УДК 517.93

Е. В. ВОСКРЕСЕНСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Мордов. ун-т, Саранск)

Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений

Получена асимптотическая формула для решения нелинейных дифференциальных уравнений.

Знайдена асимптотична формула розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$u^{(n)} = f(t, u), \tag{1}$$

где $f \in C(D, R^1)$, $D = [T, +\infty) \times R^1$, $T \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. Выясним, при каких условиях существуют решения уравнения (1), имеющие при $t \to +\infty$ вид

$$u(t) = a_0 t^{n-1} + \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1} + o(1). \tag{2}$$

Эта задача при $n = 2$, $a_0 \neq 0$ решалась в статье [1]. В настоящей работе эта задача решается при произвольном натуральном n и произвольном наборе чисел $(a_0, \ldots, a_{n-1})$.

Теорема 1. *Пусть*

$$|f(t, u)| \leqslant \lambda\left(t, \frac{|u|}{t^{n-1}}\right), \quad t \geqslant T, \quad u \in R^1,$$

где а) $\lambda \in C(D_1, R^1_+)$, $D_1 = [1, +\infty) \times R^1_+$, $R^1_+ = [0, +\infty)$, $\lambda(t, \alpha_1) \leqslant \lambda(t, \alpha_2)$ *при* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ *и* $\forall t \geqslant T$;

в) $\int\limits_t^{+\infty} \int\limits_{s_1}^{+\infty} \ldots \int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty} \lambda(s_n, \alpha)\, ds_1 \ldots ds_n = o(1)$ *при* $t \to +\infty$ *и* $\forall \alpha \in R^1_+$.

Тогда уравнение (1) *имеет решения вида* (2).

Доказательство. На множестве $T \leqslant t_0 \leqslant t < +\infty$ имеем уравнение

$$u(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s, u(s))\, ds. \tag{3}$$

Тогда из (3) получим

$$\frac{|u(t)|}{t^{n-1}} \leqslant c + c_0 \int\limits_{t_0}^{t} \lambda\left(s, \frac{|u(s)|}{s^{n-1}}\right) ds,$$

где $c, c_0 \geqslant 0$, и на основании теоремы 1.1 из работы [2] будем иметь

$$|u(t)| \leqslant c_1 t^{n-1}, \quad t \geqslant t_0. \tag{4}$$

Здесь $u(t_0) = u_0$, $u'(t_0) = u_0'$, …, $u^{(n-1)}(t_0) = u_0^{(n-1)}$, t_0 — достаточно большое число, зависящее от чисел $u_0, \ldots, u_0^{(n-1)}$. Так как

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{t_0}^{t}(t-s)^{n-1}f(s, u(s))\,ds = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s_1}\ldots\int\limits_{t_0}^{s_{n-1}} f(s_n, u(s_n))\,ds_1\ldots ds_n,$$

то из равенства (3), неравенства (4) и условия в) получим

$$u(t) = b_0t^{n-1} + b_1t^{n-2} + \ldots + b_{n-2}t + b_{n-1} + o(1)$$

при $t \to +\infty$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если при условиях теоремы* 1 *уравнение*

$$dz/dt = c_0\lambda(t, z) \tag{5}$$

при любом $c_0 \geqslant 0$ *на множестве* $D_2 = \{z : 0 \leqslant z \leqslant k,\ t \geqslant T > 1\}$, *где* k — *произвольное фиксированное число, имеет лишь равномерно ограниченные решения, то при достаточно большом* T *все решения* $u(t)$, $u(t_0) = u_0$, $u'(t_0) = u_0'$, ..., $u^{(n-1)}(t_0) = u_0^{(n-1)}$ *уравнения* (1) *имеют вид* (2).

Доказательство. На основании теоремы сравнения из работы [3, с. 261] и равномерной ограниченности решений уравнения (5) неравенство (4) справедливо при достаточно большом T и произвольных, но достаточно малых $u_0, u_0', \ldots, u_0^{(n-1)}$. Поэтому оценка (4) равномерна относительно t_0. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Замечание 1. Равномерную ограниченность решений уравнения (5) можно обеспечить, например, потребовав выполнимость условий теоремы 1 из работы [4]: пусть

$$\mathcal{J}(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty}\lambda(t, \alpha)\,dt, \quad \int\limits_{\beta}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}(\alpha)} = +\infty, \quad \beta \geqslant 0,$$

функция $\mathcal{J}(\alpha)$ интегрируема на любом компакте из $[\beta, +\infty)$ $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{\beta}^{t}\frac{\lambda(s, \alpha)}{\mathcal{J}(\alpha)}\,ds = 1$ равномерно по $\alpha \in R_+^1$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и функция*

$$\mathcal{J}_j(\alpha) = \int\limits_{1}^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{j-1}}^{+\infty}\lambda(s_j, \alpha)\,ds_1\ldots ds_j \tag{6}$$

существует и интегрируема на любом компакте из $[\beta, +\infty)$ *при всех* $j = \overline{1, n}$ *и всех* $\alpha \geqslant 0$. *Кроме того,*

$$\int\limits_{\beta}^{+\infty}\frac{d\alpha}{\mathcal{J}_j(\alpha)} = +\infty \quad \forall j = \overline{1, n} \tag{7}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_{1}^{t}\frac{\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{j-1}}^{+\infty}\lambda(s_j, \alpha)\,ds_1\ldots ds_j}{\mathcal{J}_j(\alpha)} = 1 \tag{8}$$

равномерно по α *при всех* $j = \overline{1, n}$. *Тогда для любого набора действительных чисел* $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ *существует решение* $u(t)$ *уравнения* (1) *такое, что* $u(t) = a_0t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + o(1)$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим при $t_0 \geqslant T$ семейство решений $u(t)$ уравнения (1) такое, что

$$u(t) = a_0t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} + (-1)^{n+1}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty} f(s_n, u(s_n))\,ds_1\ldots ds_n.$$

Тогда семейство $\{V(t)\} = \{u(t) - a_0 t^{n-1} - \ldots - a_{n-1}\}$ равномерно ограничено. Действительно, для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{+\infty}\lambda(s_{n-1},\ z(s_{n-1}))\,ds_1\ldots ds_{n-1} \tag{9}$$

на основании условий (6)—(8) выполняются все условия теоремы 1 из работы [4]. Отсюда следует равномерная ограниченность семейства. Так как при любых $\bar{t}$, $\bar{\bar{t}} \geqslant 1$

$$|V(\bar{t}) - V(\bar{\bar{t}})| \leqslant \left|\int\limits_{\bar{t}}^{\bar{\bar{t}}}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty}\lambda(s_n,\ c)\,ds_1\ldots ds_n\right|,$$

то это семейство равностепенно непрерывно. Отсюда следует, что семейство $\{V(t)\}$ компактно. Поэтому существует последовательность $\{t_0^n\}$ такая, что соответствующая последовательность функций сходится к функции $u(t)$ равномерно на каждом компакте и

$$|u(t) - a_0 t^{n-1} - \ldots - a_{n-1}| \leqslant \int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty}\lambda(s_n,\ c)\,ds_1\ldots ds_n.$$

Отсюда следует доказательство теоремы.

Следствие. *При условиях теоремы* 3 *уравнение* (1) *имеет равномерно ограниченные решения с начальными данными:*

$$u(t_0) = u_0,$$

$$u'(t_0) = (-1)^{n+1}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{+\infty} f(s_{n-1},\ u(s_{n-1}))\,ds_1\ldots ds_{n-1}, \ldots,$$

$$u^{(n-1)}(t_0) = -\int\limits_{t_0}^{+\infty} f(s,\ u(s))\,ds,$$

где $u(t)$ — *решение уравнения*

$$\frac{du}{dt} = (-1)^{n+1}\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-2}}^{+\infty} f(s_{n-1},\ u(s_{n-1}))\,ds_1\ldots ds_{n-1},$$

удовлетворяющее условию $u(t_0) = u_0$.

Справедливость следствия вытекает из теоремы 3 и теоремы 1 работы [4].

Замечание 2. Если $n = 1$, то теорема 3 перейдет в теорему о существовании асимптотического равновесия [4].

1. *Tong J*. The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order // Proc. Amer. Math. Soc.— 1982.— **84**, N 2.— P. 235—236.
2. *Воскресенский Е. В*. Асимптотическая эквивалентность систем дифференциальных уравнений с линейным автономным первым приближением // Comment. math. Univ. carol.— 1983.— **26**, N 1.— P. 31—50.
3. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М*. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.— М.: Мир, 1980.— 300 с.
4. *Воскресенский Е. В*. О задаче Чезари // Дифференц. уравнения.— 1989.— **25**, № 9.— С. 1980—1985.

Получено 05.04.90