УДК 531.19

А. Л. РЕБЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
П. В. РЕЗНИЧЕНКО, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

# Борелевское суммирование разложений Бриджеса — Федербуша — Майера для многочастичных потенциалов

Исследована структура разложений Бриджеса — Федербуша — Майера (РБФМ) для $M$-частичных взаимодействий непрерывных систем классической статистической механики. Приведены оценки числа деревьев и суммы их вкладов, доказана суммируемость разложений по Борелю. Для трехчастичных потенциалов специального вида доказана сходимость РБФМ.

Досліджується структура розкладів Бріджеса — Федербуша — Майєра (РБФМ) для $M$-частинкових взаємодій неперервних систем класичної статистичної механіки. Наведені оцінки числа дерев і суми їх вкладів, доведена сумовність розкладів за Борелем. Для трьохчастинкових потенціалів спеціального вигляду доведена збіжність РБФМ.

Введение. Непрерывные системы с $M$-частичным ($M \geqslant 2$) взаимодействием общего вида исследовались в работах [1—3]. При условии сверхустойчивости и регулярности потенциала доказано [1] существование единственного термодинамического состояния при малых значениях активности. Получены также оценки убывания корреляций и разложение усеченных корреляционных функций по степеням активности и функциям Урселла [2, 3]. С другой стороны, в работе Бриджеса и Федербуша [4] (см. также [5]) был предложен очень элегантный метод построения майеровских разложений, который к тому же для двухчастичного потенциала взаимодействия [4] приводит к значительным упрощениям доказательства сходимости. В то же время (как отмечалось в работе [5]) применение этого метода к случаю произвольного $M$-частичного ($M \geqslant 3$) потенциала взаимодействия приводит к трудностям, связанным с большим числом графов-деревьев и невозможностью доказать сходимость майеровских разложений для непрерывных систем.

В настоящей работе мы еще раз вернемся к этой проблеме с целью более детального анализа возникающей ситуации. Для ясности изложения детально исследуем случай трехчастичного потенциала, а затем для произвольного $M$-частичного потенциала укажем незначительные особенности, возникающие при обобщении.

В первом пункте детально описана структура разложения. Во втором приведены основные оценки и доказана суммируемость разложений по Борелю. В третьем пункте рассмотрен специальный класс трехчастичных потенциалов, для которых доказана сходимость майеровских трехчастичных разложений.

1. Структура РБФМ для многочастичных потенциалов. Рассмотрим в некотором объеме $\Lambda$ систему частиц, взаимодействующих посредством двухчастичного $v_{ij} = v(x_i, x_j)$ и трехчастичного $v_{ijk} = v(x_i, x_j, x_k)$ потенциалов. Энергия взаимодействия системы $N$-частиц имеет вид

$$U_N = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} v_{ij} + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} v_{ijk}.$$

Налагаем обычные условия на потенциалы

$$v_{ij} = v(x_i - x_j) \in L^1(\mathbb{R}^3), \tag{1}$$

$$v_{ijk} = v(x_i - x_k,\ x_j - x_k) \in L^1(\mathbb{R}^6) \cap L^\infty(\mathbb{R}^6),$$

$$U_N \geqslant -BN, \quad B > 0. \tag{2}$$

Большая статистическая сумма такова:

$$Z_\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Z_N^\Lambda, \quad Z_N^\Lambda = \int_{\Lambda^N} (dx)_N\, e^{-\beta U_N}. \tag{3}$$

В силу (2) для конечных областей $\Lambda$ справедлива оценка

$$|Z_\Lambda| \leqslant \sum_{N=0}^{\infty} (N!)^{-1} (|z|\, e^{\beta B} |\Lambda|)^N = \exp\{|z|\,|\Lambda|\, e^{\beta B}\}, \tag{4}$$

означающая, что $Z_\Lambda(z)$ является целой функцией активности $z$. Следуя работе [4] применим к $Z_N^\Lambda$ интерполяционную процедуру, заключающуюся в последовательном применении формулы Ньютона — Лейбница

$$\exp\{A + B\} = \exp\{B\} + \int_0^1 ds_j \frac{d}{ds_j} \exp\{s_j A + B\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

На первом шаге в качестве $A$ выделим в $U_N$ все взаимодействия 1-й частицы с остальными. Тогда, используя симметричность, получаем

$$Z_N^\Lambda = \frac{1}{N} K_1^\Lambda Z_{N-1}^\Lambda + R_{12} + R_{13}.$$

Здесь, как и в [3], $K_1^\Lambda = \int_\Lambda dx_1 = |\Lambda|$, а два остаточных члена возникают из-за наличия двух- и трехчастичного потенциалов

$$R_{12} = \frac{(-\beta)}{N} \frac{1}{(N-2)!} \int_0^1 ds_1 \int_{\Lambda^N} (dx)_N\, v_{12} e^{-\beta s_1 U_{\hat{1}, N\setminus 1}} e^{-\beta U_{N\setminus 1}},$$

$$R_{13} = \frac{(-\beta)}{2N} \frac{1}{(N-3)!} \int_0^1 ds_1 \int_{\Lambda^N} (dx)_N\, v_{123} e^{-\beta s_1 U_{\hat{1}, N\setminus 1}} e^{-\beta U_{N\setminus 1}},$$

где $U_{\hat{1}, N\setminus 1}$ — энергия взаимодействия 1-й частицы с остальными, а $U_{N\setminus 1}$ — энергия взаимодействия $(N-1)$-й частицы без 1-й.

На втором шаге разложения для остатка $R_{12}$ в качестве $A$ выбираем ту часть $s_1 U_{\hat{1}, N\setminus 1} + U_{N\setminus 1}$, которая соответствует взаимодействию 1- и 2-й частиц с остальными $(N-2)$ частицами (взаимодействие $s_1 v_{12}$ включается в $B$):

$$R_{12}=\frac{2}{N}K_{12}^{\Lambda}Z_{N-2}^{\Lambda}+R_{123}+R_{124},$$

$$K_{12}^{\Lambda}=\frac{(-\beta)}{2}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_{\Lambda^2}(dx)_2\,v_{12}\,e^{-\beta s_1 v_{12}},$$

$$R_{123}=\frac{(-\beta)^2}{N}\frac{1}{(N-3)!}\int\limits_0^1(ds)_2\int\limits_{\Lambda^N}(dx)_N\,v_{12}\,(s_1v_{13}+v_{23}+s_1v_{123})\times$$

$$\times\exp\{-\beta s_1v_{12}-\beta s_1s_2U_{\widehat{1},N\diagdown 2}-\beta s_2U_{\widehat{2},N\diagdown 2}-\beta U_{N\diagdown 2}\},$$

$$R_{124}=\frac{(-\beta)^2}{2N}\frac{1}{(N-4)!}\int\limits_{\Lambda^N}(dx)_N\int\limits_0^1(ds)_2\,v_{12}\,(s_1v_{134}+v_{234})\times$$

$$\times\exp\{-\beta s_1s_2U_{\widehat{1},N\diagdown 2}-\beta s_2U_{\widehat{2},N\diagdown 2}-\beta U_{N\diagdown 2}\}.$$

Для разложения $R_{13}$ включим в $A$ ту часть $s_1U_{\widehat{1},N\diagdown 1}+U_{N\diagdown 1}$, которая соответствует взаимодействию 1-, 2- и 3-й частиц с остальными $(N-3)$-мя частицами. Кроме того, в качестве интерполяционного параметра используем параметр $s_3$. Пропущенный параметр $s_2$ включим искусственно в $R_{13}$ и $K_{13}^{\Lambda}$ с помощью $\delta$-функции Дирака $\delta(1-s_2)$ для того, чтобы обеспечить эквивалентность обозначений для выражений $K_{13}^{\Lambda}$ и $K_{123}^{\Lambda}$. Для обозначения общей схемы построения разложения определим последовательность

$$\{n_i\}_1^m,\quad 1\leqslant m\leqslant n,\quad n_i-n_{i-1}=1,\,2,$$
$$1=n_1<n_2<\ldots<n_{m-1}<n_m=n. \tag{5}$$

Тогда в общем случае

$$R_{n_1,\ldots,n_k}=\frac{n_k}{N}K_{n_1,\ldots,n_k}^{\Lambda}Z_{N-n_k}+R_{n_1,\ldots,n_k,n_k+1}+R_{n_1,\ldots,n_k,n_k+2}. \tag{6}$$

Выполняя эту процедуру до тех пор, пока не исчерпаем все частицы, т. е. $n_k=N$, получаем

$$Z_N^{\Lambda}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{N}K_n^{\Lambda}Z_{N-n}^{\Lambda}, \tag{7}$$

$$K_n^{\Lambda}=\sum_{\{n_i\}}K_{\{n_i\}}^{\Lambda}. \tag{8}$$

Сумма по $\{n_i\}$ — это сумма по всевозможным последовательностям (5). В силу конструкции (6) число таких последовательностей равно числу $F_n$ в соответствующей последовательности Фибоначчи $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Далее

$$K_{\{n_i\}}=\frac{1}{n}\int\limits_{\Lambda^n}(dx)_n\int\limits_0^1(ds)_{n-1}\,V_{\{n_i\}}\,(s)_{n-1}\exp\{-\beta U_n\,(s)_{n-1}\}, \tag{9}$$

$$V_{\{n_i\}}(s)_{n-1}=\frac{(-\beta)^m}{2^{n-m}}\prod_{l\in\{1,\ldots,n\}\diagdown\{n_i\}}\delta(1-s_l)\prod_{l=2}^{m}\sum_{j=1}^{n_{l-1}}s_j\ldots s_{n_{l-1}-1}\tilde{v}_{jn_l}, \tag{10}$$

$$\tilde{v}_{jn_i}=\begin{cases}v_{jn_l}+\sum\limits_{j<k\leqslant n_{l-1}}v_{jkn_l}, & \text{если } n_l-n_{l-1}=1,\\ v_{j(n_l-1)n_l}, & \text{если } n_i-n_{i-1}=2,\end{cases} \tag{11}$$

$$U_n\,(s)_{n-1}=\sum_{k=2,3}\ \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}s_{i_1}\ldots s_{i_k-1}v_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Подставляя (7) в (3), получаем

$$Z_\Lambda = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{z^N}{N} \sum_{n=1}^{N} n K_n^\Lambda Z_{N-n}^\Lambda. \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по $z$ и меняя порядок суммирования, имеем

$$\frac{dZ_\Lambda}{dz} = \sum_{N=1}^{\infty} z^{N-1} \sum_{n=1}^{N} n K_n^\Lambda Z_{N-n}^\Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} K_n^\Lambda \sum_{N=n}^{\infty} z^{N-n} Z_{N-n}^\Lambda = \tag{13}$$

$$= Z_\Lambda \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} K_n^\Lambda. \tag{14}$$

Тогда в силу условия $Z_\Lambda |_{z=0} = 1$ получим

$$Z_\Lambda = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} z^n K_n^\Lambda \right\}. \tag{15}$$

Мы повторим здесь процедуру получения выражения (15) из (12) с той целью, чтобы отметить, что переход от ряда (13) к ряду (14) является корректным лишь в смысле суммирования по Борелю ряда (14) или (15). Действительно, в силу оценки (4) ряд (13) является абсолютно сходящимся при любых $z$ и конечных $\Lambda$. Из оценок, которые мы выполним в следующем пункте, будет следовать, что ряд (15) не является абсолютно сходящимся ни при каких значениях $z$ (для двухчастичных потенциалов взаимодействия ряд (15) является абсолютно сходящимся лишь для небольшой окрестности точки $z = 0$). В следующем пункте мы подробно обсудим возможность суммируемости ряда, стоящего в экспоненте выражения (15).

В заключение приведем вид коэффициентов разложения для произвольного $M$-частичного потенциала взаимодействия. В этом случае энергия взаимодействия частиц определяется формулой

$$U_N = \sum_{k=2}^{M} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant N} v_{i_1, \ldots, i_k}, \tag{16}$$

где $v_{i_1, \ldots, i_k}$ — $k$-частичный потенциал взаимодействия, удовлетворяющий условию трансляционной инвариантности и следующим условиям:

$$v_{i_1, \ldots, i_k} \in L^1 (\mathbb{R}^{3(k-1)}) \cap L^\infty (\mathbb{R}^{3(k-1)}),$$
$$U_N \geqslant -BN, \quad B > 0. \tag{17}$$

Как и в случае трехчастичного взаимодействия, коэффициенты представляются в виде (8), однако последовательности (5) таковы, что $n_i - n_{i-1} = l$ может принимать значения $l = 1, \ldots, M-1$, а функции $V_{\{n_i\}}(s)_{n-1}$ будут иметь вид

$$V_{\{n_i\}}(s)_{n-1} = (-\beta)^m \left( \prod_{p=1}^{M-1} (p!)^{n_p} \right)^{-1} \prod_{l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{n_i\}} \delta(1 - s_l) \times$$

$$\times \prod_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{n_{i-1}} s_j \ldots s_{n_{i-1}-1} \tilde{v}_{jn_i},$$

где $n_p = |\{i \mid n_i - n_{i-1} = p\}|$, т. е. мощность множества $\{i \mid n_i - n_{i-1} = p\}$, а

$$
\tilde{v}_{ln_l} = \begin{cases} v_{jn_l} + \sum\limits_{j<j_1\leqslant n_{l-1}} v_{jj_1n_l} + \ldots \\ \ldots + \sum\limits_{j<j_1<\ldots<j_{M-2}\leqslant n_{l-1}} v_{jj_1\ldots j_{M-2}n_l}, \quad l=1, \\ v_{j(n_l-1)n_l} + \sum\limits_{j<j_1\leqslant n_{l-1}} v_{jj_1(n_l-1)n_l} + \ldots \\ \ldots + \sum\limits_{j<j_1<\ldots<j_{M-2}\leqslant n_{l-1}} v_{jj_1\ldots j_{M-3}(n_l-1)n_l}, \quad l=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{l(n_l-M+2)\ldots(n_l-1)n_l}, \quad l=M-1. \end{cases}
$$

2. Оценки числа и вкладов tree-графов. Суммируемость по Борелю. Докажем существование предела

$$
K_n = \lim_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^3} \frac{K_n^\Lambda}{|\Lambda|} \tag{18}
$$

и установим некоторые оценки $|K_n|$. Прежде всего отметим, что энергия взаимодействия $n$-частиц в случае, когда интенсивности взаимодействия $s_1, \ldots, \ldots, s_{n-1}$, удовлетворяет условию устойчивости (2) или (17): $U(s)_{n-1} \geqslant -Bn$. Доказательство аналогично случаю двухчастичного потенциала [4] (см. также [6]). Далее для удобства будем считать, что вся совокупность $k$-частичных потенциалов такова, что удовлетворяет следующим оценкам:

$$
\| v_{j_1\ldots j_k} \|_{L^1(\mathbb{R}^{3(k-1)})} \leqslant \beta^{k-2} v_0, \quad k = 2, \ldots, M, \tag{19}
$$

$$
\| v_{j_1\ldots j_k} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)\times L^1(\mathbb{R}^{3(k-2)})} \leqslant \beta^{k-2} v_0, \quad k = 3, \ldots, M. \tag{20}
$$

Для большей наглядности приведем оценку величины $K_n$ вначале для трехчастичного потенциала. Прежде всего заметим, что число $F_n$, т. е. число слагаемых в (8), не превышает $2^n$. Тогда из (8) и (9) получаем

$$
|K_n^\Lambda| \leqslant \frac{(2e^{\beta B})^n}{n} \sup_{\{n_l\}} \int_{\Lambda^n} (dx)_n \int_0^1 (ds)_{n-1} \frac{\beta^m}{2^{n-m}} \prod_{l\in\{1,\ldots,n\}/\{n_l\}} \delta(1-s_l) \times
$$

$$
\times \prod_{l=2}^{m} \sum_{j=1}^{n_{l-1}} s_j \ldots s_{n_{l-1}-1} |\tilde{v}_{jn_l}|.
$$

Легко заметить, что максимальный вклад вносят те $\tilde{v}_{jn_l}$, которые отвечают последовательности $\{n_l\}$ с $n_l - n_{l-1} = 1$ для всех $l$; (при этом $m = n$). Снятие $\delta$-функций может лишь привести к сложению некоторых двух слагаемых с одинаковыми $s_j \ldots s_k$ и, следовательно, всегда могут мажорировать фактором $2^{m-1} \leqslant 2^{n-1}$. Тогда, учитывая (18) — (20) и (11), окончательно имеем

$$
|K_n| \leqslant \frac{(4e^{\beta B} v_0 \beta)^n}{\beta v_0} \mathcal{J}_n^{(3)},
$$

где

$$
\mathcal{J}_n^{(3)} = \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) s_j \ldots s_{i-2},
$$

или с помощью tree-графов [3]

$$
\mathcal{J}_n^{(3)} = \sum_\eta \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^{n} (i - \eta(i)) s_{\eta(i)} \ldots s_{i-2}.
$$

Легко видеть, что для произвольного вида потенциальной энергии (16) оценка будет аналогичной;

$$\mathcal{J}_n^{(M)} = \sum_{\eta} \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^{n} (i - \eta(i))^{M-2} s_{\eta(i)} \dots s_{i-2}. \tag{21}$$

Для $M = 2$ имеем обычное выражение [3] и стандартную оценку

$$\sum_{\eta} \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^{n} s_{\eta(i)} \dots s_{i-2} \leqslant e^{n-1}.$$

В работе Бэтла и Федербуша [7] (см. также [8]) было доказано более сильное утверждение

$$\sum_{\eta} \prod_{i=1}^{n} d_\eta(i)! \int_0^1 (ds)_{n-1} \prod_{i=2}^{n} s_{\eta(i)} \dots s_{i-2} \leqslant 4^n. \tag{22}$$

где

$$d_\eta(i) = |\eta^{-1}(\{i\})|, \tag{23}$$

или число вершин $j$ в графе $\eta$, для которых $\eta(j) = i$ (отметим, что всегда $d_\eta(n) = 0$). Этой оценкой мы воспользуемся в следующем пункте. Роль подавляющих факторов, которые возникают в результате интегрирования по $s_k$, $k = 1, \dots, n-1$, легко оценить, если сделать грубую оценку $|s_k| \leqslant 1$. Тогда из (21) для $M = 2$ получим число графов $\eta$

$$\sum_{\eta} 1 = \prod_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} 1 = (n-1)!,$$

а правая часть (22) примет вид

$$A_n = \sum_{\eta} \prod_{i=1}^{n-1} d_\eta(i)! = (2n-3)!!.$$

Последнее равенство легко получить, если учесть, что все графы с $|\eta| = n$ получаются из графов с $|\eta| = n-1$ присоединением $n$-й вершины поочередно к каждой из $(n-1)$ вершин. Тогда

$$A_n = \sum_{\eta:|\eta|=n-1} \Big[(d_\eta(1)+1)! \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{n-1} d_\eta(i)! + \dots + (d_\eta(n-1)+1)! \prod_{\substack{i=1\\ i\neq n-1}}^{n-1} d_\eta(i)!\Big] =$$

$$= \sum_{\eta:|\eta|=n-1} \prod_{i=1}^{n-1} d_\eta(i)! \left(\sum_{i=1}^{n-1} d_\eta(i) + n - 1\right) = (2n-3)A_{n-1},$$

так как для любого графа $\eta$ с $|\eta| = n-1$ $\sum_{1}^{n-1} d_\eta(i) = n-2$.

Оценим теперь величину $\mathcal{J}_n^{(3)}$. При грубой оценке $|s_k| \leqslant 1$ получаем выражение

$$\sum_{\eta:|\eta|=n} \prod_{i-2}^{n} (i - \eta(i)) = \prod_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (i-j) = \frac{n!\,(n-1)!}{2^n}, \tag{24}$$

откуда с учетом оценки числа последовательностей $\{n_i\}$ следует оценка числа графов для трехчастичного взаимодействия. Для того чтобы более точно оценить величину $J_n^3$, выполним в (21) интегрирование по $s_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ (более подробно см. [8])

$$\mathcal{J}_n^{(3)} = \sum_{\eta} \frac{\prod_{i=2}^{n} (i - \eta(i))}{\prod_{k=1}^{n-2} (N(k,\eta)+1)},$$

где $N(k,\eta) = |\{i \mid \eta(i) \leqslant k \leqslant i-2\}|$, откуда ясно, что

$$0 \leqslant N(k,\eta) \leqslant n-k-1. \tag{25}$$

Обозначим $\mathcal{J}_n^{(3)} = \sum_{\eta:|\eta|=n} A_\eta^{(n)}$.

Теперь, как и в случае с вычислением $A_n$, учтем, что все графы с $|\eta| = n$ получаются из графов с $|\eta| = n-1$ присоединением $n$-й вершины поочередно к каждой из $(n-1)$ вершин. Тогда, используя определение отображения $\eta$ и (25) для $A_\eta^{n-1}$, получаем

$$\mathcal{J}_n^{(3)} = \sum_{\eta:|\eta|=n-1} \left[ (n-1) \frac{N(1,\eta)+1}{N(1,\eta)+2} \cdots \frac{N(n-2,\eta)+1}{N(n-2,\eta)\,2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + 2\frac{N(1,r)+1}{N(1,\eta)+2} + 1 \right] A_\eta^{(n-1)} \leqslant \left[ (n-1) \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)(n-2)} \cdots \frac{1}{2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right] \mathcal{J}_{n-1}^{(3)} = (n-1)\,\mathcal{J}_{n-1}^{(3)}.$$

Следовательно, $\mathcal{J}_n^{(3)} \leqslant (n-1)!$. Аналогично из (25) и (24) следует $\mathcal{J}_n^{(3)} \geqslant \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Итак, для величины $K_n$ имеем

$$|K_n| \sim \mathrm{O}(a^n \cdot n!). \tag{26}$$

Возникает вопрос: что понимать под суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n K_n? \tag{27}$$

Таким образом, как в случае конечного объема (ряд (15)), так и в случае бесконечного объема (ряд (27)) поведение рядов определяется одной и той же оценкой (26), которая указывает на то, что эти ряды не являются абсолютно сходящимися. С другой стороны, если в выражениях, определяющих $K_n$, произвести интегрирование по интерполяционным параметрам $s_k$, то легко установить (хотя технически это и не просто), что

$$K_n = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{3(n-1)}} (d\xi)_{n-1} \varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}),$$

где $\varphi_n$ — известные функции Урселла, и для регулярных потенциалов [2, 3] справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^{3(n-1)}} (d\xi)_{n-1} |\varphi_n(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})| \leqslant (\mathrm{const})^{n-1} n!,$$

гарантирующая абсолютную сходимость и необходимые аналитические свойства функции

$$f(z) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_\Lambda.$$

Это, в свою очередь, позволяет построить для ряда Бриджеса — Федербуша — Майера (27) преобразование Бореля

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{n!} t^n$$

и, применяя теорему Ватсона [9], трактовать сумму (27) как интеграл

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} h(zt)\, dt.$$

В случае $M$-частичных потенциалов можно использовать модифицированное борелевское преобразование

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_n}{[n(m-1)]!} t^n,$$

а соответствующую сумму, как асимптотическое разложение функции

$$f(z) = \int_0^{\infty} g(zt^{M-1}) e^{-t} dt.$$

3. Сходимость РБФМ для трехчастичного потенциала специального вида. Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих посредством парного потенциала

$$v_{ij} = \Phi(x_i - x_j) + \beta\tilde{v}(x_i - x_j)^2, \tag{28}$$

и трехчастичного потенциала

$$v_{ijk} = \beta[\tilde{v}(x_i - x_j)\tilde{v}(x_i - x_k) + \tilde{v}(x_j - x_i)\tilde{v}(x_j - x_k) + \tilde{v}(x_k - x_i)\tilde{v}(x_k - x_j)]. \tag{29}$$

Потенциальная энергия взаимодействия $N$-частиц

$$U_N = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} v_{ij} + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant N} v_{ijk} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \Phi(x_i - x_j) + \frac{1}{2}\beta \sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N} \tilde{v}(x_i - x_k)\Big)^2. \tag{30}$$

Функции $\Phi(x)$ и $\tilde{v}(x)$ удовлетворяют обычным условиям:

$$\Phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^3),\ \tilde{v}(x) \in L^1(\mathbb{R}^3), \tag{31}$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} \Phi(x_i - x_j) \geqslant -BN, \tag{32}$$

$$\Phi(x) = \Phi(-x), \quad \tilde{v}(x) = \tilde{v}(-x). \tag{33}$$

Взаимодействие вида (28)—(30) возникает в задаче описания диффузионной иерархии [10].

Прежде чем приступать к построению РБФМ, выполним преобразование, позволяющее свести задачу к парному потенциалу взаимодействия:

$$Z_N^{\Lambda} = \frac{1}{N!}\int_{\Lambda^N} (dx)_N e^{-\beta U_N} = \frac{1}{N!}\int_{\Lambda_N} (dx)_N \exp\Big\{-\beta\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(x_i - x_j)\Big\} \times \prod_{k=1}^{N}\exp\Big\{-\frac{\beta^2}{2}\Big(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}\tilde{v}(x_i - x_k)\Big)^2\Big\} = \frac{1}{N!}\int_{\Lambda^N}(dx)_N \exp\Big\{-\beta\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\Phi(x_i - x_j)\Big\} \times \prod_{k=1}^{N}\Bigg(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_0^{\infty} dt_k e^{-\frac{1}{2}t_k^2} e^{i\beta t_k \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\tilde{v}_{jk}}\Bigg). \tag{34}$$

Выражение (34) удобно переписать в виде

$$Z_N^{\Lambda} = \frac{1}{N!}\int_{\tilde{\Lambda}^N} (d\tilde{x})_N \exp\Big\{-\beta\sum_{1\leqslant j<k\leqslant N}\tilde{v}_{jk}\Big\},$$

где

$$d\tilde{x}_k = (2\pi)^{-1/2} dx_k dt_k \exp\Big\{-\frac{1}{2}t_k^2\Big\}, \quad \tilde{\Lambda} \doteq \Lambda\otimes\mathbb{R},$$

$$\tilde{v}_{jk} = \Phi(x_j - x_k) - i(t_j + t_k)\tilde{v}(x_j - x_k).$$

Дальнейшее построение аналогично случаю двухчастичного взаимодействия [4]. В результате получим

$$Z_\Lambda = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} z^n K_n^\Lambda\right\}, \quad K_n^\Lambda = \sum_{\eta:|\eta|=n} K_n^\Lambda(\eta),$$

$$K_n^\Lambda(\eta) = \frac{(-\beta)^{n-1}}{n} \int\limits_{\tilde{\Lambda}^n} (d\tilde{x})_n \int\limits_0^1 (ds)_{n-1} \left(\prod_{i=2}^{n} s_{\eta(i)} \dots s_{i=2}\right) \prod_{k=2}^{n} \tilde{U}_{\eta(k)k} e^{-\beta \tilde{U}(s)_{n-1}},$$

где

$$\tilde{U}(s)_{n-1} = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} s_j \dots s_{k-1} \tilde{U}_{jk} = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} s_j \dots s_{k-1} \Phi_{jk} - i \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} s_j \dots s_{k-1} \times$$

$$\times (t_j + t_k)\, \tilde{v}_{jk}. \tag{35}$$

Из выпуклости и условия (32) следует

$$\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} s_j \dots s_k \Phi_{jk} \geqslant -Bn,$$

откуда, в свою очередь, с учетом (35) следует оценка

$$|\exp\{-\beta \tilde{u}(s)_{n-1}\}| \leqslant e^{Bn}.$$

Введем еще одно обозначение

$$v_0 = \max\{\|\Phi\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}, \|\tilde{v}\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Lambda^n} (dx)_n \prod_{k=2}^{n} |\tilde{u}_{\eta(k)k}| \leqslant v_0^{n-1} |\Lambda| \prod_{k=2}^{n} (1 + |t_{\eta(k)}| + |t_k|). \tag{36}$$

Произведение в (36) представим суммой

$$\prod_{k=2}^{n} (1 + |t_{\eta(k)}| + |t_k|) = \sum_{i_2,\dots,i_n} t_{i_2}^{\#} \dots t_{i_n}^{\#}, \tag{37}$$

где каждое из $t_{i_k}^{\#}$ принимает одно из 3-х значений $1$, $|t_{\eta(k)}|$ или $|t_k|$. Сумма содержит $3^{n-1}$ слагаемое. Учитывая, что в произведении (37) степень переменной $t_k$ для данного $\eta$ не превышает $(d_\eta(k) + 1)$ (см. определение $d_\eta(k)$, формула (23)), а также элементарную оценку гауссовых интегралов

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} |t|^n dt \leqslant (n-1)!! \leqslant (n-1)!,$$

получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (dt)_n e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} t_k^2} \prod_{k=2}^{n} (1 + |t_{\eta(k)}| + |t_k|) \leqslant 3^{n-1} \prod_{k=1}^{n} d_\eta(k)!.$$

Используя оценку (22), окончательно имеем

$$|K_n^\Lambda| \leqslant (3\beta v_0)^{-1} (12\beta v_0 e^B)^n |\Lambda|. \tag{38}$$

Оценка (38) обеспечивает существование предела (18), а следовательно, и предела $\lim\limits_{\Lambda\uparrow\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\Lambda|} \ln Z_\Lambda$, при условии $12\beta|z|v_0 e^B < 1$.


1. *Greenberg W.* Thermodynamic States of Classical Systems // Communs Math. Phys.— 1971.— 22.— P. 259—268.
2. *Duneau M., Souillard B.* Cluster Properties of Lattice and Continuous Systems // Ibid.— 1976.— 47.— P. 155—166.

3. *Duneau M., Souillard B., Iagolnitzer D.* Decay of Correlations for Infinite — Range Interactions // J. Math. Phys.— 1975.— **16**.— P. 1662—1664.
4. *Brydges D., Federbush P.* A New Form of the Mayer Expansion in Classical Statistical Mechanics // Ibid.— 1978.— **19**.— P. 2064—2067.
5. *Brydges D.* A Short Course of Cluster Expansions // Les Houches, Session XLIII: K. Osterwalder and R. Stora eds.— 1984.
6. *Rebenko A. L.* Mathematical Foundations of Equilibrium Classical Statistical Mechanics of Charged Particles // Russian Math. Surveys.— 1988.— **43**, N 3.— *C.* 65—116.
7. *Battle G. A., Federbush P.* A Note on Cluster Expansions, Tree—Graph Identities, Extra $1/N!$ Factors // Lett. Math. Phys.— 1984.— 8.— P. 55—57.
8. *Battle G. A.* A New Combinatoric Estimate for Cluster Expansions // Communs Math. Phys. 1984.— **94**.— P. 133—139.
9. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics.— New York, London: Acad. press, 1972.— Vol. 4.— 300 p.
10. *Skrypnik V. I.* Correlation Functions of Infinite System of Interacting Brownian Particles. Local in Time Evolution Close to Equilibrium // J. Statis. Phys.— 1984.— 38.— P. 587—602.

Получено 13,06,90