УДК 517.5

*Г. А. Михалин*

# Тауберовы теоремы с остатком для методов суммирования типа методов Гельдера и Чезаро

**1.** Пусть $P_n^{(0)} = 1$, $P_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} p_i P_i^{(\alpha-1)}$, $S_n^{(0)} = H_n^{(0)} = S_n$, $S_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} p_i S_i^{(\alpha-1)}$, $H_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} p_i H_i^{(\alpha-1)}/P_n^{(1)}$, $C_n^{(\alpha)} = S_n^{(\alpha)}/P_n^{(\alpha)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\alpha = 1, 2, \ldots$, $(S_n)$ — последовательность с элементами из отделимого локально выпуклого пространства $F$ [1], $p_n > 0\,(\forall n)$. Зададим последовательности $(\mu_n)$ и $(\sigma_n)$ с положительными членами и нуль пространства $F$ назовем $(P, \mu, \sigma)$-точкой последовательности $(S_n)$, если существуют $(n_i)$, $(m_i)$, замкнутые гиперплоскости $H_i = \{x \in F; \varphi_i(x) = 0\}$, $i = 1, 2, \ldots$, определяемые непрерывными линейными формами $\varphi_i : F \to \mathbb{R}$, и элементы $x_i \in F : \varphi_i(x_i) = 1\,(\forall i)$, для которых

a) $(\forall i)(\forall n \in [n_i; m_i])(\exists \alpha_{ni} \geqslant 0,\ y_{ni} \in H_i : \mu_{n_i} S_n = \alpha_{ni} x_i + y_{ni})$;

в) $\varliminf_{i\to\infty} \sum_{\nu=n_i+1}^{m_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} > 0$;

c) существует абсолютно выпуклая окрестность нуля $U$, для которой $(\exists M > 0)(\exists i_0 : n_i \leqslant n \leqslant m_i,\ i > i_0 \Rightarrow (x_i \alpha_{ni} + H_i) \cap MU = \varnothing)$.

Если в данном определении условие c) выполняется для любого $M > 0$, будем говорить, что бесконечность — $(P, \mu, \sigma)$-точка последовательности $(S_n)$.

Суть введенных понятий раскрывается на примере пространства комплексных чисел: $F = \mathbb{C}$. В этом случае нуль будет $(P, \mu, \sigma)$-точкой последовательности $(S_n)$, если существуют последовательности $(n_l)$, $(m_l)$ и $(\theta_l)$, для которых

$$\varliminf_{l\to\infty} \mu_{n_l} \cdot \min_{n_l \leqslant n \leqslant m_l} \operatorname{Re} e^{i\theta_l} S_n > 0,\ \varliminf_{l\to\infty} \sum_{\nu=n_l+1}^{m_l} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} > 0.$$

Если же

$$\lim_{l\to\infty} \mu_{n_l} \cdot \min_{n_l \leqslant n \leqslant m_l} \operatorname{Re} e^{i\theta_l} S_n = +\infty,\quad \varliminf_{l\to\infty} \sum_{\nu=n_l+1}^{m_l} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} > 0,$$

то бесконечность — $(P, \mu, \sigma)$-точка последовательности $(S_n)$.

Если $\sigma_n = 1\,(\forall n)$, то имеем дело с $(P, \mu)$-точками, а если и $\mu_n = 1\,(\forall n)$, то — с $(P)$-точками [2, 3]. Заметим, что из условия c) вытекает неравенство $\min_{n_i \leqslant n \leqslant m_i} \alpha_{ni} > 0$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_n > 0$, $\sigma_n \geqslant \gamma > 0\,(\forall n)$, $0 < C_1 \leqslant \lambda_m/\lambda_n$, $\sigma_m/\sigma_n \leqslant C_2 < \infty$, *когда* $0 < d_1 \leqslant P_m^{(1)}/P_n^{(1)} \leqslant d_2 < \infty$, $\mu_n^{(\alpha)} = \lambda_n/\sigma_n^{\alpha}$, $\alpha$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\sigma_n p_n / P_n^{(1)} \to 0$, $n \to \infty$. *Если нуль (бесконечность) —* $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$*-точка* $(S_n)$ *и* $\alpha \geqslant 1$, *то нуль (бесконечность) —* $(P, \mu^{(\alpha-1)}, \sigma)$*-точка последовательности* $(H_n^{(1)})$.

Следствие 1. *При условиях теоремы* 1 *нуль (бесконечность) —* $(P, \lambda, \sigma)$*-точка последовательностей* $(H_n^{(\alpha)})$ *и* $(C_n^{(\alpha)})\,(\forall \alpha)$. *В частности,* $\lambda_n H_n^{(\alpha)} \neq o(1)\,(\neq O(1))$, $\lambda_n C_n^{(\alpha)} \neq o(1)\,(\neq O(1))$.

Выделим некоторые классы, из принадлежности к которым последовательности $(S_n) : \mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \neq o(1)\,(\neq O(1))$, где $n_i \uparrow$ задана, вытекает, что нуль (бесконечность) является $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точкой последовательности $(S_n)$:

1) пусть $G$ — ограниченное множество из $F$, содержащее нуль, и для любой абсолютно выпуклой окрестности $U(G)$ множества $G$ существуют $\nu_i \uparrow \infty$ и $\delta > 0$, для которых $\mu_{n_i}^{(\alpha)}(S_n - S_{n_i}) \in U(G)$, если $n_i \leqslant n \leqslant \nu_i$ или $\nu_i \leqslant n \leqslant n_i$, причем соответственно $\sum\limits_{\nu=n_i+1}^{\nu_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$ или $\sum\limits_{\nu=\nu_i+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0 \, (\forall i)$;

2) $\exists t_i \in F : t_i = O(1)$ и $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_i, r_i \uparrow \infty, \delta > 0 : \mu_{n_i}^{(\alpha)}(S_m - S_{n_i}) = k_{mn_i} t_i$, где $k_{mn_i} \geqslant -d - \varepsilon \, (n_i \leqslant m \leqslant m_i)$, $\mu_m^{(\alpha)}(S_{n_i} - S_m) = k_{n_i m} t_i$, где $k_{n_i m} \geqslant -d - \varepsilon \, (r_i \leqslant m \leqslant n_i)$, причем $d > 0$, $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} = k_i^* t_i$, $k_i^* \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{\nu=n_i+1}^{m_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$, $\sum\limits_{\nu=r_i+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0 \, (\forall i)$;

3) $S_m = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$ и $\exists \delta > 0$, $m_i, r_i \uparrow \infty : \mu_n^{(\alpha)} a_n P_n^{(1)} / (\sigma_n p_n) = O(1)$ для $n_i \leqslant n \leqslant r_i$ или $m_i \leqslant n \leqslant n_i$, причем соответственно $\sum\limits_{\nu=n_i+1}^{r_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$ или $\sum\limits_{\nu=m_i+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0 \, (\forall i)$;

4) $\exists t_i \in F, \delta > 0, m_i, r_i \uparrow \infty : t_i = O(1)$, $\mu_n^{(\alpha)} a_n P_n^{(1)} / (\sigma_n p_n) = k_{ni} t_i$ для $m_i \leqslant n \leqslant r_i$, причем $m_i < n_i < r_i$, $k_{ni} \geqslant -d \, (d > 0)$, $\sum\limits_{\nu=m_i+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$, $\sum\limits_{\nu=n_i+1}^{r_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0 \, (\forall i)$.

Теорема 2. *Пусть* $(\lambda_n)$, $(\sigma_n)$ *и* $(\mu_n^{(\alpha)})$ *из теоремы* 1 *и* $\exists \alpha > 0 : (S_n)$ *удовлетворяет одному из условий* 1 — 4 *и* $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = O(1)$ *или* $\lambda_n C_n^{(\alpha)} = O(1)$. *Тогда* $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} = O(1)$. *Если же* $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = o(1)$ или $\lambda_n C_n^{(\alpha)} = o(1)$ и *в условиях* 1 *и* 2 $G = \{0\}$ *и* $d = 0$, *то* $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} = o(1)$.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы* 2 $(p_n \ln^2 P_n^{(1)})/p_n^{(1)} = o(1)$, $\sigma_n = \ln^2 P_n^{(1)}$, $\mu_n^{(\alpha)} = \ln P_n^{(1)}$ *и* $\exists \gamma > 0$, $\alpha > 0$: $(P_n^{(1)})^\gamma H_n^{(\alpha)} = o(1) \, (= O(1))$ или $(P_n^{(1)})^\gamma C_n^{(\alpha)} = o(1) \, (= O(1))$. *Тогда* $S_n \ln P_n^{(1)} = o(1) \, (= O(1))$.

Например, если $a_n P_n^{(1)} / (p_n \ln P_n^{(1)}) = O(1)$ и $(P_n^{(1)})^\gamma H_n^{(\alpha)} = o(1) \, (= O(1))$, то $S_n \ln P_n^{(1)} = o(1) \, (= O(1))$.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\lambda_n = \sigma_n^{\alpha+1}$, $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = o(1) \, (= O(1))$ *или* $\lambda_n C_n^{(\alpha)} = o(1) \, (= O(1))$. *Тогда* $\lambda_{n_i}^{1/(\alpha+1)} S_{n_i} = o(1) \times (= O(1))$.

Например, если $\lambda_n^{1/(\alpha+1)} p_n / P_n^{(1)} = o(1)$, $a_n P_n^{(1)} / p_n = O(1)$ и $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = o \times (1) \, (= O(1))$, то $\lambda_n^{1/(\alpha+1)} S_n = o(1) \, (= O(1))$.

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы* 2 $\sigma_n = 1$, $d = 0$, $G = \{0\}$, *причем* $(\lambda_n / P_n^{(1)}) \sum\limits_{i=0}^{n} p_i / \lambda_i \to a > 0$, $\lambda_n H_n^{(\alpha)} = S + o(1)$, $n \to \infty$. *Тогда* $\lambda_{n_i} S_{n_i} = S / a^\alpha + o(1)$.

Конкретизируя топологическое пространство $F$, можно получать частные случаи сформулированных утверждений. Если $F$ — пространство комплексных чисел, то из приведенных утверждений легко получить известные тауберовы теоремы Г. Харди, Р. Шмидта, Н. А. Давыдова, Г. Кангро и др. [2—7].

Покажем, к примеру, как из следствия 1 вытекает известное (C)-свойство методов Чезаро [2] (основная теорема ). Если последовательность $(S_n)$ суммируется методом Чезаро порядка $\alpha \in \mathbb{N}$ к числу $S$, то можно считать $S = 0$. Допустив, что $S \notin G$, где $G$ — $(C)$-множество последовательности $(S_n)$ (см., например, [2]), получим: некоторая замкнутая выпуклая окрестность $G_\varepsilon$ множества $G$ и точка $S = 0$ лежат в разных полуплоскостях, т. е. найдутся $\delta > 0$ и $\theta \in R$, для которых $\operatorname{Re} e^{i\theta} z \geqslant \delta > 0$ $(\forall z \in G_\varepsilon)$. В силу определения (C)-множества найдутся возрастающие последовательности $(n_l)$ и $(m_l)$ и число $\lambda > 1: S_n \in G_\varepsilon$, $n_l \leqslant n \leqslant m_l$, $m_l/n_l \geqslant \lambda > 1$ $(\forall l)$, т. е. $\operatorname{Re} e^{i\theta} S_n \geqslant$

$$\geqslant \delta > 0, \quad n_l \leqslant n \leqslant m_l, \text{ и } \varliminf_{l\to\infty} \sum_{\nu=n_l+1}^{m_l} \frac{1}{\nu+1} = \varliminf_{l\to\infty} \ln \frac{m_l}{n_l} > 0,$$

а это означает, что нуль — $(P, 1, 1)$-точка последовательности $(S_n)$, причем $P_n^{(1)} = n + 1$ $(\forall n)$. По следствию 1 $C_n^{(\alpha)} \neq o(1)$ $(\forall \alpha \in \mathbb{N})$, т. е. последовательность $(S_n)$ не суммируется к нулю никаким методом Чезаро.

Полученное противоречие доказывает первую часть (C)-свойства методов Чезаро. Вторая часть этого свойства получается из следствия 1 гораздо проще. Если взять в качестве пространства $F$ пространство непрерывных, $2\pi$-периодических функций, то убедимся в справедливости такого утверждения.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ — непрерывная, $2\pi$-периодическая функция, $a_n$ и $b_n$ — ее коэффициенты Фурье и $S_n(f, x) = a_0/2 + \sum_{l=1}^{n} a_i \cos ix + b_i \times \sin ix$. Тогда $S_{n_i}(f, x) \rightrightarrows f(x)$, $i \to \infty$, $x \in \mathbb{R}$, если $n_i \uparrow \infty$ — заданная последовательность натуральных чисел, а коэффициенты $a_n$ и $b_n$ удовлетворяют одному из условий*

1) $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists m_i \uparrow \infty,\ \delta > 0: \sum_{n=n_i+1}^{m_i} (|a_\nu| + |b_\nu|) < \varepsilon$ *или* $\sum_{\nu=m_i+1}^{n_i} (|a_\nu| + |b_\nu|) < \varepsilon$, *причем соответственно* $(m_i - n_i)/n_i \geqslant \delta > 0$ *или* $(n_i - m_i)/n_i \geqslant \delta > 0$ $(\forall i)$;

2) $\exists \delta > 0,\ m_i, r_i \uparrow \infty: a_n, b_n = O(1/n)$ *для* $m_i \leqslant n \leqslant n_i$ *или* $n_i \leqslant n \leqslant r_i$, *причем соответственно* $(n_i - m_i)/n_i \geqslant \delta > 0$ *или* $(r_i - n_i)/n_i \geqslant \delta > 0$ $(\forall i)$.

В работе [8] рассмотрены $C_n^{(1)}$ средние ряда Фурье функций из пространства $\{f \in C_{2\pi}: |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^\alpha\}$ с нормой $\|f\|_\alpha = \|f\|_C + \sup_{x,y} |f(x) - f(y)|/|x-y|^\alpha$. Здесь показано, что $\lambda_n \|C_n^{(1)} - f\|_\beta = O(1)$ для неубывающих $p_n$, $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ и некоторой $\lambda_n > 0$. В частности, если $\alpha = 1$, $np_n \asymp P_n^{(1)}$, то $\|C_n^{(1)} - f\|_\beta = O((\ln n/p)^{1-\beta})$. Поскольку для $\alpha = 1$ получаем класс функций, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условию $a_n, b_n = O(1/n)$, то, взяв $\mu_n^{(1)} = \sigma_n$, $\lambda_n = (\ln n/n)^{\beta-1} = \sigma_n^2$, получим по следствию 3 $\|S_n(f, x) - f(x)\|_\beta = O((\ln n/n)^{(1-\beta)/2})$.

**2.** Доказательство теоремы. Если нуль (бесконечность) — $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точка последовательности $(S_n)$, то найдутся $(n_i)$, $(m_i)$, замкнутые гиперплоскости $H_i$, определяемые непрерывными линейными формами $\varphi_i: F \to \mathbb{R}$, и элементы $x_i \in F: \varphi_i(x_i) = 1$, для которых выполняются условия а) — с) п. 1, где $\mu_n = \mu_n^{(\alpha)}$. Считаем $\gamma_1 \geqslant \sum_{\nu=n_i+1}^{m_i} \sigma_\nu n_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \gamma_2 > 0$ и $P_{m_i}^{(1)}/P_{n_i}^{(1)} \leqslant 2$ $(\forall i)$. Выберем $q_i$, $r_i$, $t_i$ так, чтобы $n_i < q_i < r_i < t_i < m_i$, $\sum_{\nu=a_i+1}^{b_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \gamma_3 > 0$, $i > i_0$, где $a_i < b_i$ и $(a_i)$, $(b_i)$ совпадают с одной из последовательностей $(n_i)$, $(q_i)$, $(r_i)$, $(t_i)$, $(m_i)$.

Каждый элемент $x \in F$ можно представить в виде $x = \alpha^* x_i + y$, где $\alpha^* \in \mathbb{R}$, а $y \in H_i$. В силу этого $\mu_{r_i}^{(\alpha-1)} H_{r_i}^{(1)} = \alpha_i^* x_i + y_i^*$, где $\alpha_i^* \in \mathbb{R}$, $y_i \in H_i$. Возможны два случая: a$_1$) $\alpha_i^* \geqslant 0$, $i = i_j \to \infty$; a$_2$) $\alpha_i^* < 0$, $i > i_0$.

Пусть имеет место a$_1$). Тогда для $t_i \leqslant n \leqslant m_i$, $i = i_j$,

$$\mu_{t_i}^{(\alpha-1)} H_n^{(1)} = \frac{\mu_{t_i}^{(\alpha-1)} P_{r_i}^{(1)}}{\mu_{r_i}^{(\alpha-1)} P_n^{(1)}} \mu_{r_i}^{(\alpha-1)} H_{r_i}^{(1)} + \frac{\mu_{t_i}^{(\alpha-1)}}{P_n^{(1)}} \sum_{\nu=r_i+1}^{n} p_\nu S_\nu = \beta_{ni} x_i + z_{ni},$$

$$\text{где } \beta_{ni} = \mu_{t_i}^{(\alpha-1)} P_{r_i}^{(1)} \alpha_i^* / (\mu_{r_i}^{(\alpha-1)} P_n^{(1)}) + (\mu_{t_i}^{(\alpha-1)} / P_n^{(1)}) \sum_{\nu=r_i+1}^{n} \alpha_{\nu i} p_\nu / \mu_{n_i}^{(\alpha)} \geqslant$$

$$\geqslant \gamma^* \min_{n_i \leqslant n \leqslant m_i} \alpha_{ni} \sum_{\nu=r_i+1}^{t_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \gamma \min_{n_i \leqslant n \leqslant m_i} \alpha_{ni},$$

где $\gamma > 0$ не зависит от $i$; $z_{ni}$ отличается от $\beta_{ni}$ тем, что вместо $\alpha_i^*$ стоит $y_i^*$, а вместо $\alpha_{\nu i}$ — $y_{\nu i}$. По этой причине $z_{ni} \in H_i$, ибо $y_i^*$ и $y_{\nu i} \in H_i$, а $H_i$ — замкнутая гиперплоскость.

Итак, для последовательности $(H_n^{(1)})$ выполнено условие а) определения $(P, \mu^{(\alpha-1)}, \sigma)$-точки. Условие в) также выполняется, поскольку $\sum_{\nu=t_i}^{m_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \gamma_3 > 0$ $(\forall i > i_0)$.

Пусть $U$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля из определения $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точки последовательности $(S_n)$. Если допустить, что условие с) не выполняется для последовательностей $(t_i)$, $(m_i)$, $(\beta_{ni})$ и выбранной окрестности $U$, то получим невыполнение этого условия для последовательностей $(n_i)$, $(m_i)$, $(\alpha_{ni})$ и той же окрестности $U$, что невозможно. Таким образом, в случае a$_1$) утверждение теоремы 1 верно. Рассуждения для случая a$_2$) почти аналогичны. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство следствия 1. Для последовательностей $(H_n^{(\alpha)})$ рассуждения очевидны, а для последовательностей ( $(C_n^{(\alpha)})$ отметим, что $C_n^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} P_i^{(\alpha-1)} p_i C_i^{(\alpha-1)} / P_n^{(\alpha)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\alpha = 1, 2, \ldots$. По этой причине достаточно показать справедливость неравенства

$$M_\alpha^* \sum_{i=n}^{m} p_i \sigma_i P_i^{(\alpha-1)} / P_i^{(\alpha)} \leqslant \sum_{i=n}^{m} p_i \sigma_i / P_i^{(1)} \leqslant M_\alpha \sum_{i=n}^{m} p_i \sigma_i P_i^{(\alpha-1)} / P_i^{(\alpha)},$$

где $M_\alpha^* > 0$ и $M_\alpha > 0$ не зависят от $n$ и $m$. Оно сразу вытекает из соотношения $M_\alpha^* P_i^{(\alpha-1)} / P_i^{(\alpha)} \leqslant 1/P_i^{(1)} \leqslant M_\alpha P_i^{(\alpha-1)} / P_i^{(\alpha)}$, доказанного, например, в работе [4].

4. Справедливость теоремы 2 вытекает из следствия 1 в силу такого утверждения.

Лемма 1. *Если последовательность $(S_n)$ удовлетворяет одному из условий 1 — 4 и $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \neq o(1)$ $(\neq O(1))$, то нуль (бесконечность) — $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точка $(S_n)$ (для нуля дополнительно считаем, что в условиях 1 и 2 $G = \{0\}$ и $d = 0$).*

Доказательство. Допустим, что $(S_n)$ удовлетворяет условию 1 и $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \neq 0$, т. е. найдется абсолютно выпуклая окрестность $U$ нуля, для которой $(\exists M > 0)$ $(\exists i = i_j \to \infty : \mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \notin MU)$. Для этой окрестности $U$ в силу условия 1 $\exists \nu_i \uparrow \infty$ и $\delta > 0$: $\overline{y}_{ni} \equiv \mu_{n_i}^{(\alpha)} (S_n - S_{n_i}) \in \frac{M}{2} U$ $(n_i \leqslant n \leqslant \nu_i$

или $\nu_i \leqslant n \leqslant n_i$), причем соответственно $\sum_{\nu=n_i+1}^{\nu_i} p_\nu \sigma_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$ или $\sum_{\nu=\nu_i+1}^{n_i} \sigma_\nu p_\nu / P_\nu^{(1)} \geqslant \delta > 0$. Последнее неравенство означает выполнение условия в) определения $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точки.

Для всех достаточно больших $i = i_j$ можно считать, что $\left(\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} + \frac{M}{2} U\right) \cap \frac{M}{2} U = \varnothing$, и так как $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_n = \mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} + \bar{y}_{ni} \in \frac{M}{2} U + \mu_{n_i}^{(\alpha)} \times S_{n_i}$, то $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_n \notin \frac{M}{2} U$ $(n_i \leqslant n \leqslant \nu_i$ или $\nu_i \leqslant n \leqslant n_i$, $i = i_j)$.

По теореме Хана — Банаха найдется непрерывная линейная форма $\varphi_i^*: F \to \mathbb{R}$, для которой $\varphi_i^*(x) > a_i \geqslant 0$, если $x \in \left(\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} + \frac{M}{2} U\right)$, и $\varphi_i^*(x) < a_i$, если $x \in \frac{M}{2} U$. Положим $\varphi_i(x) = \varphi_i^*(x)$ и определим $x_i = S_{n_i} / \varphi_i(S_{n_i})$. Тогда $\varphi_i(x_i) = 1$, $\bar{y}_{ni} = \bar{\alpha}_{ni} x_i + y_{ni}$, где $\bar{\alpha}_{ni} \in \mathbb{R}$, $y_{ni} \in H_i$, а $H_i$ — гиперплоскость, определяемая линейной формой $\varphi_i: F \to \mathbb{R}$. В силу этого

$$\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_n = \mu_{ni}^{(\alpha)} \varphi_i(S_{n_i}) x_i + \bar{\alpha}_{ni} x_i + y_{ni} = (\mu_{n_i}^{(\alpha)} \varphi_i(S_{n_i}) + \bar{\alpha}_{ni}) x_i + y_{ni} = \\ = \alpha_{ni} x_i + y_{ni}.$$

Учитывая выбор $\varphi_i$, имеем $\varphi_i(\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_n) > 0$ $(n_i \leqslant n \leqslant \nu_i$ или $\nu_i \leqslant n \leqslant n_i)$, значит $\alpha_{ni} \equiv \mu_{n_i}^{(\alpha)} \varphi_i(S_{n_i}) + \bar{\alpha}_{ni} > 0$ для этих $n$ и $i = i_j$, т. е. выполнено условие а) определения $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точки.

Так как $\varphi_i(\alpha_{ni} x_i + H_i) = \alpha_{ni} > a_i$, а $\varphi_i\left(\frac{M}{2} U\right) < a_i$, то $(\alpha_{ni} x_i + H_i) \cap \cap \frac{M}{2} U = \varnothing$ $(n_i \leqslant n \leqslant \nu_i$ или $\nu_i \leqslant n \leqslant n_i$ $(i = i_j))$, т. е. выполнено условие с) определения $(P, \mu^{(\alpha)}, \sigma)$-точки.

Рассуждения для условия 1 в случае, когда $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \neq o(1)$ закончены. Если $\mu_{n_i}^{(\alpha)} S_{n_i} \neq O(1)$, то эти рассуждения почти повторяются.

Доказательство для случая 2 подобно проведенному. Нетрудно показать, что из условия 3 вытекает условие 1, а из условия 4 — условие 2. Поэтому все эти рассуждения опускаем.

5. Утверждения следствий 2 и 3 — это утверждения теоремы 2 при конкретном выборе последовательностей $(\sigma_n)$ и $(\lambda_n)$.

6. Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2 последовательность $(\lambda_{n_i} S_{n_i})$ ограничена. Поскольку $\sigma_n = 1$ $(\forall n)$, то условие $\sum_{\nu=n_i+1}^{m_i} p_\nu \sigma_\nu / P_\nu^{(1)} = o(1)$, $i \to \infty$, равносильно условию $P_{m_i}^{(1)} / P_{n_i}^{(1)} \to 1$, $i \to \infty$. Так как $\lambda_m \asymp \lambda_n$, если $P_m^{(1)} \asymp P_n^{(1)}$, когда $n_i \leqslant m, n \leqslant m_i$, то, обозначив через $q_i = p_i / \lambda_i$, $Q_n = \sum_{i=0}^{n} q_i$, получим $(Q_{m_i} - Q_{n_i}) / Q_{n_i} = \sum_{\nu=n_i+1}^{m_i} p_\nu / (\lambda_\nu Q_{n_i}) \asymp$

$\asymp (P_{m_i}^{(1)} - P_{n_i}^{(1)}) / (P_{n_i}^{(1)} \lambda_{n_i} \sum_{\nu=0}^{n_i} p_\nu / (\lambda_\nu P_{n_i}^{(1)})) = o(1) \Leftrightarrow (P_{m_i}^{(1)} - P_{n_i}^{(1)}) / P_{n_i}^{(1)} = o(1) \Rightarrow 1 - \lambda_{m_i} / \lambda_{n_i} = o(1)$. Из равенства $\lambda_m S_m - \lambda_{n_i} S_{n_i} = \lambda_{ni}(S_m - S_{n_i}) + \lambda_{n_i}(S_m - S_{n_i})(\lambda_m - \lambda_{n_i}) / \lambda_{n_i} + \lambda_{n_i} S_{n_i}(\lambda_m - \lambda_{n_i}) / \lambda_{n_i}$ получаем, что если для последовательности $(S_n)$ имеет место условие 1 или 2, то для последовательности $(S_n^*) = (\lambda_n S_n)$ также имеет место условие 1 или 2, где $\lambda_n = \sigma_n = 1$, $p_n = q_n\ (\forall n)$.

Отметим равенство

$$\lambda_n H_n^{(\alpha)} - S = \frac{\lambda_n}{P_n^{(1)}} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{P_k^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{P_\nu^{(1)}} \cdots \frac{p_j}{P_j^{(1)}} \sum_{i=0}^{j} p_i S_i - S =$$

$$= \frac{\lambda_n}{P_n^{(1)}} \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k} \frac{\lambda_k}{P_k^{(1)}} \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{\lambda_\nu} \frac{\lambda_\nu}{P_\nu^{(1)}} \cdots \frac{p_j}{\lambda_j} \frac{\lambda_j}{P_j^{(1)}} \sum_{i=0}^{j} \frac{p_i}{\lambda_i} \times$$

$$\times (\lambda_i S_i - S/a^\alpha) + o(1).$$

Если допустить, что $S_{n_i}^* \equiv \lambda_{n_i} S_{n_i} - S/a^\alpha \neq o(1)$, то по доказанной лемме 1 нуль будет $(Q)$-точкой последовательности $(S_n^*)$. а по теореме 1 и последовательности $\omega_j^{(1)} = \lambda_j Q_j / (P_j^{(1)} a) \sum_{i=0}^{j} q_i S_i^* / Q_j$, а также последовательности $\omega_r^{(2)} = \lambda_r Q_r / (P_r^{(1)} a) \sum_{j=0}^{r} q_j \omega_j^{(1)} / Q_r$ и т. д. Через $\alpha$ шагов получим, что нуль является $(Q)$-точкой последовательности $(\lambda_n H_n^{(\alpha)} - S)$, т. е.$(\lambda_n H_n^{(\alpha)} \neq S + o \times (1)$. Теорема 3 доказана.


1. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1967.— 258 с.
2. *Давыдов Н. А.* Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов // Мат. сб. — 1956.— **38**, № 4.— С. 509—524.
3. *Михалин Г. А.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для $(H, p_n, \alpha)$-методов суммирования // Приближенные методы мат. анализа: Сб. науч. тр.— Киев : КГПИ, 1980.— С. 113—124.
4. *Михалин Г. А.* Теоремы типа Литлвуда для $(H, p_n, \alpha)$- и $(C, p_n, \alpha)$-методов суммированния // Там же.— Киев : КГПИ, 1977.— С. 73—82.
5. *Кангро Г.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса // Уч. зап. Тарт. ун-та.— 1971.— **277**.— С. 155—160.
6. *Кангро Г.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для метода Риса // Там же.— 1972.— **395**.— С. 156—166.
7. *Таммерайд И.* Тауберовы теоремы с остаточным членом для методов Чезаро и Гельдера // Там же.— 1971.— **277**.— С. 161—170.
8. *Chandra Prem.* On the generalised Fejer means in the metric of Holder space // Math. Na Nachr.— 1982.— **109**.— P. 39—45.


Киев. пед. ин-т
Получено 14.10.86