УДК 517.948

ФАМ КИ АНЬ, канд. физ.-мат. наук (Ханой. ун-т, Вьетнам)

Об одном методе построения решения нелинейной резонансной краевой задачи

Предложен итерационный метод решения нелинейной резонансной краевой задачи.

Запропоновано ітераційний метод розв'язку нелінійної резонансної крайової задачі.

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу вида

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \dot{x}), \tag{1}$$

$$l(x) = 0, \tag{2}$$

где $A \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n\times n})$ — непрерывная матричная функция, $f: [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная вектор-функция, $l: C([0, \omega], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ — линейный ограниченный оператор.

Пусть $U(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{U} = A(t)U$, удовлетворяющая условию $U(0) = E$, где E — единичная матрица. Если $Z \in C([0, \omega], \mathbb{R}^{n\times n})$ — любая непрерывная матричная функция со столбцами $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, то через $l(Z)$ обозначим матрицу со столбцами $(l(z_1), l(z_2), \ldots, l(z_n))$.

В регулярном (нерезонансном) случае, когда матрица $l(U)$ невырождена, задача (1), (2) изучена достаточно полно (см., например, [1, 2]). В этом случае линейная задача $\dot{x} = A(t)x$ при краевом условии (2) имеет только нулевое решение. Известно также, что условие невырожденности матрицы $l(U)$ весьма существенно для разрешимости нелинейной задачи (1), (2).

В настоящей работе задача (1), (2) рассматривается в более общем случае, когда vank $l(U) = n - \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Прежде чем сформулировать основное предположение, введем следующие линейные конечномерные операторы $B, \tilde{B}: R^n \to \mathbb{R}^n$, $B\xi := l(U(t)\xi)$; $\tilde{B}\xi := l(tU(t)\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Ясно, что операторы $B, \tilde{B}$ задаются матрицами $l(U)$ и $l(tU)$ соответственно.

Будем предполагать, что $\operatorname{rank} l(U) = n - \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, и существует некоторое замкнутое подпространство $\mathfrak{M} \subset \mathbb{R}^n$ размерности ν такое, что выполняется соотношение

$$\{\xi \in \mathfrak{M} : \tilde{B}\xi \in \operatorname{Im} B\} = \{0\}. \tag{3}$$

Условие (3) налагает некоторое ограничение на матрицу $A(t)$ и оператор $l(x)$ (см. лемму 1). Оно выполняется для многих краевых задач (см. примеры 1—5 из п. 2).

2. Фредгольмовость линейных дифференциальных операторов. Сведем краевую задачу (1), (2) к операторному виду

$$\mathcal{A}x = F(x), \tag{4}$$

где операторы $\mathcal{A}, F: X \to Y$ определяются формулами

$$\mathcal{A}x := \dot{x} - A(t)x, \quad F(x) := f(t, x, \dot{x}),$$

$$X = \{x \in C^1([0, \omega], \mathbb{R}^n) : l(x) = 0\}, \quad Y = C([0, \omega], \mathbb{R}^n),$$

$$\|y\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \omega} |y(t)|, \quad |||x||| = \|x\| + \|\dot{x}\|, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Здесь употребляются норма векторов $|\xi| = \max_i |\xi_i|$ и согласованная с ней норма матриц $|M| = \max_i \sum_j |m_{ij}|$. Пусть $\operatorname{rank} l(U) = n - \nu$, $0 \leqslant \nu \leqslant n$. Случай $\nu = 0$ рассматривается в [1, 2], а случай $\nu = n$ — в [3]. Будем считать, что $0 < \nu < n$. Обозначим через $\{e_i\}_1^\nu$, $\{\tilde{e}_i\}_1^\nu$, $\{f_j\}_{\nu+1}^n$ базисы подпространств $\mathfrak{M}$ (см. условие (3)), $\operatorname{Ker} B$ и $\operatorname{Im} B$ соответственно. Положим $g_i = \tilde{B}e_i$, $i = \overline{1, \nu}$, и пусть e_j, $j = \overline{\nu + 1, n}$, — такие векторы, что $Be_j = f_j$, $j = \overline{\nu + 1, n}$.

Справедливо следующее легко проверяемое утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы условие* (3) *было выполнено, необходимо и достаточно, чтобы векторы*

$$\{g_i\}_1^\nu, \quad \{f_j\}_{\nu+1}^n \tag{5}$$

образовали базис в $\mathbb{R}^n$.

Из леммы 1 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда справедливо разложение*

$$\mathbb{R}^n = \widetilde{B}(\mathfrak{M}) \oplus \operatorname{Im} B.$$

Разложим любой вектор $\eta \in \mathbb{R}^n$ по базису (5)

$$\eta = \sum_{i \leqslant \nu} \alpha_i g_i + \sum_{j > \nu} \beta_j f_j$$

и определим конечномерные операторы $\psi^{\pm}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ по формулам $\psi^+(\eta) = \sum_{i \leqslant \nu} \alpha_i e_i$, $\psi^-(\eta) = \sum_{j > \nu} \beta_j e_j$. Составим матрицы-столбцы $\mathscr{E}^+ = (e_1, e_2, \ldots, e_\nu)$, $\mathscr{E}^- = (e_{\nu+1}, e_{\nu+2}, \ldots, e_n)$ и прямоугольные матрицы

$$\mathscr{P}^+ = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{1\nu} & p_{2\nu} & \cdots & p_{n\nu} \end{pmatrix}, \quad \mathscr{P}^- = \begin{pmatrix} p_{1,\nu+1} & p_{2,\nu+1} & \cdots & p_{n,\nu+1} \\ p_{1,\nu+2} & p_{2,\nu+2} & \cdots & p_{n,\nu+2} \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

где p_{ij} — коэффициенты в разложении векторов $h_l = \operatorname{col}(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, $l = \overline{1, n}$, по базису (5), $h_l = \sum_{i \leqslant \nu} p_{li} g_i + \sum_{j > \nu} p_{lj} f_j$, $l = \overline{1, n}$.

Следующие свойства операторов $\psi^{\pm}$ проверяются без труда.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\psi^+: \mathbb{R}^n \to \mathfrak{M}$;

б) $I_n - \widetilde{B}\psi^+: \mathbb{R}^n \to \operatorname{Im} B$, *где* I_n — *единичный оператор в* $\mathbb{R}^n$;

в) $\forall \eta \in \operatorname{Im} B \ \ \psi^+(\eta) = 0$, $B\psi^-(\eta) = \eta$;

г) $\psi^+ \widetilde{B} \psi^+ = \psi^+$;

д) $\widetilde{B}\psi^+ + B\psi^- = I_n$;

е) *операторы* $\psi^{\pm}$ *задаются матрицами* $\mathscr{E}^{\pm}\mathscr{P}^{\pm}$ (*в каноническом базисе* $\{h_l\}_1^n$).

Рассмотрим линейный непрерывный оператор $\mathscr{C}: Y \to X \subset Y$, определенный формулой $\mathscr{C}y = U(t)\int_0^t U^{-1}(s)\, y(s)\, ds$. Положим $X_2 = \{x = U(t)\xi : \xi \in \operatorname{Ker} B\}$, $Y_1 = \{y \in Y : l(\mathscr{C}y) \in \operatorname{Im} B\}$, $Y_2 = \{y = U(t)\eta : \eta \in \mathfrak{M}\}$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда отображение* $\mathcal{A} \doteq X \to Y$ *является линейным ограниченным фредгольмовым оператором* (*индекса нуль*), *причем* $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y_1$.

Доказательство. Фредгольмовость оператора $\mathcal{A}$ следует из нескольких простых утверждений:

а) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \nu$. В самом деле, имеем $\dot{x} - A(t)x = 0 \Leftrightarrow x = U(t)\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Далее, $l(x) = 0 \Leftrightarrow \xi \in \operatorname{Ker} B$. Таким образом, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = X_2$ и, следовательно, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker} B = \nu$.

б) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = Y_1 \subset Y$ — замкнутое подпространство. Действительно, $y \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда найдется такое $x \in X$, что $\dot{x} = A(t)x + y$. Это означает, что существует такое $\xi \in \mathbb{R}^n$, что $x = U(t)\xi + \mathscr{C}y$, причем $l(x) = B\xi + l(\mathscr{C}y) = 0$. Отсюда следует, что $l(\mathscr{C}y) \in \operatorname{Im} B$, т. е. $y \in Y_1$. Замкнутость подпространства Y_1 вытекает из непрерывности операторов $l, \mathscr{C}$ и замкнутости $\operatorname{Im} B \subset \mathbb{R}^n$.

в) $Y = Y_1 \oplus Y_2$, $\operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A} = \nu$. Покажем сначала, что $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$. В самом деле, если $y \in Y_1 \cap Y_2$, то $y = U(t)\eta$, $\eta \in \mathfrak{M}$. Тогда $l(\mathscr{C}y) =$

$= \widetilde{B}\eta \in \operatorname{Im} B$, ибо $y \in Y_1$. В силу (3) имеем $\eta = 0$, значит, $y = U(t)\eta = 0$. Далее, возьмем любой $y \in Y$. Разложим $\widetilde{\eta} := l(\mathscr{C}y)$ по базису (5): $\widetilde{\eta} = \sum_{i \leqslant \nu} \alpha_i g_i + \sum_{j > \nu} \beta_j f_j$. Определим вектор $\eta := \psi^+(\widetilde{\eta}) = \sum_{i \leqslant \nu} \alpha_i e_i$. В силу леммы 2 $\eta \in \mathfrak{M}$ и $y_2 := U(t)\eta \in Y_2$. Положим $y_1 := y - y_2$. Покажем, что $y_1 \in Y_1$. Согласно лемме 2 имеем $l(\mathscr{C}y_1) = l(\mathscr{C}y - tU(t)\eta) = \widetilde{\eta} - \widetilde{B} \times \times \psi^+(\widetilde{\eta}) \in \operatorname{Im} B$, т. е., $y_1 \in Y_1$. Таким образом, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, откуда следует, что $\operatorname{codim} \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim Y_2 = \dim \mathfrak{M} = \nu$. Тем самым фредгольмовость оператора $\mathcal{A}$ установлена.

Для построения используемого в дальнейшем обратимого сужения $\hat{\mathcal{A}}$ оператора $\mathcal{A}$ сначала найдем прямое дополнение X_1 к подпространству X_2. Пусть $\{\widetilde{e}_i\}_1^n$ — базис $\operatorname{Ker} B \subset \mathbb{R}^n$, тогда функции $l_i = U(t)\widetilde{e}_i$, $i = \overline{1, \nu}$, образуют базис в X_2. Пусть $\varphi_i \in X^*$, $i = \overline{1, \nu}$; — такие линейные непрерывные функционалы, что

$$\varphi_i(l_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, \nu}. \tag{6}$$

Положим $X_1 = \{x \in X : \varphi_i(x) = 0,\ i = \overline{1, \nu}\}$. Ясно, что $X = X_1 \oplus X_2$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполнено условие*

$$\operatorname{Ker} \widetilde{B} \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}. \tag{7}$$

Тогда $\varphi_i(x) = t_i(l\mathscr{C}x)$, $i = \overline{1, \nu}$; $x \in X$, *где* $t_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — *такие линейные функционалы, что*

$$t_i(\widetilde{\widetilde{B}e_j}) = \delta_{ij}. \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что (7) является необходимым и достаточным условием для линейной независимости векторов $\{\widetilde{\widetilde{B}e_j}\}_1^\nu$. Пусть линейные функционалы $t_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i = \overline{1, \nu}$, удовлетворяют условию (8). Положим $\varphi_i = t_i \cdot l \cdot \mathscr{C}$, $i = \overline{1, \nu}$. Условие (6) выполнено, ибо $\varphi_i(l_j) = t_i[l(\mathscr{C}l_j)] = t_i(\widetilde{\widetilde{B}e_j}) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, \nu}$. Непрерывность и линейность функционалов φ_i очевидны.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} B$. *Тогда условие* (7) *следует из условия* (3) *и в качестве прямого дополнения к подпространству* X_2 *можно взять множество*

$$X_1 = \{x \in X : l(\mathscr{C}x) \in \operatorname{Im} B\}. \tag{9}$$

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{Ker} \widetilde{B} \cap \operatorname{Ker} B \subset \{\xi \in \operatorname{Ker} B : \widetilde{B}\xi \in \operatorname{Im} B\}$, следовательно, условие (7) вытекает из условия (3) (при $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} B$). В этом случае имеем $\widetilde{e}_i \equiv e_i$; $g_i = \widetilde{B}e_i \equiv \widetilde{\widetilde{B}e_i}$, $i = \overline{1, \nu}$. В силу линейной независимости векторов $\{g_i\}_1^\nu$, $\{f_j\}_{\nu+1}^n$ найдутся такие линейные функционалы $t_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, что $t_i(f_j) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$, $j = \overline{\nu + 1, n}$, и $t_i(g_s) = t_i(\widetilde{\widetilde{B}e_s}) = \delta_{is}$, $i, s = \overline{1, \nu}$. Положим $\varphi_i = t_i \cdot l \cdot \mathscr{C}$ и $X_1 = \{x \in X : \varphi_i(x) = 0,\ i = \overline{1, \nu}\}$. Согласно лемме 3 $X = X_1 \oplus X_2$. Для любого $x \in X$, разложим вектор $l(\mathscr{C}x)$ по базису (5): $l(\mathscr{C}x) = \sum_{i \leqslant \nu} \alpha_i g_i + \sum_{j > \nu} \beta_j f_j$. Ясно, что $l(\mathscr{C}x) \in \operatorname{Im} B$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, $i \leqslant \nu$. С другой стороны, так как $\varphi_i(x) = t_i[l(\mathscr{C}x)] = \sum_{s \leqslant \nu} \alpha_s t_i(g_s) + \sum_{j > \nu} \beta_j t_i(f_j) = \alpha_i$, $i = \overline{1, \nu}$, то отсюда непосредственно следует (9).

Лемма 5. *Сужение* $\hat{\mathcal{A}}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *на подпространство* X_1 *осуществляет линейный изоморфизм между* X_1 *и* Y_1. *Более того, справедлива* *формула*

$$\hat{\mathcal{A}}^{-1}y = -U(t)\xi + \mathscr{C}y, \quad y \in Y_1, \tag{10}$$

где $\xi = \xi^+ + \xi^-$, $\xi^- = \psi^-(l\mathscr{C}y)$, $\xi^+ = \sum_{i\leqslant\nu} \varphi_i(\mathscr{C}y - U(t)\xi^-)\tilde{e}_i$, *а функционалы* $\varphi_i \in X^*$, $i = \overline{1,\nu}$, *удовлетворяют условию* (6) (*см. также леммы* 3,4).

Доказательство. Поскольку оператор $\hat{\mathcal{A}}$ взаимно однозначно отображает банахово пространство X_1 на банахово пространство Y_1, то существует ограниченный обратный оператор $\hat{\mathcal{A}}^1 : Y_1 \to X_1$.

Положив согласно (10) $x = -U(t)\xi + \mathscr{C}y$. Имеем

$$l(x) = -B\xi + l(\mathscr{C}y) = -B\xi^- + l(\mathscr{C}y) = -B\psi^-(l\mathscr{C}y) + (l\mathscr{C}y).$$

Поскольку $y \in Y_1$, $l(\mathscr{C}y) \in \operatorname{Im} B$, то по лемме 2 $B\psi^-(l\mathscr{C}y) = l(\mathscr{C}y)$, следовательно, $l(x) = 0$, т. е. $x \in X$. Далее, ясно, что $\dot{x} = A(t)x + y$, тем самым $Ax = y$. Наконец, проверим включение $x \in X_1$. В силу (6) имеем $\varphi_i(x) = -\varphi_i(U(t)\xi^+) + \varphi_i(\mathscr{C}y - U(t)\xi^-) = -\sum_{s\leqslant\nu}\varphi_s(\mathscr{C}y - U(t)\xi^-)\varphi_i(U(t)\tilde{e}_s) + \varphi_i(\mathscr{G}y - U(t)\xi^-) = 0$, $i = \overline{1,\nu}$, следовательно, $x \in X_1$. Лемма доказана.

Замечание 1. В случае, когда $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} B$, вектор ξ в (9) вычисляется по следующему правилу: $\xi = \xi^+ + \xi^-$; $\xi^- = \psi^-(l\mathscr{C}y)$, $\xi^+ = \psi^+(l(\mathscr{C}^2y) - \tilde{B}\xi^-)$. Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 5 с учетом леммы 4.

Найдем оценку нормы $\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\|$. Имеем $\|\mathscr{C}y\| \leqslant (\max_t |U(t)\int_0^\omega |U^{-1}(s)|ds) \times \|y\| \equiv \rho_4\|y\|$. Далее, $\|U(t)\xi\| \leqslant \max_t |U(t)|(|\xi^+| + |\xi^-|)$. С одной стороны, $|\xi^-| = |\psi^-(l\mathscr{C}y)| \leqslant \|\psi^-\|\|l\|\rho_4\|y\| \equiv \rho_3\|y\|$, а с другой, $-|\xi^+| \leqslant \sum_{i\leqslant\nu}|\tilde{e}_i|\|\varphi_i\|(\|\mathscr{C}y\| + \max_t |U(t)||\xi^-|) \leqslant \rho_2\|y\|$. Согласно (10) имеем $\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}y\| \leqslant \{\max_t |U(t)|(\rho_2 + \rho_3) + \rho_4\}\|y\| \equiv \rho_1\|y\|$. Поскольку $\left\|\frac{d}{dt}(\hat{\mathcal{A}}^{-1}y)\right\| = \|A(t)\hat{\mathcal{A}}^{-1}y + y\| \leqslant \{\max_t |A(t)|\rho_1 + 1\}\|y\|$, то $\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}y\|_1 = \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}y\| + \left\|\frac{d}{dt}(\hat{\mathcal{A}}^{-1}y)\right\| \leqslant \rho\|y\|$. Таким образом, доказана оценка

$$\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \leqslant \rho, \tag{11}$$

где постоянное ρ выражается через ρ_i, $i = \overline{1,4}$.

Приведем примеры краевых задач вида (1), (2), для которых выполнены условия (3), (7).

Пример 1 (нерезонансная краевая задача). Пусть для задачи (1), (2) выполняется условие $\det l(U) \neq 0$. Тогда оператор B обратим. Положим $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} B = \{0\}$, $\operatorname{Im} B = \mathbb{R}^n$. Условие (3) тривиально. Условие (7) в силу леммы 4 вытекает из условия (3).

В примерах 2—5 рассматриваются резонансные краевые задачи.

Пример 2 (нелинейная периодическая граничная задача): $\dot{x} = f(t, x, \dot{x})$; $x(0) = x(\omega)$; $t \in [0, \omega]$; $x, f \in \mathbb{R}^n$. В этом случае $A(t) \equiv 0$, $U(t) \equiv E$, $l(x) := x(0) - x(\omega)$, следовательно, $B = 0$, $\tilde{B} = -\omega E$. Положим $\mathfrak{M} = \operatorname{Ker} B = \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Im} B = \{0\}$. Условие (3) тривиально, ибо из условия $\tilde{B}\xi = 0$ следует $\xi = 0$. Условие (7) является следствием условия (3).

Пример 3 (нелинейная многоточечная краевая задача): $\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \dot{x})$; $l(x) = \sum_{i=1}^{k} M_i x(t_i) = 0$, где $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i = \overline{1,k}$,—

заданные матрицы; $0=t_1<t_2<\ldots<t_k=\omega$; $x, f\in\mathbb{R}^n$. В этом случае $l(U)=\sum_{i=1}^{k} M_iU(t_i)$; $l(tU)=\sum_{i=1}^{k} t_iM_iU(t_i)$. В [3] исследуется случай, когда $l(U)=0$, а $\det l(tU)\neq 0$. Тогда при $\mathfrak{M}=\operatorname{Ker} B=\mathbb{R}^n$ условия (3), (7), как в примере 2, выполняются тривиальным образом.

Пример 4 (двухточечная краевая задача):

$$y^{(n)}=g(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}), \quad t\in(0,\omega), \tag{12}$$

$$y^{(i)}(0)=0, \quad i=\overline{0, n-2}; \qquad y^{(n-1)}(0)=y^{(n-1)}(\omega), \tag{13}$$

где $y, g\in\mathbb{R}^1$. Положим $x:=\operatorname{col}(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$, $f:=\operatorname{col}(0, 0, \ldots, g)$. Задача (12), (13) сводится к задаче (1), (2), где

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad l(x)=x(0)+Nx(\omega),$$

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$ Имеем $U(t)=e^{tA}=$

$$=\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \ldots & t^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & t & \ldots & t^{n-2}/(n-2)! \\ . & . & . & \ldots & . \; . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее.

$$B=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \widetilde{B}=-\omega N,$$

$$\operatorname{Ker} B=\{\operatorname{col}(0, \ldots, 0, \xi_n): \xi_n\in\mathbb{R}^1\}, \ \dim\operatorname{Ker} B=1,$$

$$\operatorname{Im} B=\{\operatorname{col}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, 0): \eta_i\in\mathbb{R}^1\}.$$

Положим $\mathfrak{M}=\operatorname{Ker} B$, $g_1=-\omega h_n$; $f_{i+1}=h_i$, $i=\overline{1, n-1}$, где $\{h_i\}_1^n$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$. Поскольку векторы $g_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы, условие (3) выполнено в силу леммы 1. Из (3) следует (7). Кроме того, имеем $\mathscr{E}^+=\operatorname{col}(0, \ldots, 0, 1)$, $\mathscr{P}^+=(0, 0, \ldots, 0, -1/\omega)$; $\mathscr{E}^-=(h_1, \ldots \ldots, h_{n-1})$ и

$$\mathscr{P}^-=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5 (нелинейная периодическая граничная задача):

$$y^{(n)}=g(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}),, \quad t\in(0,\omega), \tag{14}$$

$$y^{(i)}(0)=y^{(i)}(\omega), \quad i=\overline{0, n-1}; \quad y, g\in\mathbb{R}^1. \tag{15}$$

Задача (14), (15) рассматривается в [4]. Она сводится к задаче (1), (2), где

$x = \operatorname{col}(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$; $f = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, g)$; $l(x) = x(0) - x(\omega)$ и $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$. Имеем

$$B = E - e^{\omega A} = - \begin{pmatrix} 0 & \omega & \omega^2/2 & \ldots & \omega^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 0 & \omega & \ldots & \omega^{n-2}/(n-2)! \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$\widetilde{B} = \omega(B - E) = -\omega e^{\omega A}$. Далее, $\operatorname{Ker} B = \{\operatorname{col}(\xi_1, 0, \ldots, 0) : \xi_1 \in \mathbb{R}^1\}$, $\operatorname{Im} B = \{\operatorname{col}(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, 0) : \eta_i \in \mathbb{R}^1,\ i = \overline{0, n-1}\}$. Положим $\mathfrak{M} = \{\operatorname{col}(0, \ldots, 0, \xi_n) : \xi_n \in \mathbb{R}^1\}$. Имеем $\dim \mathfrak{M} = \dim \operatorname{Ker} B = 1$.

Пусть $\xi = \operatorname{col}(0, \ldots, 0, \xi_n) \in \mathfrak{M}$, тогда $\widetilde{B}\xi = \operatorname{col}\left(\frac{-\omega^n}{(n-1)!}\xi_n, \ldots, -\omega^2\xi_n, -\omega\xi_n\right)$. Следовательно, из соотношения $\widetilde{B}\xi \in \operatorname{Im} B$ следует $\xi_n = 0$, откуда $\xi \equiv 0$. Таким образом, условие (3) выполнено. Предположим далее, что $\xi \in \operatorname{Ker} \widetilde{B} \cap \operatorname{Ker} B$. Тогда $0 = \widetilde{B}\xi = -\omega\xi$, следовательно, $\xi = 0$. Тем самым условие (7). также выполнено.

Возьмем $\widetilde{e}_1 = \operatorname{col}(1, 0, \ldots, 0) \in \operatorname{Ker} B$. Имеем $\widetilde{B}\widetilde{e}_1 = -\omega\widetilde{e}_1$. Для любого вектора $\xi = \operatorname{col}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $t_1(\xi) = -\xi_1/\omega$. Тогда $t_1(\widetilde{B}\widetilde{e}_1) = 1$. Согласно лемме 3 $\varphi_1(x) = t_1(l(\mathscr{C}x))$ и прямым дополнением к подпространству $\operatorname{Ker} B$ является множество $X_1 = \{x \in X : \varphi_1(x) = 0\}$. Поскольку $\mathscr{C}x = \int\limits_0^t e^{(t-s)A}x(s)\,ds$, то $l(\mathscr{C}x) = -\int\limits_0^\omega e^{(\omega-s)A}x(s)\,ds$, и, следовательно, $\varphi_1(x) = -\frac{1}{\omega}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_0^\omega(\omega - s)^{k-1}x_k(s)\,ds$. Заметим, что вектор $e_1 = h_n$ и векторы $f_i = h_{i-1}$, $i = \overline{2, n}$, где $\{h_i\}_1^n$ — канонический базис $\mathbb{R}^n$, образуют базис подпространств $\mathfrak{M}$ и $\operatorname{Im} B$ соответственно. Кроме того, из соотношений $h_l = f_{l+1}$, $l = \overline{1, n-1}$, $h_n = g_1 - \sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!}f_{k+1}$ следует

$$\mathscr{P}^+ = (0, 0, \ldots, 0, 1),$$

$$\mathscr{P}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\omega^{n-1}/(n-1)! \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\omega^{n-2}/(n-2)! \\ . & . & \ldots & . & \ldots \\ 0 & 0 & & 1 & -\omega \end{pmatrix}.$$

Наконец, решая системы линейных уравнений $Be_i = f_i$, $i = \overline{2, n}$, с треугольной матрицей B, найдем векторы l_i, $i = \overline{2, n}$, и тем самым построим матрицы $\mathscr{C}^{\pm}$.

3. Нелинейные дифференциальные операторы. Рассмотрим линейный ограниченный оператор $Q : Y \to Y_2$, определенный формулой

$$Qy = U(t)\,\psi^+(l\mathscr{C}y), \quad y \in Y. \tag{16}$$

Лемма 6. *Q является линейным ограниченным проектором, причем* $\operatorname{Ker} Q = Y_1$, $\operatorname{Im} Q = Y_2$.

Доказательство. Для любого $y \in Y$ положим $\eta = l(\mathscr{C}y)$, $\eta^+ = \psi^+(\eta)$. Так как $Qy = U(t)\eta^+$, то $\mathscr{C}(Qy) = tU(t)\eta^+$, и, следовательно, $l(\mathscr{C}Qy) = \widetilde{B}\eta^+$. В силу леммы 2 имеем $Q^2y = Q(Qy) = U(t)\psi^+(l\mathscr{C}y) = U(t)\psi^+\widetilde{B}\psi^+(\eta) = U(t)\psi^+(\eta) = U(t)\eta^+ = Qy$. Таким образом, $Q^2 = Q$. Заметив, далее, что $Qy = 0 \Leftrightarrow \psi^+(l\mathscr{C}y) = 0 \Leftrightarrow l(\mathscr{C}y) \in \operatorname{Im} B \Leftrightarrow y \in Y_1$, получим тождество $\operatorname{Ker} Q = Y_1$. Наконец, ясно, что $\operatorname{Im} Q = Y_2$. Лемма доказана.

Положим $P = I - Q$, где I — единичный оператор в Y. Легко видеть, что $P^2 = P$, $\operatorname{Im} P = Y_1$, $\operatorname{Ker} P = Y_2$. Для операторов P, Q, справедливы оценки

$$\|P\| \leqslant 1 + \varkappa, \quad \|Q\| \leqslant \varkappa, \tag{17}$$

где в обозначениях п.2 $\varkappa = \max\limits_t |U(t)|\,|\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+|\,\|l\|\rho_4$. Пусть $\Delta(R) = (R) = \{(t, \xi, \eta): t \in [0, \omega];\ \xi, \eta \in \mathbb{R}^n;\ |\xi|, |\eta| \leqslant R\}$ и $\Omega = \{x \in X: |||x||| < R\}$.

Лемма 7. *Пусть функция $f: \Delta(R) \to \mathbb{R}^n$ и ее частные производные $\partial f/\partial\xi$, $\partial f/\partial\eta$ непрерывны в области $\Delta(R)$. Более того, пусть для всех (t, ξ, η), $(t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) \in \Delta(R)$ выполняются соотношения*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\xi}(t, \xi, \eta)\right| \leqslant a, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial\xi}(t, \xi, \eta) - \frac{\partial f}{\partial\xi}(t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})\right| \leqslant l(|\xi - \widetilde{\xi}| + |\eta - \widetilde{\eta}|),$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\eta}(t, \xi, \eta)\right| \leqslant a, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial\eta}(t, \xi, \eta) - \frac{\partial f}{\partial\eta}(t, \widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})\right| \leqslant l(|\xi - \widetilde{\xi}| + |\eta - \widetilde{\eta}|).$$

Тогда оператор $F(x) := f(t, x, \dot{x})$ непрерывно дифференцируем по Фреше на Ω и $\|F'(x)\| \leqslant a$, $\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant l\,|||x - y|||$. Кроме того, сужение $QF'(x)$ на X_2 имеет вид

$$[QF'(x)]_{X_2} = U(t)\,\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(D(x))\,U^{-1}(t), \tag{18}$$

где $D: \Omega \subset X \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица вида

$$D(x) = U(t)\int\limits_0^t \left\{U^{-1}(s)\frac{\partial f}{\partial\xi}(s, x, \dot{x}) + \frac{\partial f}{\partial\eta}(s, x, \dot{x})\,A(s)\right\} U(s)\,ds.$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $F'(x)h = \frac{\partial f}{\partial\xi}(t, x, \dot{x})h + \frac{\partial f}{\partial\eta}(t, x, \dot{x})\dot{h}$, $x \in \Omega$, $h \in X$. Отсюда следует $\|F'(x)\| \leqslant a$; $\|F'(x) - F'(y)\| \leqslant l\,|||x - y|||$, $x, y \in \Omega$. Для любого $h \in X_2$ существует такой $\xi \in \operatorname{Ker} B$, что $h = U(t)\xi$. Имеем $F'(x)h = \left\{\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{\partial f}{\partial\eta}A(t)\right\}U(t)\xi$. Согласно (16) $[QF'(x)]_{X_2}h = U(t)\psi^+(l\mathscr{E}F'(x)h)$. Поскольку $\mathscr{E}(F'(x)h) = U(t)\int\limits_0^t U^{-1}(s)\left[\frac{\partial f}{\partial\xi} + \frac{\partial f}{\partial\eta}A(s)\right]U(s)\,ds\cdot\xi = D(x)\xi$, то $[QF'(x)]_{X_2}h = U(t) \times \mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(D(x))\xi = U(t)\,\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(D(x))\,U^{-1}(t)\,h$. Лемма доказана.

Пусть $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — некоторая матрица размерности $n \times n$. В дальнейшем будем отождествлять матрицу V с порожденным ею оператором. Предположим, что $V\xi \in \mathfrak{M}$ для всех $\xi \in \operatorname{Ker} B$. Тогда необходимым и достаточным условием существования оператора V_0^{-1} (матрицы V_0^{-1}), обладающего свойствами:

1) $\forall\eta \in \mathfrak{M} \quad V_0^{-1}\eta \in \operatorname{Ker} B$;

2) $V_0^{-1}V\xi \equiv \xi \quad \forall\xi \in \operatorname{Ker} B$;

3) $VV_0^{-1}\eta \equiv \eta \quad \forall\eta \in \mathfrak{M}$,

является невырожденность матрицы $(\alpha_{ij})_1^\nu$ размерности $\nu\times\nu$, где $\widetilde{Ve_i} = \sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}e_j$.

Лемма 8. *Пусть для всех* $x\in\Omega$ *существует матрица* $\{\mathscr{E}+\mathscr{P}+l\,(D\,(x))\}_0^{-1}$. *Более того, предполагается выполненным условие*

$$\forall x\in\Omega\quad |\{\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+\,l\,(D\,(x))\}_0^{-1}|\leqslant\gamma_0. \tag{19}$$

Тогда оператор $[QF'(x)]_{X_2}$, *определенный формулой* (18), *непрерывно обратим и* $\|[QF'(x)]_{X_2}^{-1}\|\leqslant\gamma$, *где*

$$\gamma=\gamma_0\,(\max_t|U(t)|\,|U^{-1}(t)|)\,(1+\max_t|A(t)|). \tag{20}$$

Доказательство. Заметим, что если $h\in X_2$, то $\|\dot h\|=\|A(t)h\|\leqslant\max_t|A(t)|\,\|h\|$. Отсюда следует

$$|||h|||\leqslant(1+\max_t|A(t)|)\,\|h\|\quad\forall h\in X_2. \tag{21}$$

Рассмотрим теперь уравнение $[QF'(x)]_{X_2}h=y$, где $y\in Y_2$ — задано, а $h\in X_2$ — искомое. Имеем $h=U(t)\{\mathscr{E}+\mathscr{P}+l\,(D\,(x))\}_0^{-1}U^{-1}(t)y$. Отсюда следует $\|h\|\leqslant\gamma_0\max_t|U(t)\|U^{-1}(t)|\,\|y\|$. Из (21) вытекает (20). Укажем один частный случай, когда условие (19) будет выполнено (ср. с [3]).

Лемма 9. *Пусть* $f(t,\xi,\eta)=M(t)\,\xi+N(t)\,\eta+\varepsilon g(t,\xi,\eta)$, *где* $M,N\in C([0,\omega],\mathbb{R}^{n\times n})$ — *непрерывные матричные функции,* g — *непрерывно дифференцируемая в области* $\Delta(R)$ *вектор-функция, а* $\varepsilon>0$ — *малый параметр. Предположим, что существует матрица* $\{\mathscr{E}+\mathscr{P}+l\,(D_0)\}^{-1}$, *где* $D_0=U(t)\int_0^t U_s^{-1}\{M(s)+N(s)A(s)\}U(s)\,ds$. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon>0$ *условие* (19) *будет выполнено.*

Доказательство. Согласно лемме 7 $[QF'(x)]_{X_2}=U(t)\,\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+l\times(D\,(x))$, где $D(x)\equiv D_0+\varepsilon D_1(x)$, $D_1(x)=U(t)\int_0^t U^{-1}(s)\left\{\frac{\partial g}{\partial\xi}+\frac{\partial g}{\partial\eta}A(s)\right\}\times U(s)\,ds$. Положим $V_i=\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+\,l\,(D_i)$, $i=0,1$ и $V(x)=V_0+\varepsilon V_1(x)$. Тогда $[QF'(x)]_{X_2}=U(t)\,V(x)\,U^{-1}(t)$. Кроме того, $V(x)\,\tilde e_i\equiv\sum_{j=1}^{\nu}(\alpha_{ij}^{(0)}+\varepsilon\alpha_{ij}^{(1)})\,e_j$, $i=\overline{1,\nu}$. Согласно условию леммы существует $(V_0)_0^{-1}$, следовательно, матрица $\Lambda_0=(\alpha_{ij}^{(0)})_1^\nu$ обратима. Тогда при достаточно малом ε матрица $\Lambda=(\alpha_{ij}^{(0)}+\varepsilon\alpha_{ij}^{(1)})_1^\nu$ также будет обратима, и, следовательно, существует матрица $\{\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+l\,(D\,(x))\}_0^{-1}$. Легко видеть, что условие (19) будет выполнено.

4. Итерационный метод решения нелинейной резонансной краевой задачи. В работах [3—5] предлагается итерационный метод нахождения нелинейного операторного уравнения с линейной фредгольмовой частью (4) и рассматривается его применение к нелинейным краевым задачам. В частности, доказана следующая теорема (см. обозначения пп. 2, 3).

Теорема 2. *Пусть оператор* $F:X\to Y$ *непрерывно дифференцируем по Фреше в некотором открытом множестве, содержащем замкнутый шар* $S\subset X$ *с центром* $x^{(0)}$, *радиусом* $r>0$. *Пусть для всех* $x,y\in S$ *выполняются соотношения* $\|PF'(x)\|\leqslant\alpha$, $\|QF'(x)\|\leqslant\beta$, $\|[QF'(x)]_{X_2}^{-1}\|\leqslant\gamma$, $\|QF'(x)-QF'(y)\|\leqslant L\,|||x-y|||$. *Если коэффициенты* α,β *и радиус* $r>0$, *а также начальное приближение* $x^{(0)}$ *таковы, что*

$$q:=2\alpha\beta\gamma\,|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\|+L\gamma\delta/2<1,\quad 2\delta\,(1-q)^{-1}<r,$$

где невязка $\delta:=\beta\gamma\,\|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\|\,\|\mathcal{A}x^{(0)}-PF(x^{(0)})\|+\gamma\,\|QF(x^{(0)})\|$, *то последовательность* $\{x^{(m)}\}$, *построенная по формулам* $u^{(m+1)}=\hat{\mathcal{A}}^{-1}PF(x^{(m)})$,

$\widetilde{x}^{(m)} = u^{(m+1)} + v^{(m)}$, $v^{(m+1)} = v^{(m)} - [QF'(x^{(m)})]_{X_2}^{-1} QF(\widetilde{x}^{(m)})$, $x^{(m+1)} = u^{(m+1)} + v^{(m+1)}$, $u^{(m)} \in X_1$, $v^{(m)} \in X_2$, $m \geqslant 0$, *будет сходиться к некоторому решению* x^* *уравнения* (4). *При этом справедлива оценка*

$$|||x^{(m)} - x^*||| \leqslant 2\delta(1-q)^{-1} q^m < rq^m. \tag{22}$$

Заметим, что теорема 2 верна, если вместо замкнутого шара S рассматривается его внутренность S_0. Действительно, всегда найдется число $r' < r$ такое, что $2\delta(1-q)^{-1} < r'$, и, следовательно, все условия теоремы 2 выполняются в замкнутом шаре $\overline{S}(x^0, r')$, содержащемся в S_0.

Обратимся теперь к исходной задаче (1), (2). Пусь $x^{(0)} \in \Omega$ — некоторое приближенное решение краевой задачи (1), (2). Положим $r := R - |||x^{(0)}|||$, $F^{(0)}(t) = f(t, x^{(0)}, \dot{x}^{(0)})$, $\alpha = (1+\varkappa)a$, $\beta = \varkappa a$, $L = \varkappa l$, $\delta := \beta\gamma\rho \max_t |\dot{x}^{(0)} - A(t)x^{(0)} - F^{(0)}(t) + U(t)\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(\mathscr{E}F^{(0)})| + \gamma \max_t |U(t)| \times |\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(\mathscr{E}F^{(0)})|$, где константы $a, l, \rho, \varkappa, \gamma$ определяются согласно лемме 7 и соотношениям (11), (17), (20).

Предположим, что уже известно m-е приближенное решение $x^{(m)} = u^{(m)} + U(t)\eta^{(m)}$ задачи (1), (2), где $u^{(m)} \in X_1$, т. е. $\varphi_i(u^{(m)}) = 0$, $i = \overline{1, \nu}$ (см. леммы 3, 4), и $\eta^{(m)} \in \operatorname{Ker} B$. Положим

$$F^{(m)}(t) = f(t, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)}), \tag{23}$$

$$y^{(m)}(t) = F^{(m)}(t) - U(t)\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(\mathscr{E}F^{(m)}), \tag{24}$$

$$\xi_-^{(m)} = \psi^-(l\mathscr{E}y^{(m)}), \quad \alpha_i^{(m)} = \varphi_i[\mathscr{E}y^{(m)} - U(t)\xi_-^{(m)}], \quad i = \overline{1, \nu},$$

$$\xi_+^{(m)} = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^{(m)} \widetilde{e}_i, \quad \xi^{(m)} = \xi_+^{(m)} + \xi_-^{(m)},$$

$$u^{(m+1)}(t) = -U(t)\xi^{(m)} + \mathscr{E}y^{(m)}, \tag{25}$$

$$\widetilde{x}^{(m)}(t) = u^{(m+1)}(t) + U(t)\eta^{(m)}, \tag{26}$$

$$\widetilde{F}^{(m)}(t) = f(t, \widetilde{x}^{(m)}, \dot{\widetilde{x}}^{(m)}), \quad \widetilde{F}_\xi^{(m)} = \frac{\partial f}{\partial \xi}(t, \widetilde{x}^{(m)}, \dot{\widetilde{x}}^{(m)}),$$

$$\widetilde{F}_\eta^{(m)} = \frac{\partial f}{\partial \eta}(t, \widetilde{x}^{(m)}, \dot{\widetilde{x}}^{(m)}), \quad \widetilde{f}^{(m)} = \mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(\mathscr{E}\widetilde{F}^{(m)}),$$

$$D^{(m)} = U(t) \int_0^t U^{-1}(s)[\widetilde{F}_\xi^{(m)} + \widetilde{F}_\eta^{(m)} A(s)] U(s)\, ds,$$

$$\eta^{(m+1)} = \eta^{(m)} - \{\mathscr{E}^+\mathscr{P}^+ l(D^{(m)})\}_0^{-1} \widetilde{f}^{(m)}, \tag{27}$$

$$x^{(m+1)}(t) = u^{(m+1)}(t) + U(t)\eta^{(m+1)}. \tag{28}$$

Из теорем 1, 2 и леммы 7 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнено соотношение* (3) *и все условия лемм* 7, 8. *Более того, предположим, что* $q := 2\alpha\beta\gamma\rho + L\gamma\delta/2 < 1$ *и* $2\delta(1 - q)^{-1} < r$. *Тогда итерационный процесс* (23) — (28) *сходится к некоторому решению* x^* *краевой задачи* (1), (2). *При этом быстрота сходимости оценивается неравенством* (22).

В заключение приведем реализации алгоритма (23) — (28) для краевых задач п. 2 (см. примеры 1 — 5). (При этом все промежуточные преобразования опустим.)

Пример 1:

$$y^{(m)}(t) = U(t) \int_0^t U^{-1}(s) f(s, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)})\, ds,$$

$$x^{(m+1)}(t) = -U(t)\,[l(U)]^{-1} l(y^{(m)}) + y^{(m)}, \quad m \geqslant 0.$$

Пример 2:

$$y^{(m)}(t) = f(t, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)}) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(s, x^{(m)}, \dot{x}^{(m)})\, ds,$$

$$u^{(m+1)}(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} s y^{(m)}(s)\, ds + \int_0^{t} y^{(m)}(s)\, ds,$$

$$v^{(m+1)} = v^{(m)} - \left\{\int_0^{\omega} \frac{\partial f}{\partial x}(s, u^{(m+1)} + v^{(m)}, \dot{u}^{(m+1)})\, ds\right\}^{-1} \times$$

$$\times \left\{\int_0^{\omega} f(s, u^{(m+1)} + v^{(m)}, \dot{u}^{(m+1)})\, ds\right\},$$

$$x^{(m+1)}(t) = u^{(m+1)}(t) + v^{(m+1)}.$$

Пример 3. Общий алгоритм (23) — (28) в случае, когда $\sum_{i=1}^{k} M_i U(t_i) = 0$, $\det\left(\sum_{i-1}^{k} t_i M_i U(t_i)\right) \neq 0$, сводится к итерационному процессу, предложенному в [3].

Пример 4: Пусть известно m-е приближение $y_m(t)$. Положим $g_m(t) = g(t, y_m, \dot{y}_m, \ldots, \frac{d^n}{dt^n} y_m(t))$, $z_k^{(m)}(t) = -\frac{t^{n-k}}{\omega(n-k)!}\int_0^{\omega} g_m(s)\, ds$, $k = \overline{1, n-1}$, $z_n^{(m)}(t) = g_m(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} g_m(s)\, ds$. Далее,

$$u_k^{(m+1)}(t) = -\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\int_0^{\omega} z_n^{(m)}(s)\, ds + \sum_{i=k}^{n}\int_0^{t} \frac{(t-s)^{i-k}}{(i-k)!} z_i^{(m)}(s)\, ds, \quad k = \overline{1, n},$$

$$\tilde{x}_k^{(m)}(t) = u_k^{(m+1)}(t) + \lambda_m \frac{t^{n-k}}{(n-k)!}, \quad k = \overline{1, n},\ \lambda_0 = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y_0(t)\, dt = 0.$$

Пусть

$$\tilde{g}_m(t) = g(t, \tilde{x}_1^{(m)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(m)}, \frac{d}{dt}\tilde{x}_n^{(m)}),$$

$$\frac{\partial \tilde{g}_m}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}\left(t, \tilde{x}_1^{(m)}, \ldots, \tilde{x}_n^{(m)}, \frac{d}{dt}\tilde{x}_n^{(m)}\right),$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \left\{\int_0^{\omega} \frac{\partial \tilde{g}_m}{\partial y}\, ds\right\}^{-1} \left\{\int_0^{\omega} \tilde{g}_m(s)\, ds\right\}.$$

Тогда

$$y_{m+1}(t) = u_1^{(m+1)}(t) + \lambda_{m+1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \frac{d^k}{dt^k} y_{m+1} = u_{k+1}^{(m+1)}(t) +$$

$$+ \lambda_{m+1}\frac{t^{n-k-1}}{(n-k-1)!},$$

$$k = \overline{1, n-1}.$$

Пример 5. Пусть m-е приближение $y_m(t)$ известно. Положим

$$g_m(t) = g\left(t, y_m, \dot{y}_m, \ldots, \frac{d^n}{dt^n} y_m\right),$$

$$z_k^{(m)}(t) = -\frac{t^{n-k}}{\omega(n-k)!}\int_0^\omega g_m(s)\,ds, \quad k = \overline{1, n-1},$$

$$z_n^{(m)}(t) = g_m(t) - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega g_m(s)\,ds, \quad \eta_{k-1}^{(m)} = \sum_{i=k}^{n}\int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{i-k}}{(i-k)!} z_i^{(m)}(s)\,ds,$$

$$k = \overline{2, n}, \quad \eta_n^{(m)} = 0.$$

Определим $\xi_2^{(m)}, \ldots, \xi_n^{(m)}$ из треугольной системы:

$$\begin{Vmatrix} \omega & \frac{\omega^2}{2!} & \ldots & \frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \omega & \ldots & \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \omega \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_2^{(m)} \\ \xi_3^{(m)} \\ \ldots \\ \xi_n^{(m)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \eta_1^{(m)} \\ \eta_2^{(m)} \\ \ldots \\ \eta_{n-1}^{(m)} \end{Vmatrix}.$$

Положим

$$\xi_1^{(m)} = \eta_1^{(m)} + \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n}\int_0^\omega \frac{(\omega-s)^i}{(i-1)!} z_i^{(m)}(s)\,ds,$$

$$u_k^{(m+1)}(t) = -\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{(i-k)!}\left\{t^{i-k}\xi_i^{(m)} + \int_0^t (t-s)^{i-k} z_i^{(m)}(s)\,ds\right\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \frac{\int_0^\omega g\left(s, u_1^{(m+1)} + \lambda_m, u_2^{(m+1)}, \ldots, u_n^{(m+1)}, \frac{d}{ds} u_n^{(m+1)}\right) ds}{\int_0^\omega \frac{\partial g}{\partial y}\left(s, u_1^{(m+1)} + \lambda_m, u_2^{(m+1)}, \ldots, u_n^{(m+1)}, \frac{d}{ds} u_n^{(m+1)}\right) ds},$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{n}\int_0^\omega \frac{(\omega-s)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} y_0(s)\,ds.$$

Тогда $y_{m+1}(t) = u_1^{(m+1)}(t) + \lambda_{m+1}$, и, кроме того, $\frac{d^k}{dt^k} y_{m+1}(t) = u_{k+1}^{(m+1)}(t)$, $k = \overline{1, n-1}$.

1. *Китурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ.— 1987.— 30.— С. 3—100.
2. *Васильев Н. И., Клоков Ю. А.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— Рига : Зинатне, 1978.— 183 с.
3. *Фам Ки Ань.* Приближенное решение нелинейных многоточечных краевых задач в резонансном случае // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 5.— С. 619—624.
4. *Фам Ки Ань, Ву Зуй Тик.* Об одном итерационном методе решения общих периодических граничных задач // Там же.— 1983.— 35, № 3.— С. 348—352.
5. *Pham Ky Anh.* On the Seidel — Newton method for solving quasilinear operator equations // Acta Math. Viet.— 1982.— 7, N 2.— P. 111—126. (РЖ Мат.— 1985.— 3Б1130.)

Получено 04.10.88