УДК 517.919

В. С. КОРОЛЮК, акад. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев),
А. К. АЛЧЕКОВ, асп. (Киев. ун-т)

Устойчивость импульсного эргодического марковского воздействия

Устанавливается устойчивость импульсного воздействия в моменты восстановления эргодического марковского процесса при устойчивости усредненной динамической системы.

Встановлюється стійкість імпульсного впливу в моменти відновлення ергодичного марківського процесу в умовах стійкості усередненої динамічної системи.

Рассматривается линейная динамическая система с быстрым импульсным марковским воздействием, которое задается эволюционным дифференциальным уравнением в d-мерном евклидовом фазовом пространстве R^d

$$d\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)/dt = A\mathbf{X}^{\varepsilon}(t), \quad \mathbf{X}^{\varepsilon}(0) = \mathbf{X}^0 \tag{1}$$

с импульсным воздействием

$$\Delta\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)|_{t=\varepsilon\tau_n} := \mathbf{X}^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_n + 0) - \mathbf{X}^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_n) = \varepsilon B_{\eta_n}\mathbf{X}^{\varepsilon}(\varepsilon\tau_n) \tag{2}$$

в моменты восстановления $\tau_n := \sum_{k=1}^{n} \theta_k$, $n \geqslant 0$, $(\tau_0 = 0)$, процесса марковского восстановления $(\eta_n, \theta_n;\ n \geqslant 0)$ в дискретном фазовом пространстве состояний $\mathcal{G} = \{1, 2, 3, \dots, N\}$ с полумарковской матрицей [1, с. 103]

$$Q(t) := [Q_{ij}(t) = p_{ij}(1 - e^{-a_i t});\quad i, j = \overline{1, N}].$$

Так что процесс $\eta(t) := \eta_{\nu(t)}$, $\nu(t) := \max\{n;\ \tau_n \leqslant t\}$ — скачкообразный марковский процесс с производящим оператором (матрицей) $Q = a[P - I]$, где $a := (a_i\delta_{ij};\ i = \overline{1, N})$ — диагональная матрица интенсивностей времен пребывания в состояниях; $P := [p_{ij},\ i, j = \overline{1, N}]$ — матрица переходных вероятностей вложенной цепи Маркова $(\mathbf{X}_n;\ n \geqslant 0)$: $p_{ij} := P\{\eta_{n+1} = j/\eta_n = i\}$.

Предполагается эргодичность марковского процесса $(\eta(t);\ t > 0)$ со стационарным распределением $\mu = (\mu_i;\ i = \overline{1, N})$, которое определяется соотношениями $a_j\mu_j = \sum_{i=1}^{N} \mu_i a_i p_{ij}$, $j = \overline{1, N}$ или в векторной форме $a\mu = \mu Q_0$; $Q_0 := aP := [q_{ij} := a_i p_{ij};\ i, j = \overline{1, N}]$.

В дальнейшем будем использовать проектор Π, задаваемый стационарным распределением, который действует на вектор $\vec{\varphi} := (\varphi_i,\ i = \overline{1, N})$ по правилу $\Pi\vec{\varphi} := \sum_{i=1}^{N} \mu_i\varphi_i$, а также потенциал $R_0 := [r_{ij};\ i, j = \overline{1, N}]$ марковского процесса [2, с. 179], определяемый соотношениями

$$R_0 Q = Q R_0 = I - \Pi,\ \Pi R_0 = R_0 \Pi = 0.$$

Предполагается, что матрицы A и B_i коммутируют: $AB_i = B_i A$, $i = \overline{1, N}$, а также $B_i B_j = B_j B_i$. Тогда решение исходной задачи (1), (2) определяется полугруппой дифференциальной системы (1) и импульсной составляющей

$$\mathbf{X}^{\varepsilon}(t) := \prod_{n=1}^{\nu(t/\varepsilon)} [I + \varepsilon B_{\eta n}]\mathbf{X}^0, \quad \mathbf{X}^{\varepsilon}(0) = \mathbf{X}^0. \tag{3}$$

Целью настоящей работы является изучение устойчивости импульсной составляющей (3) при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Систематическое исследование динамических систем с импульсным воздействием в детерминированные моменты τ_n, $n \geqslant 1$, выполнено в Киевской школе нелинейной механики [3]. Мы будем использовать усредненную детерминированную эволюционную систему (см. теорему 2):

$$d\hat{\mathbf{X}}(t)/dt = \hat{B}\hat{\mathbf{X}}(t) \tag{4}$$

с матрицей

$$\hat{B} := \sum_{i=1}^{N} \mu_i a_i B_i. \tag{5}$$

Связь устойчивости исходной динамической системы с устойчивостью усредненной системы изучалась в работах [4, 5], для уравнений со случайным воздействием — в [6, 7].

Известно [8, с. 237], что устойчивость линейной системы (4) с постоянными коэффициентами можно выразить с помощью функции Ляпунова $\Lambda(x) := (\Lambda x, x)$ с положительно определенной матрицей Λ.

Теорема 1. *Пусть для усредненной детерминированной эволюционной системы* (4), (5) *существует функция Ляпунова* $\Lambda(x) = (\Lambda x, x)$ *с положительно определенной матрицей* Λ, *удовлетворяющая условию устойчивости решений системы* (4), (5):

$$(\Lambda x, \hat{B}x) \leqslant -b\Lambda(x), \quad b > 0. \tag{6}$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *имеет место асимптотическая устойчивость импульсной составляющей* (3).

Теорема 2. *Импульсная составляющая* (3) *задачи* (1), (2) *слабо сходится* к решению системы* (4) *с начальным условием* $\hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{X}^0$.

Доказательство теоремы 1 состоит из нескольких этапов:

1. Производящий оператор марковского процесса. Заметим, что импульсная составляющая $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$ вместе с переключающим марковским процессом $\eta^\varepsilon(t) := \eta(t/\varepsilon)$ образуют однородный марковский процесс. Прежде всего введем вектор-функции $\vec{\varphi}(x) := (\varphi_i(x);\ i = \overline{1, N})$ с нормой по дискретному аргументу $|\vec{\varphi}(x)| := \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\varphi_i(x)|$ и диагональную матрицу $B := (B_j \delta_{ij};\ i, j = \overline{1, N})$.

Лемма 1. *Для вектор-функции* $u^\varepsilon(x, t) := (u_i^\varepsilon(x, t),\ i = \overline{1, N})$ *средних значений*

$$u_i^\varepsilon(x, t) := E[\varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(x^\varepsilon(t)/x^\varepsilon(0)) = x/\eta^\varepsilon(0) = i] \tag{7}$$

имеет место уравнение марковского восстановления

$$u^\varepsilon(x, t) - a\int_0^{t/\varepsilon} e^{-a(t/\varepsilon - s)} ds P u^\varepsilon(x + \varepsilon Bx, \varepsilon s) = \vec{\varphi}(x) e^{-at/\varepsilon}. \tag{8}$$

Доказательство. Воспользуемся первым скачком марковского процесса $\eta^\varepsilon(t)$

$$u_i^\varepsilon(x, t) = E_{i,x}[\varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(\mathbf{X}^\varepsilon(t));\ \theta_i > t/\varepsilon] + E_{i,x}[\varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(\mathbf{X}^\varepsilon(t));\ \theta_i \leqslant t/\varepsilon]. \tag{9}$$

Для первого слагаемого в (9) имеем

$$E_{i,x}[\varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(\mathbf{X}^\varepsilon(t);\ \theta_i > t/\varepsilon] = \varphi_i(x) e^{-a_i t/\varepsilon}, \tag{10}$$

для второго с учетом импульсного воздействия в моменты восстановления и марковости

$$E_{i,x}[\varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(\mathbf{X}^\varepsilon(t));\ \theta_i \leqslant t/\varepsilon] = a_i \int_0^{t/\varepsilon} e^{-a_i s} ds \sum_{j=1}^{N} p_{ij} u_j^\varepsilon(x + \varepsilon B_i x,\ t - \varepsilon s). \tag{11}$$

* Слабая сходимость $\mathbf{X}^\varepsilon(t)$ к $\hat{\mathbf{X}}(t)$ означает сходимость $E_{x^0}\vec{\varphi}(\mathbf{X}^\varepsilon(t)) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \vec{\varphi}(\hat{\mathbf{X}}(t))$ для любой ограниченной функции $\vec{\varphi}(x)$, $x \in R^d$. Здесь E_{x^0} — операция условного математического ожидания при $\mathbf{X}^\varepsilon(0) = x^0$.

После замены переменной $s' = t/\varepsilon - s$ получим интегральный член в (8). Складывая слагаемые (10) и (11) и переходя к векторной записи, получаем (8).

Лемма 2. *Производящий оператор марковского процесса* $(\mathbf{X}^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t),\ t \geqslant 0)$ *задается соотношением*

$$L^\varepsilon \vec{\varphi}(x) := \varepsilon^{-1} a [P \vec{\varphi}(x + \varepsilon B x) - \vec{\varphi}(x)] \tag{12}$$

или в скалярном виде

$$L^\varepsilon \vec{\varphi}(x) := \varepsilon^{-1} \left(a_i \left[\sum_{j=1}^{N} p_{ij} \varphi_j (x + \varepsilon B_j x) - \varphi_i(x) \right];\ i = \overline{1, N} \right). \tag{12'}$$

Доказательство леммы получается дифференцированием по t уравнения марковского восстановления (8).

В соответствии с условием устойчивости марковского процесса [9, с. 189] или его компоненты [10, с. 323] требуется построить функцию Ляпунова, эксцессивную для производящего оператора L^ε. Введем оператор дифференцирования в силу усредненной системы (4):

$$\hat{\mathbf{B}} \vec{\varphi}(x) := (\hat{B} x,\ \mathrm{grad}\, \vec{\varphi}(x)) = \sum_{k, k'=1}^{d} \hat{b}_{k,k'} x_{k'} \partial \vec{\varphi}(x) / \partial x_{k'}. \tag{13}$$

По аналогии введем также операторы

$$\mathbf{B} \vec{\varphi}(x) := (\mathbf{B}_i \varphi_i(x);\ i = \overline{1, N}) = ((B_i x, \mathrm{grad}\, \varphi_i(x)|;\ i = \overline{1, N}). \tag{14}$$

В частности, имеем

$$\mathbf{B} \Lambda(x) = 2 ((\Lambda x,\ B_i x);\ i = \overline{1, N}) = 2 (\Lambda \mathbf{B} x, x). \tag{15}$$

2. Асимптотическое представление производящего оператора. Прежде всего выделим в L^ε производящий оператор Q марковского процесса $\eta(t)$, а также оператор $\mathbf{B}^0 := Q_0 \mathbf{B}$. При этом нам понадобится матричный диагональный оператор, действующий по непрерывному аргументу:

$$\mathbf{B}^\varepsilon \vec{\varphi}(x) := (\mathbf{B}_i^\varepsilon \varphi_i(x);\ i = \overline{1, N}), \tag{16}$$

$$\mathbf{B}_i^\varepsilon \vec{\varphi}(x) := \varepsilon^{-1} [\vec{\varphi}(x + \varepsilon B_i x) - \vec{\varphi}(x) - \varepsilon \mathbf{B}_i \vec{\varphi}(x)]. \tag{17}$$

Лемма 3. *Справедливо следующее асимптотическое представление производящего оператора*:

$$L^\varepsilon = \varepsilon^{-1} Q + \mathbf{B}^0 + Q_0 \mathbf{B}^\varepsilon. \tag{18}$$

Доказательство леммы следует из (12′) после элементарных преобразований с учетом обозначений (13)—(17).

3. Определим вектор-функцию Ляпунова импульсной составляющей $\vec{\varphi}^\varepsilon(x) := (\varphi_i^\varepsilon(x);\ i = \overline{1, N})$ соотношениями [11]

$$\vec{\varphi}^\varepsilon(x) = \Lambda(x) + \varepsilon \vec{\varphi}(x), \tag{19}$$

$$Q \vec{\varphi}(x) = (\vec{B} - \mathbf{B}^0) \Lambda(x). \tag{20}$$

Компоненты вектор-функции $\vec{\Psi}(x) := (\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^0) \Lambda(x)$ определяются соотношениями

$$\Psi_i(x) := \left(\hat{B} - a_i \sum_{j=1}^{N} p_{ij} B_j \right) \Lambda(x). \tag{21}$$

Корректность задания функции $\vec{\varphi}^\varepsilon(x)$ следует из того, что выполнено условие разрешимости уравнения (20) с учетом (5): $\sum_{i=1}^{N} \mu_i \Psi_i(x) \equiv 0$.

Лемма 4. *Значение производящего оператора L^{ε} на вектор-функции $\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)$ определяется соотношениями*

$$L^{\varepsilon}\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}\Lambda(x) - \varepsilon[\mathbf{B}^0 R_0 \mathbf{B}^0 \Lambda(x) - Q_0 \Lambda(\mathbf{B}x)] + \varepsilon^2 Q_0(\Lambda \mathbf{B} R_0 \mathbf{B}^0 x, \mathbf{B}x). \qquad (22)$$

Доказательство. В соответствии с (18) — (21) вычислим

$$\varepsilon^{-1} Q\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x) + \mathbf{B}^0 \vec{\varphi}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-1} Q\Lambda(x) + Q\vec{\varphi}(x) +$$
$$+ \mathbf{B}^0 \Lambda(x) + \varepsilon \mathbf{B}^0 \vec{\varphi}(x) = \hat{\mathbf{B}}\Lambda(x) + \varepsilon \mathbf{B}^0 \vec{\varphi}(x). \qquad (23)$$

Так что с учетом (18) и (19) имеем

$$L^{\varepsilon}\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x) = \hat{\mathbf{B}}\Lambda(x) + \varepsilon \mathbf{B}^0 \vec{\varphi}(x) + Q_0 \mathbf{B}^{\varepsilon}\Lambda(x) + \varepsilon Q_0 \mathbf{B}^{\varepsilon}\vec{\varphi}(x). \qquad (24)$$

Представим решение уравнения (20), (21) через потенциал R_0 марковского процесса $\eta(t)$ [13] в виде

$$\vec{\varphi}(x) = -R_0 \mathbf{B}^0 \Lambda(x). \qquad (25)$$

Из определения функции Ляпунова усредненной системы $\Lambda(x)$ и задания оператора $\mathbf{B}^{\varepsilon}$ (17) следует

$$\mathbf{B}^{\varepsilon}\Lambda(x) = \varepsilon\Lambda(\mathbf{B}x). \qquad (26)$$

Для вычисления последнего слагаемого в (24) с учетом (15) — (17) и (25) определим

$$\vec{\varphi}(x + \varepsilon\mathbf{B}x) = -2(\Lambda R_0 \mathbf{B}^0 x + \varepsilon \mathbf{B}\Lambda R_0 \mathbf{B}^0 x,\ x + \varepsilon\mathbf{B}x) =$$
$$= \vec{\varphi}(x) + \varepsilon\mathbf{B}\vec{\varphi}(x) + \varepsilon^2(\Lambda\mathbf{B}R_0\mathbf{B}^0 x,\ \mathbf{B}x). \qquad (27)$$

Так что последнее слагаемое в (22) получаем с учетом (17) и (27).

4. Асимптотическая устойчивость импульсной составляющей. Введем мартингал [9, с. 186] с нулевым математическим ожиданием

$$M^{\varepsilon}(t) := \varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(t)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)) - \varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(0)}(x) - \int_0^t L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(s)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))\,ds. \qquad (28)$$

Применяя лемму 4, имеем

$$M^{\varepsilon}(t) = \varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(t)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)) - \varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(0)}(x) -$$
$$-\int_0^t \{\hat{\mathbf{B}}\Lambda(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s)) - \varepsilon[\mathbf{B}^0 R_0 \mathbf{B}^0 \Lambda(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s)) - Q_0\Lambda(\mathbf{B}\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))] +$$
$$+ \varepsilon^2 Q_0(\Lambda\mathbf{B}R_0\mathbf{B}^0\mathbf{X}^{\varepsilon}(s),\ \mathbf{B}\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))\}\,ds. \qquad (29)$$

Конечность элементов матриц Q_0, $\mathbf{B}$, R_0, $\mathbf{B}^0$ обеспечивает выполнение следующих неравенств для нормы вектор-функции слагаемых в (29):

$$|\mathbf{B}^0 R_0 \mathbf{B}^0 \Lambda(x)| \leqslant b_0 \Lambda(x),$$
$$|Q_0[\Lambda(\mathbf{B}x) + \varepsilon(\Lambda\mathbf{B}R_0\mathbf{B}^0 x,\ \mathbf{B}x)]| \leqslant b_1\Lambda(x). \qquad (30)$$

Теперь, используя условие (6) теоремы, получаем неравенство

$$M^{\varepsilon}(t) \geqslant \varphi^{\varepsilon}_{\eta\varepsilon(t)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)) - \varphi^{\varepsilon}_{\eta\varepsilon(0)}(x) + \int_0^t (b - \varepsilon(b_0 + b_1))\Lambda(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))\,ds. \qquad (31)$$

С учетом представления (19) имеем

$$\Lambda(\mathbf{X}^{\varepsilon}(t)) \leqslant \Lambda(x) + M^{\varepsilon}(t) - \int_0^t (b - \varepsilon(b_0 + b_1))\Lambda(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))\,ds +$$
$$+ \varepsilon(\varphi_{\eta^{\varepsilon}(0)}(x) - \varphi_{\eta^{\varepsilon}(t)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(t))). \qquad (32)$$

Заметим, что с учетом представления (25)

$$E_\mu \varphi_{\eta^\varepsilon(t)}(x) = E_\mu \varphi_{\eta^\varepsilon(0)}(x) = 0, \tag{33}$$

а при достаточно малом ε подынтегральное выражение в (32) положительно. Поэтому, переходя в (32) к математическому ожиданию, получаем ключевое неравенство

$$E_\mu \Lambda(\mathbf{X}^\varepsilon(t)) \leqslant \Lambda(x). \tag{34}$$

Следовательно, $\Lambda(\mathbf{X}^\varepsilon(t))$, $t \geqslant 0$, — неотрицательный супермартингал, для которого выполняется неравенство [10, с. 206]

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} \Lambda(\mathbf{X}^\varepsilon(t)) \geqslant \Lambda\} \leqslant \Lambda(x)/\Lambda. \tag{35}$$

Из последнего неравенства и свойств функции Ляпунова $\Lambda(x)$ следует неравенство

$$P\{\sup_{t\geqslant 0} \|\mathbf{X}^\varepsilon(t)\| > \delta\} \leqslant P\{\sup_{t\geqslant 0} \Lambda(\mathbf{X}^\varepsilon(t)) > \Lambda_\delta\} \leqslant \Lambda(x)/\Lambda_\delta$$

для $\Lambda_\delta := \inf_{\|X\|_\delta} \Lambda(x)$. Так как при любом фиксированном $\delta > 0$ и сколь угодно малом $\lambda > 0$ существует такое $\Delta > 0$, что при $\|x\| < \Delta$ выполняется неравенство $\Lambda(x)/\Lambda_\delta < \lambda$, то оценка (35) переходит в неравенство

$$\sup_{\|x\|\leqslant\Delta} P\{\sup_{t\geqslant 0} \|\mathbf{X}^\varepsilon(t)\| > \delta\} < \lambda,$$

что означает устойчивость импульсной составляющей.

5. Для доказательства теоремы 2 рассмотрим мартингал (28) для функций $\vec{\varphi}^\varepsilon(x) := \varphi_0(x) + \varepsilon\vec{\varphi}(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемой функцией $\varphi_0(x)$ и вектор-функцией $\vec{\varphi}(x)$, которая определяется уравнением

$$Q\vec{\varphi}(x) = (\vec{\mathbf{B}} - \mathbf{B}^0)\varphi_0(x). \tag{36}$$

Введем обозначение

$$\mathbf{B}_0^\varepsilon \varphi_0(x) := \varepsilon^{-1}[\varphi_0(x + \varepsilon\mathbf{B}x) - \varphi_0(x)], \tag{37}$$

а также $\|\vec{\varphi}(x)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} \|\varphi_i(x)\|$.

Лемма 5. *Значение производящего оператора L^ε на вектор-функции $\varphi^\varepsilon(x)$, задаваемой соотношениями* (36), *имеет вид*

$$L^\varepsilon\vec{\varphi}^\varepsilon(x) = \hat{\mathbf{B}}\varphi_0(x) + Q_0[\mathbf{B}^\varepsilon\varphi_0(x) + \varepsilon\mathbf{B}_0^\varepsilon\vec{\varphi}(x)]. \tag{38}$$

При этом для второго слагаемого в (38) *справедлива оценка*

$$\|Q_0\mathbf{B}^\varepsilon\varphi_0(x) + \varepsilon\mathbf{B}_0^\varepsilon\vec{\varphi}^\varepsilon(x)\| \leqslant \varepsilon C\|\varphi_0''(x)\|.$$

Доказательство. Учитывая, что $L^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + Q_0\mathbf{B}_0^\varepsilon$, имеем

$$L^\varepsilon\vec{\varphi}^\varepsilon(x) = (\varepsilon^{-1}Q + Q_0\mathbf{B}_0^\varepsilon)(\varphi_0(x) + \varepsilon\vec{\varphi}(x)) = \varepsilon^{-1}Q\varphi_0(x) +$$
$$+ Q_0\mathbf{B}_0^\varepsilon\varphi_0(x) + Q\vec{\varphi}(x) + \varepsilon Q_0\mathbf{B}_0^\varepsilon\vec{\varphi}(x).$$

С учетом (38) имеем

$$L^\varepsilon\vec{\varphi}^\varepsilon(x) = \hat{\mathbf{B}}\varphi_0(x) + Q_0[\mathbf{B}^\varepsilon\varphi_0(x) + \varepsilon\mathbf{B}_0^\varepsilon\vec{\varphi}(x)].$$

Теперь из определения операторов $\mathbf{B}^\varepsilon$ в (16), (17) с учетом (25) и $\mathbf{B}_0^\varepsilon$ в (37) следуют оценки

$$\|Q_0\mathbf{B}^\varepsilon\varphi_0(x)\| \leqslant \varepsilon C_1\|\varphi_0''(x)\|,$$
$$\|\varepsilon\mathbf{B}_0^\varepsilon\vec{\varphi}(x)\| \leqslant \varepsilon C_2\|\varphi_0''(x)\|, \tag{39}$$

из которых вытекает утверждение леммы (5).

Лемма 6. *Квадратическая характеристика мартингала* (28) *допускает оценку* $|\langle M_t^{\varepsilon}\rangle| \leqslant \varepsilon Ct$ *с константой* C, *не зависящей от* ε.

Доказательство. Квадратическая характеристика мартингала (28) имеет вид [12, с. 19]

$$\langle M_t^{\varepsilon} \rangle := \int_0^t [L^{\varepsilon} (\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x))^2 - 2\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)\, L^{\varepsilon}\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)]\, ds. \tag{40}$$

Вычислим первый член подынтегрального выражения с учетом оценок (39):

$$L^{\varepsilon} [\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)]^2 = [\varepsilon^{-1} Q + Q\mathbf{B}_0^{\varepsilon}]\, [\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)]^2 = 2\varphi_0(x)\, Q\vec{\varphi}(x) + Q_0\mathbf{B}_0^{\varepsilon}\varphi_0^2(x) + O(\varepsilon).$$

Далее с учетом (36) и (37), а также (17) имеем

$$L^{\varepsilon} [\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)]^2 = 2\varphi_0(x)\, \widehat{\mathbf{B}}\varphi_0(x) - 2\varphi_0(x)\, \mathbf{B}^0\varphi_0(x) + \mathbf{B}^0\varphi_0^2(x) + Q_0\mathbf{B}^{\varepsilon}\varphi_0^2(x).$$

Так как $\mathbf{B}^0\varphi_0^2(x) = 2\varphi_0(x)\, \mathbf{B}^0\varphi_0(x)$, то окончательно с учетом оценок (39) получаем

$$L^{\varepsilon} [\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)]^2 = 2\varphi_0(x)\, \widehat{\mathbf{B}}\varphi_0(x) + O(\varepsilon). \tag{41}$$

Затем с учетом (36) — (39) имеем

$$2\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x)\, L^{\varepsilon}\vec{\varphi}^{\varepsilon}(x) = 2\varphi_0(x)\, [Q_0\mathbf{B}_0^{\varepsilon}\varphi_0(x) + Q\vec{\varphi}(x) + Q_0\mathbf{B}_0^{\varepsilon}\vec{\varphi}(x)] =$$

$$= 2\varphi_0(x)\, \widehat{\mathbf{B}}\varphi_0(x) + O(\varepsilon).$$

В итоге подынтегральное выражение в (40) имеет порядок $O(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Из леммы 6 следует сходимость мартингала (28) к нулю при $\varepsilon \to 0$, а из леммы 5 — сходимость интеграла

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^t L^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}_{\eta^{\varepsilon}(s)}(\mathbf{X}^{\varepsilon}(s))\, ds = \int_0^t \widehat{\mathbf{B}}\varphi_0(\widehat{\mathbf{X}}(s))\, ds,$$

откуда вытекает утверждение теоремы 2.

1. *Королюк В. С.* Стохастические модели систем.— Киев : Наук. думка, 1989.— 208 с.
2. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин.— М. : Наука, 1985.— 640 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
4. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 175 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Математические проблемы нелинейной механики.— Киев : Вища шк., 1987.— 72 с.
6. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига : Зинатне, 1989.— 421 с.
7. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 6.— С. 16—19.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967. — 472 с.
9. *Скороход А. В.* Асимптотические методы по теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1987.— 328 с.
10. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М. : Наука, 1969.— 368 с.
11. *Blankanship G., Papanicolaou G. C.* Stability and Control of stochastic systems with wide — band noise. Disurbances // SIAM J. Appl. Math.— 1978.— 34, N 3.— P. 437—476.
12. *Скороход А. В.* Стохастические уравнения для сложных систем.— М. : Наука, 1983.— 192 с.
13. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Полумарковские процессы и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1976.— 182 с.

Получено 13.12.90