УДК 517.948

С. В. ПЕРЕВЕРЗЕВ, д-р физ.-мат. наук,
К. Ш. МАХКАМОВ, стажер (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Галеркинская информация, гиперболический крест и сложность операторных уравнений

Найден точный степенной порядок сложности приближенного решения одного класса операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Выясняется, что оптимальный степенной порядок реализуется алгоритмом, использующим галеркинскую информацию, связанную с гиперболическим крестом.

В качестве следствия найден точный степенной порядок сложности приближенного решения интегральных уравнений Вольтерра с ядрами и свободными членами из соболевских классов.

Знайдено точний степеневий порядок складності наближеного розв'язку одного класу операторних рівнянь у гільбертовому просторі. Виявляється, що оптимальний степеневий порядок реалізує алгоритм, що використовує галеркінську інформацію, зв'язану з гіперболічним хрестом.

Як наслідок цього результату знайдено точний степеневий порядок складності наближеного розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерра з ядрами і вільними членами, що належать до соболевських класів.

1. Постановка задачи. Пусть X — гильбертово пространство, а X^r — нормированное подпространство X, причем для любого элемента $f \in X^r$ $\| f \|_X \leqslant \| f \|_{X^r}$.

Предположим, что существует ортонормированный базис $l_1, l_2, l_3, \ldots$ $\ldots, l_n, \ldots$ в X такой, что

$$\| I - P_n \|_{X^r \to X} \leqslant cn^{-r}, \tag{1}$$

где P_n — ортопроектор на пространство

$$F_n = \operatorname{span} \{l_1 l_2, \ldots, l_n\},$$

являющееся линейной оболочкой первых n элементов $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Обозначим через $\Psi^r = \Psi^r(\alpha, \beta, \gamma)$ класс операторных уравнений вида

$$z = Hz + f, \tag{2}$$

где

$$f \in X_\gamma^r = \{f : f \in X^r, \| f \|_{X^r} \leqslant \gamma\},$$

$$H \in \mathscr{H}^r(\alpha, \beta) = \{H;\, H : X \to X^r,\, H^* : X \to X^r,\, \|H\|_{X\to X^r} \leqslant \alpha_1,\, \|H^*\|_{X\to X^r} \leqslant \alpha_2,$$
$$\|(I - H)^{-1}\|_{X\to X} \leqslant \beta\}.$$

Следуя Дж. Траубу и X. Вожьняковскому [1, с. 100], рассмотрим задачу об оптимизации алгоритмов приближенного решения уравнений (2) по сложности.

Под способом задания информации об уравнениях класса Ψ^r будем понимать произвольный набор $T = \{\delta_i\}_{i=1}^m$ линейных непрерывных функционалов δ_i, из которых $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k$ определены на множестве $\mathscr{H}^r$, а $\delta_{k+1}, \ldots, \delta_m$ — на множестве X^r. При фиксированном наборе T каждому уравнению (2) ставится в соответствие числовой вектор

$$T(H, f) = (\delta_1(H), \ldots, \delta_k(H),\ \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_m(f)), \tag{3}$$

называемый информацией об уравнении (2). Через $\mathscr{T}_M$ обозначим множество способов задания информации, определяемых наборами не более чем из M функционалов.

Под алгоритмом A приближенного решения уравнений из Ψ^r будем понимать оператор, сопоставляющий информации (3) в качестве приближенного решения уравнения (2) функцию $A(T, H, f) \in X$. При этом для определения $A(T, H, f)$ разрешается выполнить лишь некоторое число элементарных операций над компонентами вектора (3). К элементарным операциям мы относим простейшие арифметические и логические операции. Через $\mathcal{A}_N(T)$ обозначим множество алгоритмов A, которые используют информацию $T(H, f)$ и требуют для построения $A(T, H, f)$ выполнения не более чем N элементарных операций над компонентами $T(H, f)$. Рассматривая алгоритмы из $\mathcal{A}_N(T)$, естественно полагать, что $T \in \mathscr{T}$ при $M \leqslant N$. В противном случае любой алгоритм из $\mathcal{A}_N(T)$ не использует всю информацию, представленную компонентами вектора $T(H, f)$. Как обычно, погрешностью алгоритма A на классе Ψ^r будем называть величину

$$e(\Psi^r, A, X) = \sup_{\substack{z = Hz + f \\ H \in \mathscr{H}^r,\, f \in X^r}} \|z - A(T, H, f)\|_X.$$

Положим

$$E_N(\Psi^r, X) = \inf_{\substack{T \in \mathscr{T}_M \\ M \leqslant N}} \inf_{A \in \mathscr{A}_N(T)} e(\Psi^r, A).$$

В последнее время (см. [1] и библиографию к ней) возрос интерес к оценкам сложности приближенного решения различных задач. Под сложностью в данном случае понимается минимальное число элементарных операций, требуемых для нахождения решения с заданной точностью. Величина E_N показывает, какую минимальную погрешность можно получить на классе, выполнив N элементарных операций. Таким образом, величина $E_N(\Psi^r, X$ характеризует сложность приближенного решения уравнений из Ψ^r.

В настоящей статье найден точный степенной порядок величины $E_N(\Psi^r, X)$ и указаны способ задания информации и алгоритм, реализующие оптимальный порядок. Полученные результаты применены для оценки сложности одного класса интегральных уравнений Вольтерра.

2. Оценка снизу. Для оценки снизу величины E_N нам потребуется предтабличный поперечник, введенный К. И. Бабенко [2, с. 182],

$$\delta_N(\mathfrak{M}, X) = \inf_{\varphi : \mathfrak{M} \to R_N} \sup_{x \in \mathfrak{M}} \operatorname{diam}[\varphi^{-1} \circ \varphi(x)],$$

где $\mathfrak{M}$ — некоторый компакт в X, точная нижняя грань берется по всевозможным отображениям $\mathfrak{M}$ в N-мерное евклидово пространство R_N, а

$$\operatorname{diam}[\varphi^{-1} \circ \varphi(x)] = \sup_{z, y \in \varphi^{-1} \circ \varphi(X)} \|z - y\|_X.$$

В дальнейшем соотношение $a_m \ll b_m$ будет означать, что начиная с некоторого m_0, $a_m \leqslant c b_m$, $m \geqslant m_0$, где постоянная c не зависит от m. Кроме того, $a_m \asymp b_m$ означает, что одновременно выполняются соотношения $a_m \ll b_m$ и $b_m \ll a_m$.

Лемма 1. *При $r = 1, 2, 3 \ldots$ для сложности уравнений из класса $\Psi^r = \Psi^r(\alpha, \beta, \gamma)$ справедлива оценка $E_N(\Psi^r, X) \gg \delta_N(X^r_{\gamma_2}, X)$, где $\gamma_2 = \gamma/(1+\alpha_1)$, $X^r_{\gamma_2}$ — шар радиуса γ_2 с центром в нуле, а γ, α_1 — параметры, входящие в определение класса $\Psi^r(\alpha, \beta, \gamma)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом $H_0 \in \mathscr{H}^r$ и рассмотрим шар $X^r_{\gamma_2}$. Очевидно, что при $\gamma_2 = \gamma/(1+\alpha_1)$ множество $\Phi_{\gamma_2} = \{g : g \in X^r, g = \varphi - H_0\varphi, \varphi \in X^r_{\gamma_2}\}$ принадлежит X^r_γ. При выбранном γ_2 множество $[H_0, \Phi_{\gamma_2}]$ уравнений (2) при $H = H_0$ и $f \in \Phi_{\gamma_2}$ принадлежит Ψ^r и, как легко видеть, множество их решений заполняет шар $X^r_{\gamma_2}$.

Зафиксируем произвольным образом способ задания информации $T_0 \in \mathscr{I}_M$, $M \leqslant N$, и рассмотрим непрерывное отображение $\omega : X^r_{\gamma_2} \to R_M$, ставящее в соответствие решению $z \in X^r_{\gamma_2}$ уравнения $z = H_0 z + f$ из $[H_0, \Phi_{\gamma_2}]$ вектор

$$\omega(z) = T_0(H_0, f) = (\delta_1(H_0), \delta_2(H_0), \ldots, \delta_k(H_0), \delta_{k+1}(f), \ldots, \delta_M(f)).$$

Для фиксированного достаточно малого $\varepsilon > 0$ выберем $z_0 \in X^r_{\gamma_2}$ так, чтобы

$$\operatorname{diam} \omega^{-1} \cdot \omega(z_0) > (1-\varepsilon) \sup_{z \in X^r_{\gamma_2}} \operatorname{diam} \omega^{-1} \cdot \omega(z).$$

Для того же $\varepsilon > 0$ выберем $z_1, z_2 \in \omega^{-1} \cdot \omega(z_0)$, для которых

$$\| z_1 - z_2 \|_X > (1-\varepsilon) \operatorname{diam} \omega^{-1} \cdot \omega(z_0) \geqslant (1-\varepsilon)^2 \sup_{z \in X^r_{\gamma_2}} \operatorname{diam} \omega^{-1} \cdot \omega(z).$$

Из последнего неравенства и определения предтабличного поперечника $\delta_M(X^r_{\gamma_2}, X)$ следует

$$\| z_1 - z_2 \|_X \gg \delta_M(X^r_{\gamma_2}, X) \geqslant \delta_N(X^r_{\gamma_2}, X). \tag{4}$$

Так как $z_1, z_2 \in \omega^{-1} \circ \omega(z_0) \in X^r_{\gamma_2}$, то

$$\omega(z_1) = T_0(H_0, f_1) = \omega(z_2) = T_0(H_0, f_2) = \omega(z_0), \tag{5}$$

где f_1 и f_2 — свободные члены уравнений

$$z = H_0 z + f_1, \quad z = H_0 z + f_2, \tag{6}$$

решениями которых являются элементы z_1 и z_2 соответственно. Из (5) следует, что при любом алгоритме $A_0 \in \mathscr{A}_N(T_0)$ приближенные решения уравнений (6) совпадают, т. е. $A_0(T_0, H_0, f_1) = A_0(T_0, H_0, f_2)$. Но тогда

$$\sup_{\substack{z = Nz + f \\ H \in \mathscr{H}, f \in X^r_\gamma}} \| z - A_0(T_0, H, f) \|_X \geqslant \sup_{\substack{z = H_0 z + f \\ f \in \Phi_{\gamma_2}}} \| z - A_0(T_0, H_0, f) \|_X \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \left(\| z_1 - A_0(T_0, H_0, f_1) \|_X + \| z_2 - A_0(T_0, H_0, f_2) \|_X \right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \| z_1 - z_2 \|_X \gg \delta_N(X^r_{\gamma_2}, X).$$

В силу произвольности $T_0 \in \mathscr{I}_M$ и $A_0 \in \mathscr{A}_N(T_0)$ утверждение леммы следует из последнего соотношения.

3. Галеркинская информация. Как известно, по методу Галеркина приближенное решение $z_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k l_k$ уравнения (2) определяется из уравнения $z_n = P_n H z_n + P_n f$. При этом неизвестные коэффициен-

ты c_k, $k = \overline{1, n}$, находятся из системы линейных уравнений

$$c_k = (f, l_k) + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (l_k, Hl_\nu), \tag{7}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в X.

Таким образом, для реализации метода Галеркина необходимо располагать значениями функционалов вида (f, l_k), (l_k, Hl_ν). Способы задания информации, определяемые наборами таких функционалов, будем называть галеркинской информацией.

Пусть

$$Q_m = (2^{2m-1}, 2^{2m}] \times \{1\} \bigcup_{k=1}^{m} [1, 2^{2m-k}] \times (2^{k-1}, 2^k].$$

Рассмотрим галеркинскую информацию

$$T_m (H, f) = ((l_k, Hl_\nu), (f, l_n); \ (k, \nu) \in Q_m, \ n = \overline{1, 2^{2m}}).$$

Легко видеть, что

$$T_m \in \mathscr{T}_M, \ M \asymp m \cdot 2^{2m}. \tag{8}$$

Поставим в соответствие каждому оператору $H \in \mathscr{H}^r$ оператор

$$H_m = H_m (H) := \sum_{k=1}^{m} P_{2^{2m-k}} H (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + P_{2^{2m}} H P_1, \tag{9}$$

где $P_{2^m}\varphi = \sum_{i=1}^{2^m} l_i (l_i, \varphi)$, и рассмотрим алгоритм $A_m \in \mathcal{A}_N (T_m)$, при котором каждому уравнению (2) из класса Ψ^r в качестве приближенного решения сопоставляется элемент

$$z(A_m) = z_n + (I - H_m P_{2^n})^{-1} \cdot (P_{2^{2m}} f + H_m z_n - z_n), \tag{10}$$

где z_n — решение уравнения

$$z_n = H_m P_{2^n} z_n + P_{2^{2m}} f, \quad n = \left[\frac{2m}{3}\right]. \tag{11}$$

Теорема 1. *Если для предтабличного поперечника $\delta_N (X^r_\gamma, X)$ справедлива оценка $\delta_N (X^r_\gamma, X) \gg N^{-r}$, то*

$$N^{-r} \leqslant E_N (\Psi^r, X) \leqslant cN^{-r} \log^{r+1} N. \tag{12}$$

При этом оптимальный порядок $E_N (\Psi^r, X)$ в степенной шкале доставляют галеркинская информация T_m и алгоритм A_m при $m = [\log N]$, $\log N = \log_2 N$.

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется ряд лемм.

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *При $r = 1, 2, \ldots$ для оператора $H \in \mathscr{H}^r$*

$$\| H - H_m \|_{X \to X} \ll 2^{-mr}, \tag{13}$$

$$\| H - H_m \|_{X^r \to X} \ll m \cdot 2^{-2mr}. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем неравенство (14). Неравенство (13) доказывается аналогично. Прежде всего заметим, что при $H \in \mathscr{H}^r$

$$\| H - HP_{2^m} \|_{X^r \to X} \ll 2^{-2mr}. \tag{15}$$

В самом деле

$$\| H - HP_{2^m} \|_{X^r \to X} = \sup_{\varphi \in X^r_1} \sup_{g \in X_1} | ((H - HP_{2^m}) (I - P_{2^m}) \varphi, g) | =$$

$$= \sup_{\varphi\in X_1^r} \sup_{g\in X_1} |((I-P_{2^m})\varphi, H^*g-P_{2^m}H^*g)| \leqslant \|I-P_{2^m}\|^2_{X^r\to X} \|H^*\|_{X\to X^r} \ll 2^{-2mr}.$$

Учитывая представление

$$HP_{2^m} = \sum_{k=1}^{m} H(P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + HP_1$$

и вид оператора H_m, для любого $z\in X^r$ находим

$$\|(H-H_m)z\|_X \leqslant \|(H-HP_{2^m})z\|_X + \|(HP_{2^m}-H_m)z\|_X \leqslant \|(H-$$
$$-HP_{2^m})z\|_X + \sum_{k=1}^{m} \|(H-P_{2^{2m-k}}H)(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})z\|_X + \|(H-P_{2^{2m}}H)P_1z\|_X. \tag{16}$$

Заметим, что

$$\|(H-P_{2^{2m-k}}H)(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})z\|_X \ll 2^{-(2m-k)r}\|H(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})z\|_{X^r} \ll$$
$$\ll 2^{-(2m-k)r}\|H\|_{X\to X^r}\|(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})z\|_X \ll 2^{-(2m-k)r}(\|z-P_{2^k}z\|_X + \|z-$$
$$-P_{2^{k-1}}z\|_X) \ll 2^{-(2m-k)r}\|z\|_{X^r}(2^{-kr}+2^{-(k-1)r}) \ll 2^{-2mr}\|z\|_{X^r}.$$

Таким образом, в силу последнего неравенства справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{m} \|(H-P_{2^{2m-k}}H)\cdot(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})z\|_X \ll cm\cdot 2^{-2mr}\|z\|_{X^r}, \tag{17}$$

$$\|(H-P_{2^{2m}}H)P_1z\|_X \ll \|(I-P_{2^{2m}})\|_{X^r\to X}\cdot\|HP_1z\|_{X^r} \ll c\cdot 2^{-2mr}\|z\|_{X^r}. \tag{18}$$

Подставляя (15), (17), (18) в (16), получаем

$$\|(H-H_m)z\|_X \ll m\cdot 2^{-2mr}\|z\|_{X^r}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $g=\sum_{i=1}^{2^{2m}} \alpha_i l_i$ — *произвольный элемент из* $F_{2^{2m}}$. *Тогда для представления элемента* $H_m g \in F_{2^{2m}}$ *в стандартном виде*

$$H_m g = \sum_{i=1}^{2^{2m}} \beta_i l_i \tag{19}$$

требуется выполнить $p \ll m\cdot 2^{2m}$ *арифметических операций над коэффициентами* α_i *и значениями функционалов из* T_m.

Доказательство. Из определения оператора H_m следует

$$H_m g = H_m\left(\sum_{i=1}^{2^{2m}} \alpha_i l_i\right) = \sum_{i=1}^{2^{2m}} \alpha_i H_m l_i. \tag{20}$$

Для каждого $i=1,2,\dots,2^{2m}$ через $n(i)$ обозначим такое неотрицательное число, что $i\in(2^{n(i)-1}, 2^{n(i)}]$, $0\leqslant n(i)\leqslant 2m$. Теперь заметим, что

$$H_m l_i = \sum_{k=1}^{n(i)-1} P_{2^{2m-k}}H(P_{2^k}-P_{2^{k-1}})l_i + P_{2^{2m-n(i)}}Hl_i + \sum_{k=n(i)+1}^{m} P_{2^{2m-k}}H \times$$
$$\times (P_{2^k}-P_{2^{k-1}})l_i = P_{2^{2m-n(i)}}Hl_i = \sum_{\nu=1}^{2^{2m-n(i)}} l_\nu(l_\nu, Hl_i).$$

Подставляя полученное выражение в (20), находим

$$H_m g = \sum_{i=1}^{2^{2m}} \sum_{\nu=1}^{2^{2m-n(i)}} \alpha_i (l_\nu, Hl_i)\, l_\nu. \tag{21}$$

Пусть теперь $\sigma(\nu) = \{i : 2^{2m-n(i)} \geqslant \nu\}$. Тогда (21) примет вид

$$H_m g = \sum_{\nu=1}^{2^{2m}} l_\nu \sum_{i\in\sigma(\nu)} \alpha_i (l_\nu, Hl_i).$$

Из последнего представления следует, что число p арифметических операций (сложений и умножений), требуемых для представления $H_m g$ в виде (19), равно

$$p = \sum_{\nu=1}^{2^{2m}} (2 \operatorname{card} \sigma(\nu) - 1), \tag{22}$$

где $\operatorname{card}\sigma$ — число элементов множества σ. Оценим теперь $\operatorname{card}\sigma(\nu)$. По определению $i \in \sigma(\nu)$, если $i \leqslant 2^{n(i)} \leqslant 2^{2m}/\nu$, но $\operatorname{card}\sigma(\nu) \leqslant 2^{2m}/\nu$ и из (22) следует

$$p \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^{2^{2m}} \frac{2^{2m}}{\nu} - 2^{2m} \ll 2^{2m+1} m - 2^{2m} \ll m \cdot 2^{2m}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *При алгоритме $A_m \in \mathcal{A}(T_m)$ для представления приближенного решения $z(A_m) = A_m(T_m, H, f)$ любого уравнения из Ψ^r в стандартной форме* (19) *требуется выполнить не более $cm\cdot 2^{2m}$ арифметических операций над значениями функционалов из набора T_m.*

Доказательство. Решение уравнения (11) имеет вид

$$z_n = \sum_{k=1}^{2^n} c_k H_m l_k + P_{2^{2m}} f. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (11) и учитывая, что $(l_k, H_m l_\nu) = (l_k, Hl_\nu)$, $k, \nu = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2^n$, $n = \left[\frac{2}{3} m\right]$, находим

$$\sum_{k=1}^{2^n} c_k H_m l_k = \sum_{k=1}^{2^n} (f, l_k) H_m l_k + \sum_{k=1}^{2^n} H_m l_k \sum_{\nu=1}^{2^n} c_\nu (l_k, Hl_\nu).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов c_k получим систему линейных алгебраических уравнений

$$c_k = (f, l_k) + \sum_{\nu=1}^{2^n} c_\nu (l_k, Hl_\nu), \tag{24}$$

для решения которой при $n = [\frac{2m}{3}]$ требуется выполнить не более $p \ll$ $\ll (2^n)^3 \asymp 2^{2m}$ арифметических операций. После этого, как следует из (23) и леммы 3, для представления z_n в виде (19) требуется выполнить еще не более $cm\cdot 2^{2m}$ арифметических операций.

Для завершения определения $z(A_m)$ нужно представить функцию

$$P_{2^{2m}} f + H_m z_n - z_n \tag{25}$$

в виде (19) (это требует не более $O(m\cdot 2^{2m})$ арифметических операций), а затем найти элемент $u = (I - H_m P_{2^n})^{-1} (P_{2^{2m}} f - z_n + H_m z_n)$, т.е. еще раз решить систему вида (24) (еще $O(2^{2m})$ операций). После этого нужно найти $z_n + u$, что потребует еще не более $O(2^{2m})$ операций на приведение подобных членов. Лемма доказана.

Оценим теперь погрешность алгоритма A_m на классе уравнений Ψ^r. Поставим в соответствие каждому уравнению (2) уравнение

$$\hat{z} = H_m \hat{z} + P_{2^{2m}} f. \tag{26}$$

Из леммы 2 и теоремы о разрешимости приближенного уравнения [3, с. 517] следует существование зависящей лишь от α, β и r постоянной c такой, что начиная с некоторого m для любого оператора $H \in \mathcal{H}^r$

$$\| (I - H_m)^{-1} \|_{X \to X} \leqslant \frac{\beta}{1 - c\beta \cdot 2^{-mr}} \leqslant c. \tag{27}$$

Но тогда в силу леммы 2 из (2) и (1) имеем

$$\| z - \hat{z} \|_X \leqslant \| (I - H_m)^{-1} \|_{X \to X} (\| f - P_{2^{2m}} f \|_X + \| (H - H_m) z \|_X) \leqslant$$
$$\leqslant c \cdot 2^{-2mr} \| f \|_{X^r} + m \cdot 2^{-2mr} \| z \|_{X^r} \leqslant c \cdot 2^{-2mr} \| f \|_{X^r} + m \cdot 2^{-2mr} \| H \|_{X \to X^r} \| (I -$$
$$- H)^{-1} \|_{X \to X} \leqslant cm \cdot 2^{-2mr}. \tag{28}$$

Покажем теперь, что

$$\| \hat{z} - z(A_m) \|_X \leqslant c \cdot 2^{-2mr}. \tag{29}$$

Для доказательства этого неравенства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть $H \in \mathcal{H}^r$, $f \in X^r$, $r = 1, 2, \ldots$, а H_m имеет вид* (9). *Тогда при $n = \left[\frac{2m}{3}\right]$*

$$\| H_m - H_m P_{2^n} \|_{X \to X} \leqslant c \cdot 2^{-\frac{2}{3}mr}, \tag{30}$$

$$\| H_m - H_m P_{2^n} \|_{X^r \to X} \leqslant c \cdot 2^{-\frac{4}{3}mr}. \tag{31}$$

Доказательство. Докажем второе неравенство. (Первое неравенство доказывается аналогично.) В силу соотношения (15) для $f \in X^r$, $H \in \mathcal{H}^r$

$$\| (H - HP_{2^n}) f \|_X \leqslant c \cdot 2^{-2nr} \| f \|_{X^r} \leqslant c \cdot 2^{-\frac{4}{3}mr} \| f \|_{X^r}. \tag{32}$$

Тогда из (32) и леммы 2 получаем

$$\| (H_m - H_m P_{2^n}) f \|_X \leqslant \| (H - H_m) f \|_X + \| (H - HP_{2^n}) f \|_X +$$
$$+ \| (H - H_m) P_{2^n} f \|_X \leqslant m \cdot 2^{-2mr} \| f \|_{X^r} + c \cdot 2^{-\frac{4}{3}mr} \| f \|_{X^r} + \| (H -$$
$$- H_m) f \|_X + \| (H - H_m)(f - P_{2^n} f) \|_X \leqslant c \cdot 2^{-\frac{4}{3}mr} \| f \|_{X^r} +$$
$$+ m \cdot 2^{-2mr} \| f \|_{X^r} \leqslant c \cdot 2^{-\frac{4}{3}mr} \| f \|_{X^r}.$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству неравенства (29). Из первого неравенства леммы 5 и (27) следует, что оператор $(I - H_m P_{2^n})^{-1}$ ограничен, т. е. при достаточно больших n

$$\| (I - H_m P_{2^n})^{-1} \|_{X \to X} \leqslant c, \tag{33}$$

где постоянная c зависит лишь от α, β, r. Кроме того, из (10) получаем

$$z(A_m) = z_n + (I - H_m P_{2^n})^{-1} (I - H_m)(\hat{z} - z_n) = \hat{z} - (I - H_m P_{2^n})^{-1} (H_m -$$
$$- H_m P_{2^n})(I - H_m P_{2^n})^{-1} (H_m - H_m P_{2^n}) \hat{z}.$$

Из последнего соотношения, (33), леммы 5 и (28) имеем

$$\| \hat{z} - z(A_m) \|_X \leqslant c \cdot 2^{-\frac{2}{3}mr} \| (H_m - H_m P_{2^n}) \hat{z} \|_X \leqslant c \cdot 2^{-\frac{2}{3}mr} \| (H_m - H_m P_{2^n}) z \|_X + \\ + c \cdot 2^{-\frac{2}{3}mr} \| (H_m - H_m P_{2^n})(z - \hat{z}) \|_X \leqslant c \cdot 2^{-2mr} \| z \|_{X^r} + cm \cdot 2^{-\frac{10}{3}mr} \| z \|_{X^r} \leqslant \\ \leqslant c \cdot 2^{-2mr},$$

где постоянная c зависит лишь от параметров, входящих в определение класса Ψ^r. Неравенство (29) доказано. Из неравенств (28), (29) получаем неравенство

$$e(\Psi^r, A_m, X) \ll m \cdot 2^{-2mr}. \tag{34}$$

Утверждение теоремы 1 следует теперь из леммы 1 (оценка снизу), леммы 4 ($A_m \in \mathcal{A}_N(T_m)$, $N \asymp m \cdot 2^{2m}$) и оценки (34).

5. Оценка сложности интегральных уравнений Вольтерра. Задача об оценке сложности интегральных уравнений с ядрами и свободными членами из некоторых функциональных классов была поставлена Х. Вожьняковским в обзорной статье [4]. Однако ранее К. В. Емельянов и А. М. Ильин [5], А. Ф. Шапкин [6] рассматривали оптимизацию алгоритмов решения уравнений Фредгольма, использующую в качестве информации значения ядра и свободного члена в некоторой системе точек. В работе [7] показано, что эта информация, вообще говоря, не является оптимальной и дан ответ на вопрос Х. Вожьняковского в случае уравнений Фредгольма. В дальнейшем для указанных уравнений эти исследования продолжены в работе [8]. Что же касается уравнений Вольтерра, то для них нам не известны работы, посвященные оптимизации по сложности.

Пользуясь теоремой 1, найдем точный степенной порядок сложности уравнений Вольтерра

$$z(t) = \int_0^t h(t, \tau) z(\tau) d\tau + f(t) \tag{35}$$

с ядрами из соболевских классов.

Пусть $X = L_2$ — пространство суммируемых в квадрате на $[0, 1]$ функций с нормой

$$\| \varphi \|_{L_2} = \left(\int_0^1 \varphi^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через W_2^1 обозначим соболевское пространство непрерывных на $Q = [0,1] \times \times [0,1]$ функций $h(t, \tau)$, имеющих суммируемые в квадрате на Q частные производные $\partial h / \partial t$, $\partial h / \partial \tau$. При этом

$$\| h \|_{W_2^1} = \| h \|_{C(Q)} + \left\| \frac{\partial h}{\partial t} \right\|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\partial h}{\partial \tau} \right\|_{L_2(Q)},$$

$$\| g \|_{L_2(Q)} = \left(\int_Q g^2(t, \tau) dt d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $r = 1$ в качестве X^r возьмем пространство L_2^1 абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций φ, у которых производные $\varphi' \in L_2$, причем $\| \varphi \|_{L_2^1} = = \| \varphi \|_{L_2} + \| \varphi^1 \|_{L_2}$.

Через $B_2^1 = B_2^1(\alpha)$ обозначим множество интегральных операторов Вольтерра вида

$$Hz(t) = \int_0^t h(t, \tau) d\tau; \; h(t, \tau) \in W_2^1, \; \| h \|_{W_2^1} \leqslant \alpha.$$

Легко видеть, что оператор H^*, сопряженный к оператору $H \in B_2^1$, имеет вид

$$H^* z(t) = \int_t^1 h(\tau, t) z(\tau) d\tau.$$

Так как

$$\frac{d}{dt} Hz(t) = h(t, t) z(t) + \int_0^t \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} z(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d}{dt} H^* z(t) = -h(t, t) z(t) + \int_t^1 \frac{\partial h(\tau, t)}{\partial t} z(\tau) d\tau,$$

то очевидно, что при $H \in B_2^1$

$$\| H \|_{L_2 \to L_2^1} \leqslant \alpha_1, \; \| H^* \|_{L_2 \to L_2^1} \leqslant \alpha_2, \tag{36}$$

где α_1, α_2 зависят лишь от α. Кроме того, как известно [3, с. 508], существует постоянная β такая, что

$$\| (I - H)^{-1} \|_{L_2 \to L_2} \leqslant \beta, \; \beta = \beta(\alpha). \tag{37}$$

Обозначим через Ψ_B^1 класс уравнений (35) с операторами $H \in B_2^1(\alpha)$ и свободными членами $f(t)$, заполняющими шар $L_{2,\gamma}^1$ радиуса γ в пространстве L_2^1. Сразу отметим, что в силу соотношения (28) из [2, с. 184] и теоремы 6 из [9, с. 244] для любого γ

$$\delta_N (L_{2,\gamma}^1, L_2) \gg N^{-1}. \tag{38}$$

Соотношения (36), (37) позволяют без изменений повторить для класса Ψ_B^1 весь ход доказательства леммы 1 и с учетом (38) получить оценку

$$E_N (\Psi_B^1, L_2) \gg N^{-1}. \tag{39}$$

В качестве ортонормированного базиса $\{l_i\}$, фигурирующего при определении галеркинской информации $T_m(H, f)$, рассмотрим систему функций Хаара [10] $\{\chi_i\}$. Для ортопроектора $S_n f$ на первые n функций Хаара справедлива оценка [10, с. 82]

$$\| I - S_n \|_{L_2^1 \to L_2} \ll n^{-1}. \tag{40}$$

Если теперь в рамках алгоритма A_m вместо базиса $\{l_i\}$ и проекторов P_k использовать систему Хаара и ортопроекторы S_k, то в силу (40) и теоремы 1 получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Справедливо следующее соотношение:*

$$N^{-1} \ll E_N (\Psi_B^1, L_2) \ll N^{-1} \log^2 N.$$

При этом для класса Ψ_B^1 оптимальный степенной порядок сложности доставляют галеркинская информация T_m и алгоритм A_m, $m = [\log N]$, построенные на базе системы Хаара.

Замечание 1. На практике для приближенного решения уравнений Вольтерра (35) часто применяется алгоритм метода механических квадратур, использующий в качестве информации значения ядра и свободного члена в некоторых точках. Оптимизации таких (квадратурных) алгоритмов посвящена работа [11], из результатов которой следует, что для класса Ψ_B^1 сложность квадратурного алгоритма, использующего n значений ядра и свободного члена, по порядку не ниже, чем $O(n^2)$ при точности $O(n^{-1})$.

Таким образом, алгоритмы метода механических квадратур дают для величины E_N оценку $E_N (\Psi_B^1, L_2) \ll N^{-\frac{1}{2}}$, что существенно хуже, чем оптимальный степенной порядок.

1. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов.— М. : Мир, 1983.— 382 с.
2. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа.— М. : Наука, 1986.— 744 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.
4. *Wozniakowski H.* Information — Based Complexity // Ann. Rev. Comput. Sci.— 1986.— N 1.— P. 319—380.
5. *Емельянов К. В., Ильин А. М.* О числе арифметических действий, необходимом для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма II рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1967.— 7, № 4.— С. 905—910.
6. *Шапкин А. Ф.* О методах решения уравнений Фредгольма, оптимальных на классах функций // Мат. заметки.— 1974.— 15, № 4.— С. 595—602.
7. *Переверзев С. В.* Оценка сложности приближенного решения уравнений Фредгольма второго рода с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 10.— С. 1422—1425.
8. *Шарипов К. К.* Сложность уравнения Фредгольма II рода с ядрами из классов с доминирующей смешанной производной // Там же.— 1990.— 42, № 8.— С. 1138—1145.
9. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 304 с.
10. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды.— М. : Наука, 1984.— 495 с.
11. *Яценко Ю. П., Наубетова Ш. А.* Оптимальные алгоритмы решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода в классах гладких функций // Укр. мат. журн.— 1989.— 41, № 1.— С. 130—133.

Получено 31.10.90