УДК 517.9

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН УССР,
Н. А. ПЕРЕСТЮК, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т),
С. И. ТРОФИМЧУК, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Обобщенные решения импульсных систем и явление биений

Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в нефиксированные моменты времени вводится понятие обобщенного решения. На его основе предложена классификация импульсных систем и указаны условия, достаточные для принадлежности импульсной системы к тому или иному классу.

Для систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу вводиться поняття узагальненого розв'язку. На його основі запропонована класифікація імпульсних систем і вказані умови, достатні для належності імпульсної системи до того чи іншого класу.

В настоящей работе исследуются импульсные системы

$$dx/dt = f(t, x), \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t(x)} = h(x); \ (t, x) \in W = (a, b) \times \Omega, \tag{2}$$

в предположении существования решений, многократно пересекающих поверхность „толчков" $\Gamma = \{(t, x) \in W : t = t(x)\}$. В дальнейшем полагаем, что Ω — область в R^n; $f(t, x) \in C(W, R^n)$, $h(x) \in C(\Omega, R^n)$; для уравнения (1) при любых $(t_0, x_0) \in W$ решение $x(t, t_0; x_0)$ задачи Коши

$$x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

существует и единственно; $H(x) \overset{\text{def}}{=} x + h(x)$, $W^{\pm 1} = \{(t, x) \in W : \pm t > \pm t(x)\}$.

Определение. *Непрерывная слева функция* $\bar{x}(t) : [t_0, t_\omega) \to \Omega$ *называется обобщенным решением задачи Коши* (3) *для импульсной системы* (1), (2), *если она удовлетворяет соотношениям*

$$d\bar{x}(t)/dt = f(t, \bar{x}(t)), \ t \neq t(\bar{x}(t)),$$

$$\Delta\bar{x} = \bar{x}(t^* + 0) - \bar{x}(t^*) = h(\bar{x}(t^*)) \ \textit{при} \ t^* = t(\bar{x}(t^*)).$$

Множество обобщенных решений (в дальнейшем сокращенно — решений) включает в себя множество кусочно-непрерывных решений и позволяет полнее исследовать случай счетного пересечения интегральной кривой системы (1), (2) с Г. Впредь решения системы (1)—(3) будем обозначать $\bar{x}(t) = \bar{x}(t, t_0, x_0)$ в отличие от обозначения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, принятого для решения уравнения (1).

Понятно, что если точка $W_0 = (t_0, x_0) \in W \setminus \Gamma$ или $(t_0, x_0) \in \Gamma$, но $(t_0, H(x_0)) \in W \setminus \Gamma$, то через W_0 можно провести при $t \geqslant t_0$ ровно одну интегральную кривую. Если же $(t_0, x_0) \in \Gamma$ и $(t_0, H(x_0)) \in \Gamma$, это не всегда возможно: нужно, чтобы для некоторого $\varepsilon > 0$ $(t, x(t)) \cap \Gamma = \varnothing\ \forall t \in (t_0, t_0 + \varepsilon]$; это требование всюду в дальнейшем полагаем выполненным (подробнее см. [1]).

Определение. *Система* (1), (2) *называется конечноударной, если каждая ее интегральная кривая* φ *конечное число раз* $k(\varphi)$ *пересечет* Г. *Те конечноударные системы, для которых* $\sup_{\varphi} k(\varphi) = n \in N$, *назовем* n*-ударными, если же* $\sup_{\varphi} k(\varphi) = +\infty$, *то импульсную систему будем называть условно конечноударной. Все остальные системы отнесем к классу бесконечноударных.* 1*-ударные системы — в точности те импульсные системы, в которых нет «бьющихся» о* Г *решений.*

Пример. Импульсная система

$$dx/dt = x,\ \Delta x|_{\Gamma} = -x - \sqrt[3]{x|x|},\ t(x) = -x^2,\ W = R^2$$

бесконечноударна, причем если $\exp(-t_0 + 1) < |x_0| < \sqrt{-t_0}$, то максимальный интервал существования задачи (3) конечен: $(t_0, -1)$, интегральная кривая $\bar{x}(t, t_0, x_0)$ бесконечное число раз пересекает Г и предел $\lim\limits_{t \to -1-0} \bar{x}(t)$ не существует.

Установим некоторые свойства собственно обобщенных решений и их связь с характеристиками импульсной системы (1), (2). Через $H^n(x)$ обозначим композицию отображений $H \times \ldots \times H(x)$ (n раз) и положим $D^\infty = \{x \in \Omega : H^n(x) \in \Omega\ \ \forall n \geqslant 0\}$. Естественным образом в полудинамической системе (H, D^∞) можно ввести понятие инвариантного множества Q: $H(Q) \subseteq Q$, полутраекторий $\gamma_\pm(z) = \{H^n(z) : \pm n \geqslant 0\}$ и траектории $\gamma(z) = \gamma_+(z) \cup \gamma_-(z)$ (естественно, если существует $\gamma_-(z)$). Траектория $\gamma(z) = z$ называется тривиальной.

Теорема 1. *Пусть* $\bar{x}(t) : [t_0, t_\omega) \to \Omega$ *— ограниченное решение системы* (1), (2): $\|\bar{x}(t)\| \leqslant M$, $t_\omega < b$. *Если область* Ω *имеет непустую границу* $\partial\Omega$, *предположим, что* $\inf\limits_{t} \rho(\bar{x}(t), \partial\Omega) > 0$. *Тогда:* А) *если предел* $\lim\limits_{t \to t_\omega - 0} \bar{x}(t)$ *не существует, то интегральная кривая* $(t, \bar{x}(t))$ *на* $(t_\omega - \varepsilon, t_\omega)$ *счетное число раз пересекает* Г *и множество* $B = \{x \in \Omega;\ t(x) = t_\omega\}$ *содержит инвариантное подмножество* Λ *полудинамической системы* (H, D^∞), *отличное от точки покоя: а именно, либо* Λ *содержит нетривиальную траекторию, либо* Λ *— компактное связное множество точек покоя* (H, D^∞); *множество* Λ *можно выбрать состоящим из всех частичных пределов функции* $\bar{x}(t)$ *при* $t \to t_\omega - 0$ *и сужение* (H, Λ) *в этом случае уже является динамической системой* $(\forall x \in \Lambda \ \exists H^{-1}(x))$; Б) *если интегральная кривая* $(t, \bar{x}(t))$ *при* $t \to t_\omega - 0$ *счетное число раз пересекает* Г *и существует предел* $\lim\limits_{t \to t_\omega - 0} \bar{x}(t) = c$, *то* $h(c) = 0$.

Доказательство. Предположим, что интегральная кривая $(t, \bar{x}(t))$ на любом интервале $(t_\omega - \varepsilon, t_\omega)\ \forall \varepsilon > 0$ бесконечное число раз пересекает Г. Через Λ обозначим множество всех частичных пределов функции $\bar{x}(t)$ при $t \to t_\omega - 0$. Несложно проверяется, что Λ компактно и $\Lambda \subset \subset \Omega$. Докажем, что $H(\Lambda) \subseteq \Lambda$. Допустим от противного, что при некотором $y \in \Lambda$ будет $H(y) \notin \Lambda$. Выберем сначала такую малую ε-окрестность $U_\varepsilon(H(y))$ точки $H(y)$, что $U_\varepsilon(H(y)) \cap \Lambda = \varnothing$, и затем такую δ-окрестность $U_\delta(y)$ точки y, что $H(U_\delta(y)) \subset U_{\varepsilon/4}(H(y))$. Пусть подпоследовательность множества моментов «толчков» $\{t_j\}$ такова, что $\bar{x}(t_j) \to y$ при $j \to +\infty$. Выберем j_0 настолько большим, что при $j \geqslant j_0$ $\bar{x}(t_j) \in U_\delta(y)$ и $m(t_\omega - t_j) < \varepsilon/4$, где $m = \sup\limits_{\substack{\|x\| \leqslant M \\ t \in (t_0, t_\omega)}} \|f(t, x)\|$. Обозначим через s_j последующий за t_j момент попадания нитегральной кривой $(t, \bar{x}(t))$ на Г. Так как

$$\bar{x}(s_j) = H(\bar{x}(t_j)) + \int\limits_{t_j}^{s_j} f(s, \bar{x}(s))\, ds,$$

то при $j \geqslant j_0$

$$\|\bar{x}(s_j) - H(y)\| \leqslant \|H(y) - H(\bar{x}(t_j))\| + m(s_j - t_j) < \varepsilon/2.$$

Таким образом, $\bar{x}(s_j) \in U_{\varepsilon/2}(H(y))$ $\forall j \geqslant j_0$ и поэтому множество $U_\varepsilon(H(y))$ должно содержать частичный предел функции $\bar{x}(t)$ при $t \to t_\omega - 0$, что противоречит предположению $U_\varepsilon(H(y)) \cap \Lambda = \varnothing$. Итак, $H(\Lambda) \subseteq \Lambda$ и если существует предел $\lim\limits_{t \to t_\omega} \bar{x}(t) = c$, то $\Lambda = \{c\}$ и из инвариантности Λ следует $h(c) = 0$, что доказывает часть Б теоремы.

Если же предел $\lim\limits_{t \to t_\omega - 0} \bar{x}(t)$ не существует, то множество Λ содержит более одной точки. Предположим, что оно не содержит нетривиальных полутраекторий, т. е. $h(\Lambda) = 0$. Докажем, что множество Λ связно. Если это не так, то существует разложение этого множества на два непустых замкнутых непересекающихся подмножества Λ_1, Λ_2 таких, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $\bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1) \cap \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_2) = \varnothing$. При этом ε можно выбрать настолько малым, что

$$\sup\nolimits_{x \in \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1)} \|h(x)\| < \rho(\bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1), \quad \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_2))/4 \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\rho}/4.$$

Пусть $t_* < t_\omega$ — такое число, что $(t_\omega - t_*) m < \bar{\rho}/4$, и если интегральная кривая $(t, \bar{x}(t))$ пересекается с гиперповерхностью «толчков» в момент $t_j > t_*$, то $\bar{x}(t_j) \in U_\varepsilon(\Lambda_1) \cup U_\varepsilon(\Lambda_2)$. Если при некотором $t_j > t_*$ будет $\bar{x}(t_j) \in \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1)$, то

$$\bar{x}(t_{j+1}) = H(\bar{x}(t_j)) + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, \bar{x}(s))\, ds,$$

$$\|\bar{x}(t_{j+1}) - \bar{x}(t_j)\| \leqslant \|h(\bar{x}(t_j))\| + m(t_{j+1} - t_j) \leqslant \bar{\rho}/2,$$

и так как $\rho(\bar{x}(t_{j+1}), \bar{U}_\varepsilon(\Lambda)) \geqslant \bar{\rho} - \bar{\rho}/2 > 0$, то $x(t_{j+1}) \in \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1)$ и поэтому согласно принципу трансфинитной индукции $\forall t_s > t_j \bar{x}(t_s) \in \bar{U}_\varepsilon(\Lambda_1)$. Но тогда $\Lambda_2 = \varnothing$, что противоречит предположению.

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что для каждой точки $y \in \Lambda$ существует точка $\bar{x} \in \Lambda$ такая, что $H(\bar{x}) = y$. Действительно, так как $y \in \Lambda$, то найдется возрастающая последовательность $\{t_n\}$ моментов «толчков» такая, что $t_n \to t_\omega$, $\bar{x}(t_n) \to y$, $n \to \infty$. Предположим вначале, что у $\{t_n\}$ есть такая подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$, что для каждого t_{n_k} есть строго предшествующий ему момент p_{n_k} попадания $(t, \bar{x}(t))$ на Г. Для последовательности $\bar{x}(p_{n_k})$ обозначим через $\bar{x}$ один из частичных пределов: $\bar{x} = \lim\limits_{j \to +\infty} \bar{x}(\bar{p}_j)$, $\bar{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} p_{n_{k_j}}$, $\bar{t}_j \stackrel{\text{def}}{=} t_{n_{k_j}}$. Но тогда

$$H(\bar{x}) = \lim_{j \to +\infty} H(\bar{x}(\bar{p}_j)) = \lim_{j \to +\infty} \left\{\bar{x}(\bar{t}_j) - \int\limits_{\bar{p}_j}^{\bar{t}_j} f(s, \bar{x}(s))\, ds\right\} = \lim_{j \to +\infty} \bar{x}(\bar{t}_j) = y.$$

Если же предположение о существовании подпоследовательности $\{t_{n_k}\}$ со свойством «преследования» не справедливо, то каждая точка t_n является пределом возрастающей последовательности моментов «толчков» кривой $(t, \bar{x}(t))$ о Γ, выполнены условия части Б теоремы в каждой предельной точке t_n и поэтому $h(x(t_n)) = 0 \;\forall n$. Но тогда и $h(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(x(t_n)) = 0$, $H(y) = y$. Теорема 1 доказана.

В приведенном выше примере $H(x) = \sqrt[3]{-x|x|}$ и $\Lambda = \{-1; 1\}$ состоит из точек 2-периодической траектории.

Следующая теорема показывает, что условно конечноударные системы в определенном смысле можно считать двойственными к бесконечноударным.

Теорема 2. *Предположим, что импульсная система* (1), (2) *условно конечноударна на множестве определения* $[a, b] \times \bar{\Omega}$. *Тогда, если область* Ω *ограничена, то при некотором* $\hat{t} \in [a, b]$ *множество* $S(\hat{t}) = \{x \in \bar{\Omega},\ t(x) = \hat{t}\}$ *содержит инвариантное относительно полудинамической системы* (H, D^∞) *подмножество* M.

Доказательство. Через $M(t)$ обозначим подмножество всех таких точек x^* из $S(t) = \{x \in \bar{\Omega}: t(x) = t\}$, что для каждого $\delta > 0$ в окрестности $\bar{U}_\delta(x^*) \cap \bar{\Omega}$ точки x^* найдется последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что интегральная кривая $(t, \bar{x}_n(t))$, проходящая через точку $(t(x_n), x_n)$ при $t \geqslant t(x_n)$ пересекается с частью Γ_δ

$$\Gamma_\delta(x^*) \overset{\text{def}}{=} \{(t, x): t = t(x),\ x \in U_\delta(x^*) \cap \bar{\Omega}\}$$

гиперповерхности «толчков» Γ не менее n раз.

Докажем, что при некотором $\hat{t} \in [a, b]$ множество $M(\hat{t})$ непусто. Действительно, в противном случае для любой точки $x \in \bar{\Omega}$ существовала бы такая δ-окрестность $U_\delta(x)$, что каждая из интегральных кривых системы (1), (2) пересекала бы $\Gamma_\delta(x)$ не более $n(x)$ раз ($n(x) \in N$ и зависит лишь от x). Множества $U_\delta(x)$ образуют открытое покрытие компакта $\bar{\Omega}$ и из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{\delta_1}(x_1), \ldots, U_{\delta_r}(x_r)$. В итоге получается, что система (1), (2) в области определения не более чем $\sum\limits_{i=1,r} n(x_i)$ -ударна, что противоречит предположению.

Итак, при некотором $\hat{t} \in [a, b]$ множество $M(\hat{t})$ непусто. Покажем теперь, что $H(M(\hat{t})) \subseteq S(\hat{t})$.

Если $x^* \in M(\hat{t})$ и $t(H(x^*)) \neq \hat{t}$, то существует ε-окрестность $\bar{U}_\varepsilon = \bar{U}_\varepsilon(\hat{t}, H(x^*))$ точки $(\hat{t}, H(x^*))$ такая, что $\bar{U}_\varepsilon \cap \Gamma = \varnothing$. Пусть теперь

$$\tau = \inf_{(t_0, y) \in \bar{U}_\varepsilon} \{t_1 - t_0: (t_1, x(t_1, t_0, y)) \in \Gamma; \qquad (t, x(t, t_0, y)) \notin \Gamma \ \forall t \in (t_0, t_1)\}.$$

Очевидно, что $\tau > 0$. Выберем затем такую δ-окрестность $U_\delta(x^*)$ точки x^*, что

$$H(U_\delta(x^*)) \subset \bar{U}_\varepsilon(H(x^*)); \qquad |t(x) - t(x^*)| < \min(\varepsilon, \tau/4) \quad \forall x \in U_\delta(x^*). \tag{4}$$

При таком выборе δ каждая интегральная кривая (1), (2) пересечет $\Gamma_\delta(x^*)$ не более одного раза. Действительно, если кривая $(t, x(t))$ попала на $\Gamma_\delta(x^*)$ в первый раз в момент времени t_{I}, то согласно (4) $|t_{\mathrm{I}} - t(x^*)| = |t_{\mathrm{I}} - \hat{t}| < \min(\varepsilon, \tau/4)$ и $(t_{\mathrm{I}}, \bar{x}(t_{\mathrm{I}} + 0)) \in \bar{U}_\varepsilon(\hat{t}, H(x^*))$. Поэтому, если $(t, \bar{x}(t))$ пересекла Γ во второй раз в момент времени t_{II}, то $t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}} \geqslant \tau$, и предположение $(t_{\mathrm{II}}, \bar{x}(t_{\mathrm{II}})) \in \Gamma_\delta$ противоречит выбору δ, так как $\tau \leqslant t_{\mathrm{II}} - t_{\mathrm{I}} = |t(\bar{x}(t_{\mathrm{II}})) - t(\bar{x}(t_{\mathrm{I}}))| \leqslant |t(\bar{x}(t_{\mathrm{II}})) - \hat{t}| + |t(\bar{x}(t_{\mathrm{I}})) - \hat{t}| < \tau/2$. Следовательно, любая интегральная кривая (1), (2) пересекает $\Gamma_\delta(x^*)$ не более одного раза, что не согласуется с выбором $x^* \in M(\hat{t})$. Следовательно, если $x^* \in M(\hat{t})$, то $H(x^*) \in S(\hat{t})$.

Более того, докажем, что $H(x^*) \in M(\hat{t})$. Действительно, в противном случае $z = H(x^*) \neq x^*$ и существует такое положительное число $\varepsilon < \|z - x^*\|/2$, что любая интегральная кривая (1), (2) пересекает часть $\Gamma_\varepsilon(z)$ гиперповерхности «толчков» не более $n(z)$ раз. Пусть для некоторого положительного числа q справедлива оценка $q < (\varepsilon/16)m$, где $m = \sup_{x \in U_\varepsilon(z), t \in [a,b]} \|f(t, x)\|$. Выберем $\delta < q$ так, чтобы $\forall x \in U_\delta(x^*)$

$$|t(x) - \hat{t}| < q/2; \qquad \bar{U}_\delta(x^*) \cap \bar{U}_\varepsilon(z) = \varnothing, \quad H(U_\delta(x^*)) \subset U_{\varepsilon/4}(z). \tag{5}$$

Если интегральная кривая $(t, \bar{x}(t))$ пересечет $\Gamma_\delta(x^*)$ в момент времени t_1, то $|t_1 - \hat{t}| < q/2$, $\|x(t_1 + 0) - H(x^*)\| < \varepsilon/4$. Поэтому для всех t_2 таких, что $0 < t_2 - t_1 < q$, будет

$$\|\bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1 + 0)\| \leqslant m(t_2 - t_1) < \varepsilon/4, \quad \bar{x}(t_2) \in U_\varepsilon(z). \tag{6}$$

Если теперь $(t, \bar{x}(t))$ — интегральная кривая импульсной системы, пересекающая $\Gamma_\delta(x^*)$ более $n(z) + 1$ раз (такая кривая должна существовать благодаря выбору x^*) в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$, то $|\tau_{i+1} - \tau_i| < q$, $i = \overline{1, p-1}$, согласно (5) и поэтому $(t, \bar{x}(t))$ должна пересечь $\Gamma_\varepsilon(z)$ более $p - 1 = n(z)$ раз в точках $s_1, \ldots, s_{p-1} : \tau_i < s_i < \tau_{i+1}$, $i = \overline{1, p-1}$ (иначе $\bar{x}(\tau_{i+1}) \in U_\varepsilon(z) \setminus U_\delta(x^*)$ согласно (6)).

Итак, $H(M(\hat{t})) \subseteq M(\hat{t})$, что завершает доказательство теоремы 2.

Из доказанных выше теорем вытекают такие предложения.

Следствие 1. *Предположим, что область Ω ограничена и*

$$f(t, x) \in C(\bar{W}, R^n), \; h(x) \in C(\bar{\Omega}, R^n), \; t(x) \in C(\bar{\Omega}, R).$$

Если множество $S(t) = \{x \in \Omega : t(x) = t\}$ ни при каком $t \in [a, b]$ не содержит инвариантного относительно отображения $H = H(x)$ подмножества (в частности, если $t(x) - t(H(x)) \geqslant \delta > 0$ или $t(x) - t(H(x)) \leqslant \mu < 0$ $\forall x \in \Omega : H(x) \in \Omega$), то импульсная система (1), (2) будет n-ударной.

Следствие 2. *Пусть* 1) *для всех $(t_0, x_0) \in \Gamma$ интегральная кривая $(t, x(t))$ уравнения* (1), *проходящая через точку (t_0, x_0), при малых $t - t_0 > 0$ лежит либо полностью в области W^{+1}, либо полностью в области W^{-1};* 2) *множество $S(t) = \{x \in \Omega : t(x) = t\}$ не содержит никакого инвариантного подмножества полудинамической системы (H, D^∞), отличного от изолированных точек покоя.*

Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in W$ задача Коши $x(t_0 + 0) = x_0$ для импульсной системы (1), (2) *имеет непродолжимое решение $x = \bar{x}(t)$, определенное на максимальном интервале существования (t_0, t_ω), $t_\omega \leqslant b$. Причем, если $t_\omega < b$ и решение $\bar{x}(t)$ ограничено, то* а) *либо существует конечный предел $\lim_{t \to t_\omega - 0} \bar{x}(t) = c$ и $(t_\omega, c) \in \Gamma$, $H(c) \notin \Omega$;* б) *либо $\varliminf_{t \to t_\omega - 0} \rho(\bar{x}(t), \partial\Omega) = 0$.*

Изучим теперь структуру множества точек разрыва собственно обобщенного решения $\bar{x}(t) : [t_0, t) \to \Omega$ импульсной системы (1), (2).

Итак, пусть T — множество моментов времени, в которые интегральная кривая $(t, x(t))$ пересекает Γ. Множество T упорядочено с естественным отношением порядка вещественных чисел, более того, оно вполне упорядочено, т. е. каждое его непустое подмножество $Q \subseteq T$ имеет наименьший элемент.

Докажем это. Отметим, что T не более чем счетно: $T = \{t_i\}$, так как к каждой точке $t_i \in T$ справа прилегает интервал ненулевой длины, не содержащий элементов T. Пусть $t_* = \inf Q$; $Q_1 = \{t_i \in T : t_i < t_*\}$, $t^* =$

$= \sup Q_1$. Если $t^* \in Q_1$, то $t^* = t_\beta$ для некоторого индекса β, и если $t_{\beta+1}$ — строго последующий за t_β момент попадания $(t, \bar{x}(t))$ на Γ, то $t_{\beta+1} \in Q$, $t_* = t_{\beta+1}$ и $t_{\beta+1}$ — наименьший элемент в Q. Если же $t^* \in Q_1$, то существует такая возрастающая последовательность $\{t_j\} \in Q_1$, что $(t_j, \bar{x}(t_j)) \in \Gamma$ и $t_j \to t^*$. Так как функция $\bar{x}(t)$ непрерывна слева и $t(x) \in C(\Omega)$, то $(t^*, x(t^*)) \in \Gamma$ и, следовательно, $t^* \in T$, $t^* = t_\gamma$ для некоторого индекса γ. В этом случае $t^* = t_* = t_\gamma$ и t_γ — наименьший элемент в Q.

Теорема 3. *Множество T счетно и является возрастающей трансфинитной последовательностью вещественных чисел $T = \{t_i\}_{i=0}^{i \leq 0}$. Если при всех $t_0 = t(x_0) = t(H(x_0))$ выполнено неравенство*

$$\langle \partial t(H(x_0))/\partial \bar{x}, f(t_0, H(x_0)) \rangle \neq 1, \tag{7}$$

то множество T' всех предельных точек последовательности T само является обычной возрастающей последовательностью:

$$T' = \{q_n\}_{n \in I \subseteq N}, \; q_1 < q_2 < \ldots < q_s < \ldots,$$

при этом для $T' \subset T \cup \{b\}$ возможен лишь один из следующих вариантов поведения:

а) $T' = \{q_1, \ldots, q_N\}$, $N < +\infty$, $q_N \leq t_\sigma \leq b$;

в) $T' = \{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $b = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$;

с) $T' = \{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $b < +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = t_\sigma = b$.

Доказательство. Как было показано, множество T вполне упорядочено, через σ обозначим его порядковый тип (счетный). Если точке $t \in T$ в качестве индекса α, $t = t_\alpha$, поставить в соответствие трансфинитное число, равное порядковому типу множества всех точек из T, предшествующих t, то множество T превратится в возрастающую трансфинитную последовательность.

Пусть теперь выполнено неравенство (7), но множество тем не менее имеет конечную предельную точку $q^* \in T$. Очевидно, $q^* \in T'$, $(q^*, \bar{x}(q^*)) \in \Gamma$; $h(\bar{x}(q^*)) = 0$. Докажем, что и

$$\langle \partial t(\bar{x}(q^*))/\partial x, f(q^*, \bar{x}(q^*)) \rangle = 1.$$

Пусть $s_n \in T'$, $s_n \to q^*$ и p_n — строго следующий за s_n момент пересечения интегральной кривой $(t, \bar{x}(t))$ с Γ. Тогда $s_n = t(\bar{x}(s_n))$, $p_n = t(\bar{x}(p_n))$, $p_n > s_n$ $\forall n$, $\bar{x}(t) \in C^1([s_n, p_n], \Omega)$ и поэтому в силу теоремы Лагранжа найдется точка $\lambda_n \in [s_n, p_n]$, $\lambda_n \to q^*$ такая, что

$$\langle \partial t(\bar{x}(\lambda_n))/\partial x, f(\lambda_n, \bar{x}(\lambda_n)) \rangle = 1.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to +\infty$, получаем противоречащее (7) соотношение.

Отметим, что достаточные условия 1-ударности импульсной системы устанавливаются сравнительно просто.

Пусть $\theta(x) = t(x) - t(H(x))$, $D(\theta) = \{x : x + h(x) \in \Omega\}$. Известно [1], что при условии связности $D(\theta)$ необходимым условием 1-ударности (1), (2) является выполнение неравенства $\theta(x) \geq 0$ или $\theta(x) \leq 0$ $\forall x \in D(\theta)$.

Теорема 4. *Пусть* $(-1)^i \theta(x) \geq 0$ $\forall x \in D(\theta)$. *Для того чтобы в импульсной системе* (1), (2) *возникали «биения», необходимо существование хотя бы одной точки* $(t_0, x_0) \in \Gamma$ *такой, что интегральная кривая* (1) $(t, x(t, t_0, x_0))$ *находилась бы в области* $W^{(-1)^p}$ *в некоторый момент времени* $\hat{t}(-1)^s < t_0(-1)^s$ *для каждого набора натуральных чисел i, p, s с четной суммой $i + p + s$.*

Доказательство. Пусть, например, $\theta(x) \geq 0$ $\forall x \in D(\theta)$ (т. е. $i = 2$). Предположим, что $(t, \bar{x}(t))$ — «бьющееся» решение (1), (2), которое последовательно в моменты времени $t_1 < t_2$ пересекает Γ (при этом $(t_1, \bar{x}(t_1 + 0)) \in W^{+1} \cup \Gamma$). Докажем справедливость теоремы для набора $i = 2$, $p = 2$, $s = 2$.

а) $(t_1, \bar{x}(t_1+0)) \in W^+$. В этом случае $(t, \bar{x}(t)) = (t, x(t)) \in W^+ \forall t \in (t_1, t_2)$; в качестве (t_0, x_0) можно взять точку $(t_2, \bar{x}(t_2))$ при $\hat{t} = 1/2(t_1+t_2) < t_2$.

б) $(t_1, \bar{x}(t_1+0)) \in \Gamma$. Тогда согласно сделанным предположениям либо $(t, \bar{x}(t)) \in W^{+1}$ (см. п. а), либо $(t, \bar{x}(t)) \in W^{-1}$ при малых $t - t_1 > 0$. Для нас представляет интерес лишь вторая возможность. Выберем достаточно малое $\delta > 0$ такое, что $(t_1 + \delta, \bar{x}(t_1+\delta)) \in W^{-1}$. При $n > 1/\delta$ рассмотрим последовательность

$$W_n = (t_n, \bar{x}(t_1+0)) \in W^{+1}, t_n = t_1 + 1/n, x(t_1) \overset{\text{def}}{=} \bar{x}(t_1+0).$$

При достаточно больших n в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных решений (1) интегральная кривая $(t, x_n(t))$, проходящая через точку $W_n \in W^{+1}$, будет лежать при $t = t_1 + \delta$ в области W^{-1} и поэтому пересечет Γ в некоторой точке $(\tau, x_n(\tau))$, $\tau > t_n$. Положив $\hat{t} = t_1 + 1/n$, $(t_0, x_0) = (\tau, x_n(\tau)) \in \Gamma$, завершим доказательство теоремы для набора $i = 2$, $p = 2$, $s = 2$. Остальные варианты рассматриваются аналогично.

Следствие 1 (см. также [2—4]). *Пусть* $t(x) \in C^1(\Omega)$, $\theta(x) \geqslant 0$ *и найдется такая окрестность* $U(\Gamma)$ *для* Γ, *что*

$$\forall (t, x) \in W^+ \cap U(\Gamma) \langle \partial t(x)/\partial x, f(t, x)\rangle \leqslant 1. \tag{8}$$

Тогда система (1), (2) 1-*ударна*.

Доказательство. В противном случае согласно теореме 4 найдется интегральная кривая $(t, x(t))$ уравнения (1) такая, что при некоторых $\hat{t} < t_0$, $(t_0, x(t_0)) \in \Gamma$ будет $(\hat{t}, x(\hat{t})) \in W^{+1}$. Без ограничения общности можно полагать: $(t, x(t)) \in W^{+1} \forall t \in (\hat{t}, t_0)$. Но тогда $t_0 - \hat{t} > 0$, $\hat{t} > t(x(\hat{t}))$, $t_0 = t(x(t_0))$ и $t_0 - \hat{t} < t(x(t_0)) - t(x(\hat{t})) = \langle \partial t(y)/\partial x, f(s, y)\rangle (t_0 - \hat{t})$, что противоречит (8) при $y = x(s)$ $((s, y) \in W^+ \cap U(\Gamma))$.

При $t(x) \notin C^1(\Omega)$ справедливо такое утверждение.

Следствие 2. *Если существует функция* $q(x) \in C^1(\Omega, R))$, *такая, что* $q(x + h(x)) \leqslant t(x) \leqslant q(x)$ $\forall x : x + h(x) \in \Omega$, $\langle \partial q(x)/\partial x, f(q(x), x)\rangle < 1$, *то импульсная система* (1), (2) 1-*одноударна*.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Трофимчук С. И.* Проблема «биений» в импульсных системах.— Киев, 1990.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.11)
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.—282 с.
3. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations — Singapore etc : World Scientific, 1989.— 273 p.
4. *Роговченко Ю. В., Трофимчук С. И.* Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 5.— С. 622—626.

Получено 11.12.90