) не вызывает затруднений. Проверим условие в). Пусть G — функция распределения вектора $(\varepsilon_j^2 - \sigma^2, \varepsilon_j)$, а $\widehat{G}$ — его характеристическая функция. Положим $u = rh$, где $r \geqslant 6$ — целое число, а h взято из условия 7, $\tau = (t_0, t)$, $t_0 \in R^1$, $t \in R^p$. Тогда

$$\Psi_{sn}(B_n^{1/2}(\theta)\tau) = \prod_{j=s+1}^{s+u} |\widehat{G}(t_0, \langle t, w_n(j, \theta)\rangle|,$$

$$Q = \int_{R^{p+1}} \Psi_{sn}(B_n^{1/2}(\theta)\tau)\, d\tau \leqslant \prod_{m=1}^{r} \Big(\int_{R^{p+1}} \prod_{j=s+(m-1)h+1}^{s+mh} | \widehat{G}(t_0, \langle t, w_n(j, \theta)\rangle |^r d\tau)^{1/r} =$$

$$= \prod_{m=1}^{r} Q_m^{1/r}, \quad Q_m \leqslant \int_{R^{p+1}} \prod_{i=1}^{p} | \widehat{G}(t_0, \langle t, w_n(j_i^{(m)}, \theta)\rangle) |^r d\tau, \tag{4}$$

где $w_n(j_i^{(m)})$, $i = 1, \ldots, p$, — p векторов из условия 7.

Сделаем замену переменных $x_0 = t_0$, $x_i = \langle t, w_n(j_i^{(m)}, \theta)\rangle$, $i = 1, \ldots, p$, в интеграле (4). Якобиан этого преобразования равен $\det w_m$, где W_m — матрица со столбцами $w_n(j_i^{(m)})$, $i = 1, \ldots, p$. Из условия 7 следует, что $\det(W_m W_m^*) \geqslant \lambda_*^p > 0$ равномерно по $s, n, \theta \in T$. Поэтому .

$$Q_m \leqslant \lambda_*^{-p/2} \int_{R^{p+1}} \prod_{i=1}^{p} | \widehat{G}(x_0, x_i) |^r dx = \lambda_*^{-p/2} \int_{R^1} \Big[\int_{R^1} | \widehat{G}(x_0, x) |^r dx \Big]^p dx_0. \tag{5}$$

Если выполнено условие 9 и $\mu_1 < \infty$, то для любого $\delta > 0$

$$| \widehat{G}(\lambda_1, \lambda_2) |^{5(1+\delta)} \leqslant c_4 (1 + |\lambda_1|^{1+\delta})^{-1} (1 + |\lambda_2|^{1+\delta})^{-1}. \tag{6}$$

Этот факт, который мы приводим без доказательства, близок к результатам [8, 9]. Из неравенств (4)—(6) вытекает конечность Q, и (1) следует из условия a).

Используя лемму 1.4 [10], для любого $\rho > 0$ получаем $\sup\limits_{\|x\| > \rho} | \widehat{G}(x) | < 1$, и неравенство (2) вытекает из условия 7 и условия а) леммы 2.

Пусть $Q_n(\theta') = P_\theta^n \circ \widetilde{V}_n(\theta')$ — функция распределения вектора $\widetilde{v}_n(\theta')$. Тогда заменой переменных $x \to B_n^{-1/2}(\theta') x$ в а. р. (3) получаем

$$\sup_{\theta' \in T'} \sup_{A \in \mathscr{B}^{p+1}} \Big| \int_A Q_n(\theta')(dx) - \int_A \Big(\sum_{r=0}^{k-2} n^{-r/2} P_r(-\varphi_{B_n} : \{\overline{\chi}_\nu\})(x) \Big) \varphi_{B_n}(x) \Big) dx \Big| =$$

$$= O(n^{-\frac{k-1}{2}}), \tag{7}$$

φ_{B_n} — гауссовская плотность в R^{p+1} с нулевым средним и корреляционной матрицей $B_n(\theta')$.

Обозначим $\overline{P}_{rn}(\theta', x) = P_r(-\varphi_{B_n} : \{\overline{\chi}_\nu\})(x)$, $r = 1, \ldots, k-2$, $Q_{kn}(\theta', x) = \varphi_{B_n}(x)\left(1 + \sum_{r=1}^{k-2} n^{-r/2}\overline{P}_{rn}(\theta', x)\right)$ $x \in R^{p+1}$.

Определим отображение $f_n(x) : R^{p+1} \to R^{1+p}$ следующим образом:

$$f_n^i(x) = x_i + \sum_{r=1}^{k-2} n^{-r/2} P_{rn}^i(\theta', x), \quad i = 0, 1, \ldots, p,$$

P_{rn}^i — полиномы от x с равномерно по $\theta' \in T'$ и n ограниченными коэффициентами.

Лемма 4. *Если выполнены условия* 1, 4 *и* 7°, *то*

$$\sup_{\theta' \in T'} \sup_{A \in \mathscr{B}^{p+1}} \left| \int_{f_n^{-1}(A)} Q_{kn}(\theta', x)\, dx - \int_A Q_{kn}^*(\theta', y)\, dy \right| = O(h^{-\frac{k-1}{2}}),$$

$$Q_{kn}^*(\theta', y) = \varphi_{B_n}(y)\left(1 + \sum_{r=1}^{k-2} n^{-r/2} p_{rn}^*(\theta', y)\right), \tag{8}$$

где $P_{rn}^*(\theta', y)$ — *полиномы от* y *с равномерно ограниченными по* n *и* $\theta' \in T'$ *-коэффициентами.*

Доказательство проводится по плану [11, 12]. Полиномы P_{rn}^* определяются из разложения выражения $Q_{kn}(\theta', f_n^{-1}(y)) \left| \dfrac{\partial f_n^{-1}(y)}{\partial y} \right|$. В частности,

$$P_{1n}^* \varphi_{B_n} = \overline{P}_{1n}\varphi_{B_n} - \sum_{i=0}^{p} (P_{1n}^i \varphi_{B_n})_i,$$

$$P_{2n}^* \varphi_{B_n} = \overline{P}_{2n}\varphi_{B_n} - \sum_{i=0}^{p} (\overline{P}_{1n} P_{1n}^i \varphi_{B_n} + P_{2n}^i \varphi_{B_n})_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{p} (P_{1n}^i P_{1n}^j \varphi_{B_n})_{ij}.$$

Доказательство теоремы. Из (7) и (8) следует соотношение

$$\sup_{\theta' \in T'} \sup_{A \in \mathscr{B}^{p+1}} \left| \int_A (Q_n(\theta') \circ f_n(\cdot))(dx) - \int_A Q_{kn}^*(\theta', y)\, dy \right| = O(n^{-\frac{k-1}{2}}). \tag{9}$$

Заметим, что полиномы $P_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0, \ldots, k-2$, входящие в а. р. леммы 1, являются функциями от координат вектора $\tilde{v}_n$. Так, $P_{0n} = v_0$, $P_{1n} = -\mathcal{I}^{ij} v^i v^j$, $P_{2n} = \Pi^{(i_1 i_2)(i_3)} v^{i_1} v^{i_2} v^{i_3} - \mathcal{I}^{i_1 i_3} v^{i_1} v^{i_2} v^{i_2 i_3}$ и т. д. Введем отображение $f_n(x)$ специального вида:

$$f_n^0(x) = x_0 + \sum_{r=1}^{k-2} n^{-r/2} P_{rn}(\theta; x_1, \ldots, x_p),$$

$$f_n^i(x) = x_i, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{10}$$

и обозначим $\rho = c_3 n^{-\frac{k-1}{2}} \log^{\frac{k}{2}} n$, $Z(\pm\rho) = (-\infty, z \pm \rho) \times R^p$. Тогда из леммы 1 и (9) следует, что равномерно по $\theta' \in T'$ и $z \in R^1$

$$P_\theta^n \{n^{1/2}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2) < z\} \lesseqgtr \int_{Z(\pm\rho)} Q_{kn}^*(\theta', y)\, dy + O(n^{-\frac{k-1}{2}}) =$$

$$= \int_{Z(0)} Q_{kn}^*(\theta', y)\, dy + O(\rho).$$

Пусть

$$y = (y_0, y'), \quad y' = (y_1, \ldots, y_p),$$

$$\Delta_n = \sigma^2 K_n(\theta) - \frac{1}{\mu_4 - \mu_2^2}\Big(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} w_n(j, \theta)\Big) n^{-1}\sum_{j=1}^{n} w_n(j, \theta)\Big)^* m_3^2.$$

Поскольку [13]

$$\varphi_{B_n}(y) = \varphi_{\mu_4 - \mu_2^2}(y_0)\,\varphi_{\Delta_n}\Big(y' - \frac{m_3}{\mu_4 - \mu_2^2}\,(n^{-1}\sum_{j=1}^{n} w_n(j, \theta)\, y_0\Big),$$

то

$$\int\limits_{Z(0)} Q_{kn}^*(\theta', y)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{z} \varphi_{\mu_4 - \mu_2^2}(y_0)\Big(1 + \sum_{\nu=1}^{k-2} n^{-\nu/2} R_{\nu n}^*(\theta', y_0)\Big)\, dy_0,$$

где

$$R_{\nu n}^*(\theta', y_0) = \int\limits_{R^p} P_{\nu n}^*(\theta', y)\,\varphi_{\Delta_n}\Big(y' - \frac{m_3}{\mu_4 - \mu_2^2}\, n^{-1}\sum_{j=1}^{n} w_n(j, \theta)\, y_0\Big)\, dy', \quad (11)$$

$\nu = 1, \ldots, k-2,$ — полиномы степени 3ν от y_0 с равномерно ограниченными по $\theta' \in T'$ и n коэффициентами. Теорема доказана, поскольку $R_{\nu n}(\theta', z) = R_{\nu n}^*(\theta', \sqrt{\mu_4 - \mu_2^2}\, z)$, $\nu = 1, \ldots, k-2$.

Подсчет первых полиномов а. р. можно провести, по крайней мере, двумя способами. Для отображения (10)

$$P_{1n}^*\varphi_{B_n} = \overline{P}_{1n}\varphi_{B_n} - P_{1n}(\varphi_{B_n})_0, \quad P_{2n}^*\varphi_{B_n} = \overline{P}_{2n}\varphi_{B_n} - P_{1n}(\overline{P}_{1n}\varphi_{B_n})_0 -$$

$$- P_{2n}(\varphi_{B_n})_0 + \frac{1}{2} P_{1n}^2(\varphi_{B_n})_{00}. \quad (12)$$

Первый способ состоит в подсчете интегралов (11) с учетом формул (12). Второй — в использовании формального δ-метода [14]. Приведем конечный результат, полученный δ-методом.

Пусть $H_s(z)$, $s \geqslant 1$,— полиномы Чебышева — Эрмита,

$$\gamma_1 = \Lambda^{ij}\Pi^{(i)}\Pi^{(j)}, \quad \gamma_2 = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}(2\Pi^{(i_1 i_2)(j_1)}\Pi^{(j_2)} + \Pi^{(i_1 j_1)(i_2)}\Pi^{(j_2)}) -$$

$$- \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_1 j_2}(\Pi^{(j_2 j_3)(j_1)}\Pi^{(j_3)} + \Pi^{(j_3 j_2)(j_3)}\Pi^{(j_1)}) - \Lambda^{i_1 j_1}\Pi^{(i_1 j_1)},$$

$$\gamma_3 = \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_2 j_2}\Lambda^{i_3 j_3}\Pi^{(i_1 i_2)(i_3)}\Pi^{(j_1)}\Pi^{(j_2)}\Pi^{(j_3)} - \Lambda^{i_1 j_1}\Lambda^{i_1 j_2}\Pi^{(j_1)}\Pi^{(j_2 j_3)}\Pi^{(j_3)};$$

$$\gamma_0 = (D\varepsilon_j^2)^{1/2} = (\mu_4 - \mu_2^2)^{1/2}.$$

Тогда

$$R_{1n}(\theta', z) = \gamma_0^{-1} q\sigma^2 H_1(z) + \gamma_0^{-3}\Big(\frac{\mu_6}{6} - \frac{\mu_4}{2} + \frac{\sigma^6}{3} - m_3^2\gamma_1\Big) H_3(z),$$

$$R_{2n}(\theta', z) = \gamma_0^{-2}\Big(q(\sigma^4 - \gamma_0^2) + m_3\sigma^2\gamma_2 + \frac{q^2\sigma^4}{2}\Big) H_2(z) + \Big\{\gamma_0^{-4}\Big(\frac{\mu_8}{24} -$$

$$- \frac{\mu_6\sigma^2}{4} + \frac{\mu_4\sigma^4}{4} - \frac{\sigma^8}{8}\Big) - \frac{1}{8} + \gamma_0^{-4}[(6\sigma^2 m_3^2 - m_3 m_5)\gamma_1 + m_3^2\gamma_3] +$$

$$+ \gamma_0^{-4} q\sigma^2\Big(-\frac{\mu_6}{6} + \frac{\mu_4\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^6}{3} + m_3^2\gamma_1\Big)\Big\} H_4(z) + \frac{1}{72}\gamma_0^{-6}(\mu_6 - 3\mu_4\sigma^2 +$$

$$+ 2\sigma^6 - 6m_3^2\gamma_1)^2 H_6(z).$$

Следствие. *Если $m_3 = 0$, то R_{1n} и R_{2n} не зависят от θ.*

1. *Zwanzig S. A.* A Third Order Asymptotic Comparsion of Least Squares, Jackkinifing and Cross-validation for Error Variance Estimation in Nonlinear Regression // Math. Operationforsch. und Statist. Ser. Statist.— 1985.— **16**.— P. 47—54.
2. *Schmidt W. H., Zwanzig S.* Second Order Asymptotics in Nonlinear Regression // J. Multivar. Anal.— 1986.— 18.— P. 187—215.
3. *Qumsiyeh M. B.* Edgeworth Expansion in Regression Modeles. // Theses Ph. D. dissertation, Indiana University and Bethlehem University.— 1988.— 20 p.
4. *Иванов А. В.* Асимптотическое разложение для распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной функции регрессии // Теория вероятностей и ее применения. — 1976.— **21**, № 3.— С. 571—583.
5. *Иванов А. В., Леоненко Н. Н.* Статистический анализ случайных полей.— Киев : Вища шк., 1986.— 216 с.
6. *Бардадым Т. А., Иванов А. В.* Асимптотические разложения, связанные с оценкой дисперсии ошибки наблюдения для модели «сигнал плюс шум» // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1985.— Вып. 33.— С. 11—20.
7. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
8. *Садикова С. М.* Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятностей и ее применения.— 1966.— 11, № 3.— С. 500—506.
9. *Юринский В. В.* Оценки для характеристических функций некоторых вырожденных многомерных распределений // Там же.— 1972.— 17, № 1.— С. 99—110.
10. *Bhattacharya R. N.* Refinements of the multidimentional central limit theorem and applications // Ann. Probab.— 1977.— 5.— P. 1—27.
11. *Pfonzage J.* Asymptotically optimum estimation and test procedures // Proc. Prague Symp. Asymptotic Stat.— 1973.— 1.— P. 201—272.
12. *Michel R.* An asymptotic expansion for the distribution of asymptotic maximum likehood estimators of vector parameters // J. Multivariat. Anal.— 1975.— 15.— P. 67—82.
13. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ.— М : Физматгиз, 1963.— 500 с.
14. *Bhattacharya R. N., Ghosh J. K.* On the validity of the formal Edgeworth expansion // Ann. Statist.— 1978.— 8, N 2.— P. 434—451.

Получено 15,11.90