УДК 531.36

С. П. СОСНИЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР)

Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае

Рассматриваются неголономные системы, для которых имеет место интеграл Якоби. Указываются достаточные условия неустойчивости фиксированного положения равновесия данных систем, совпадающего с критической точкой исходного лагранжиана. Полученные условия неустойчивости переносятся на все многообразие положений равновесия — характерную особенность неголономных систем.

Розглядаються неголономні системи, для яких має місце інтеграл Якобі. Вказуються достатні умови нестійкості фіксованого положення рівноваги даних систем, що співпадає з критичною точкою вихідного лагранжіана. Отримані умови нестійкості переносяться на весь многовид положень рівноваги — характерну особливість неголономних систем.

Исследованию устойчивости движения неголономных систем посвящен целый ряд работ, с результатами которых можно ознакомиться в [1]. В настоящей статье рассматриваются ненатуральные неголономные системы, исходный лагранжиан которых содержит линейные относительно обобщенных скоростей слагаемые. В случае, когда исследуемому положению равновесия соответствует критическая точка лагранжиана, на основании предложенного в работе [2] подхода доказывается неустойчивость данного положения равновесия, а затем вывод о его неустойчивости распространяется на все многообразие положений равновесия, существование которого — отличительная черта неголономных систем [3].

1. Рассмотрим неголономную систему

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q = 0, \quad q \in D \subset R^n \times R^l, \tag{1}$$

$$\dot{q}_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(q)\,\dot{q}_j, \quad i = \overline{1, l}, \tag{2}$$

где лагранжиан L имеет вид

$$L(q, \dot{q}) = L_2(q, \dot{q}) + L_1(q, \dot{q}) + L_0(q) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q} + f(q)\dot{q} + L_0(q).$$

Здесь квадратичная форма $\dot{q}^T A(0)\dot{q}$ положительно определена, $f(0) = 0$, $L(q, \dot{q})$, $b_{ij}(q) \in C^2(D)$. Представляя (1) с помощью уравнений связей (2) в форме уравнений Воронца, с точностью до обозначений получаем [4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta_2}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial(\Theta_2 + L_0)}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{l}\frac{\partial(\Theta_2 + L_0)}{\partial q_{n+i}} b_{ij} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{m=1}^{n}\Theta_1\beta_{ijm}\dot{q}_m +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n}\gamma_{jm}\dot{q}_m, \quad j = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где

$$\beta_{ijm} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_m} - \frac{\partial b_{im}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{l}\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_{n+\mu}} b_{\mu m} - \frac{\partial b_{im}}{\partial q_{n+\mu}} b_{\mu j}\right),$$

$$\gamma_{jm} = \frac{\partial f_m}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_m} + \sum_{i=1}^{l}\left[\left(\frac{\partial f_{n+i}}{\partial q_j} b_{im} - \frac{\partial f_{n+i}}{\partial q_m} b_{ij}\right) +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial f_m}{\partial q_{n+i}} b_{ij} - \frac{\partial f_j}{\partial q_{n+i}} b_{im}\right)\right] + \sum_{i=1}^{l}\sum_{\mu=1}^{l}\frac{\partial f_{n+\mu}}{\partial q_{n+i}}(b_{\mu m}b_{ij} - b_{\mu j}b_{im}).$$

В уравнениях (3) Θ_2 и Θ_1 получаются соответственно из L_2 и $\partial L_2/\partial \dot{q}_{n+i}$ исключением $\dot{q}_{n+i}$ с помощью соотношений (2). Функция Θ_2 имеет, в частности, вид

$$\Theta_2(q, \bar{\dot{q}}) = \bar{\dot{q}}^T B(q)\,\bar{\dot{q}}, \quad \bar{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)^T.$$

На основании положительной определенности квадратичной формы $\dot{q}^T A(0) \times \dot{q}$ функция $\Theta_2(0, \bar{\dot{q}})$ также положительно определена.

Система (2), (3), как известно [3], допускает интеграл Якоби

$$\Theta_2 - L_0 = h = \text{const}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть при сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$ $(D \supset \bar{s}_\varepsilon = \{q \in D, \|q\| \leqslant \varepsilon\})$ *выполняются условия:* 1) *функция* $L_0(q)$ *представима в виде*

$$L_0(q) = L_{0k}(q) + R(q), \quad R(q) = o(\|q\|^k),$$

где $L_{0k}(q)$ — *однородная функция степени* $k \geqslant 2$; 2) *функция* $L_{0k}(q_1, \ldots, q_n, 0, \ldots, 0)$ *в точке* $q_1 = \ldots = q_n = 0$ *не имеет максимума;*

$$3) \lim_{\|q\| \to 0} \frac{\|\partial R/\partial q\|}{\|q\|^{k-1+\alpha}} = 0, \quad b_{ij}(0) = 0, \quad \alpha \in]0, 1[, \quad \alpha = \text{const};$$

$$4) \lim_{\|q\| \to 0} \frac{|\gamma_{jm}|}{\|q\|^{k/2-1+\alpha}} = 0, \quad j, m = \overline{1, n}.$$

Тогда точка $q = \bar{\dot{q}} = 0$ *является неустойчивым положением равновесия системы* (2), (3), *и существуют решения, асимптотически стремящиеся к нему при* $t \to \infty$ *и* $t \to -\infty$.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующие леммы.

Лемма 1 [5]. *Если* $\varphi_k(z) \in C^1(R^n)$ — *однородная функция степени* $k \geqslant 1$, *то имеет место оценка*

$$\lambda_1 \|z\|^k \leqslant \varphi_k(z) \leqslant \lambda_2 \|z\|^k, \quad z \in R^n,$$

где постоянные λ_1, λ_2 *являются соответственно минимумом и максимумом функции* φ_k *на* $(n-1)$-*мерной сфере единичного радиуса.*

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_k(z) \in C^k(R^n)$ — *однородная функция целой степени* $k \geqslant 1$. *Тогда* $\varphi_k(z)$ *является формой степени* k.

Доказательство леммы 2 непосредственно следует из леммы 1 и представления функции $\varphi_k(z)$ в окрестности точки $z = 0$ с помощью полинома Тейлора степени k.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что из леммы 1 и условий 1, 3 теоремы следует, что точки $q = \bar{\dot{q}} = 0$ является положением равновесия системы (2), (3).

Исходя из того, что функция $\Theta_2(q, \dot{q})$ в окрестности $q = \bar{\dot{q}} = 0$ регулярна по $\dot{\bar{q}}$ $(\det \Theta_{2\dot{\bar{q}}\dot{\bar{q}}} \neq 0)$, с помощью линейного неособого преобразования

$$x = \Phi\bar{q}, \quad \bar{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T, \tag{5}$$

где Φ — $(n \times n)$-матрица с постоянными коэффициентами и отличным от нуля определителем, систему (2), (3) представляем в форме

$$\dot{y} = B^*\dot{x}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial (T + L_0^*)}{\partial x} + B^* \frac{\partial (T + L_0^*)}{\partial y} + \Gamma^*\dot{x} + O(\|\dot{x}\|^2),$$

где $x^T = (x_1, \ldots, x_n)$, $y^T = (y_1, \ldots, y_l) = (q_{n+1}, \ldots, q_{n+l})$, $T = \frac{1}{2}[\|\dot{x}\|^2 + \dot{x}^T C(x, y)\dot{x}]$, $C(0, 0) = 0$, а L_0^*, $(n \times l)$-матрица $B^* = (b_{jl}^*)$, $(n \times n)$-матрица $\Gamma^* = (\gamma_{jm}^*)$ отражают соответственно результат преобразования величин L_0, b_{ij}, γ_{jm} при замене (5). Обозначая далее $p = \partial T/\partial \dot{x}$, уравнения (6) приводим к виду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = B^* \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{7}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L_0^{\cdot}}{\partial x} + B^* \frac{\partial L_0}{\partial y} + \Gamma^* \frac{\partial H}{\partial p} + O(\| p \|^2),$$

где

$$H = \frac{1}{2}[\| p \|^2 + p^T C^*(x, y) p] - L_0^* = h = \text{const}, \tag{8}$$

$C^*(x, y) = (E + C)^{-1} - E$, E — единичная матрица.

Допустим вначале, что $k = 2$. Тогда о существовании асимптотических движений к исследуемому положению равновесия и его неустойчивости можно заключить, если, учитывая лемму 2 и условия 3, 4 теоремы 1, рассмотреть линейное приближение данной системы и воспользоваться теоремами Ляпунова [6, с. 70] и Красовского [7, с. 77]. Поэтому далее будем предполагать, что $k > 2$. Определяем множество

$$\Lambda = \{(x, y, p) \in s_\varepsilon^* = \{(x, y) \in D^*(x, y), \quad p \in R^n,$$
$$\| x \oplus y \oplus p \| < \varepsilon\} : H = 0, \quad px - \delta\psi - \| y \|^{k/2} \geqslant 0\},$$

где

$$\psi = \exp(-\| x \oplus y \|^\alpha) \| x \oplus y \|^{k/2+1}, \quad \text{const} = \delta > 0,$$

ε — достаточно малое положительное число. Покажем, что при подходящем выборе постоянной δ множество Λ не является пустым, независимо от малости ε.

На основании оценки

$$\| p \|^2 (1 - \Delta_1(x, y)) \leqslant \| p \|^2 + p^T C^* p \leqslant \| p \|^2 (1 + \Delta_2(x, y)), \quad \Delta_i(x, y) \geqslant 0,$$
$$i = 1, 2, \quad \Delta_i = o(1),$$

из равенства (8) при $h = 0$ имеем

$$2(L_{0k}^* + R^*)(1 + \Delta_2)^{-1} \leqslant \| p \|^2 \leqslant 2(L_{0k}^* + R^*)(1 - \Delta_1)^{-1}. \tag{9}$$

Поскольку L_{0k}^* в соответствии с условием 2 теоремы 1 не имеет в точке $x = y = 0$ максимума, то, учитывая лемму 1, получаем неравенство

$$\mu_1 \| x \oplus y \|^k \leqslant L_{0k}^* \leqslant \mu_2 \| x \oplus y \|^k, \quad 0 < \mu_2 = \text{const},$$

согласно которому из (9) следует

$$2\mu_1 \| x \oplus y \|^k (1 + o(1)) \leqslant \| p \|^2 \leqslant 2\mu_2 \| x \oplus y \|^k (1 + o(1)). \tag{10}$$

На основании (10) получаем оценку

$$| px | = \| p \| \| x \| | \cos(\widehat{x, p}) | \leqslant \| p \| \| x \| \leqslant \sqrt{2\mu_2} \| x \oplus y \|^{k/2} \| x \| (1 + o(1)). \tag{11}$$

В соответствии с (11), а также неравенством

$$px - \delta e^{-\| x \oplus y \|^\alpha} \| x \oplus y \|^{k/2+1} - \| y \|^{k/2} \geqslant 0, \tag{12}$$

входящим в определение множества Λ, последнее не пусто, если положить $\delta < \sqrt{2\mu_2}$. Действительно, учитывая, что x, y, p — независимые обобщенные координаты и, следовательно, произволен выбор направления обобщенного импульса p, полагаем $\cos(\widehat{x, p})|_{t=0} = 1$, $y|_{t=0} = 0$, что позволяет заключить о справедливости неравенства (12) на множестве нулевого уровня интеграла H при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$; тем самым, $\Lambda \neq \varnothing$.

Поскольку согласно исходным предположениям о классе гладкости лагранжиана $L(q, \dot{q})$ и коэффициентов $b_{ij}(q)$ по-прежнему $b_{ij}^*(x, y)$, $c_{jm}^*(x, y)$, $\gamma_{jm}^*(x, y) \in C^2(D^*)$, $i = \overline{1, l}$, $j, m = \overline{1, n}$, причем $b_{ji}^*(0, 0) = c_{jm}^*(0, 0) = \gamma_{jm}^*(0, 0) = 0$, то справедливы оценки

$$b_{ji}^*(x, y) < \lambda_3 \| x \oplus y \|, \quad c_{jm}^*(x, y) < \lambda_4 \| x \oplus y \|, \quad \gamma_{jm}^*(x, y) < \lambda_5 \| x \oplus y \|, \tag{13}$$

в которых $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ — постоянные. На основании условий 3, 4 теоремы 1, оценок (10), (13), представим уравнения (7) на множестве Λ в форме

$$\frac{dx}{dt} = p + O(\|x \oplus y\|^{k/2+1}), \quad \frac{dy}{dt} = O(\|x \oplus y\|^{k/2+1}), \tag{14}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial L_{0k}^*}{\partial x} + o(\|x \oplus y\|^{k-1+\alpha}).$$

Рассмотрим производную от функции $V = px - \delta\psi - \|y\|^{k/2}$ на множестве Λ по векторному полю, определяемому системой (14) при $t \in I \cap R^+$, $R^+ = [0, \infty[$. В результате получаем

$$\frac{dV}{dt} = \|p\|^2 + x\frac{\partial L_{0k}^*}{\partial x} - \delta e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\|x \oplus y\|^{k/2-1}\Big[-\alpha\|x \oplus y\|^\alpha +$$

$$+\left(\frac{k}{2}+1\right)\Big](x\dot{x} + y\dot{y}) - \frac{k}{2}\|y\|^{k/2-2}y\dot{y} + o(\|x \oplus y\|^{k+\alpha}). \tag{15}$$

Разрешая (8) при $h = 0$ относительно L_{0k}^*, равенству (15), учитывая (14), можно придать форму

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{k}{2}+1\right)[\|p\|^2 - \delta e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\|x \oplus y\|^{k/2-1}px] + \alpha\delta\|x \oplus$$

$$\oplus y\|^{k/2-1+\alpha}px - \frac{k}{2}\|y\|^{k/2-2}y\dot{y} - y\frac{\partial L_{0k}^*}{\partial y} + o(\|x \oplus y\|^{k+\alpha}). \tag{16}$$

Так как согласно определению множества Λ

$$\|p\| > \delta e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\|x \oplus y\|^{k/2}\frac{\|x \oplus y\|}{\|x\|},$$

то, представляя (16) в виде

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{k}{2}+1\right)\|p\|\left[\|p\| - \delta e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\|x \oplus y\|^{k/2}\frac{\|x\|}{\|x \oplus y\|}\cos(\widehat{x, p})\right] +$$

$$+ \alpha\delta\|x \oplus y\|^{k/2-1+\alpha}px - \frac{k}{2}\|y\|^{k/2-2}y\dot{y} - y\frac{\partial L_{0k}^*}{\partial y} + o(\|x \oplus y\|^{k+\alpha}), \tag{17}$$

заключаем, что выражение в квадратных скобках в правой части равенства (17) неотрицательно. На основании (17), учитывая определение множества Λ и следующее из него неравенство

$$\|y\|^{k/2} < \delta_1\|x \oplus y\|^{k/2+1}, \quad \delta_1 = \text{const},$$

имеем

$$\frac{dV}{dt} > \alpha\delta^2\|x \oplus y\|^{k+\alpha} - \delta_2\|x \oplus y\|^{k+1-2/k} - \delta_3\|x \oplus y\|^{k+2/k} +$$

$$+ o(\|x \oplus y\|^{k+\alpha}), \tag{18}$$

где δ_2, δ_3 — положительные постоянные.

Замечая, что $k > 2$, полагаем $0 < \alpha < \min(2/k, 1 - 2/k)$. Тогда из (18) получаем оценку

$$\frac{dV}{dt} > \alpha\delta^2\|x \oplus y\|^{k+\alpha} + o(\|x \oplus y\|^{k+\alpha}),$$

на основании которой делаем вывод, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ на множестве $\Lambda \setminus \{0, 0\}$ производная dV/dt положительна.

Поскольку $V > 0$ $\forall (x, y, p) \in \Lambda \setminus \partial\Lambda$, $V = 0$ на $\partial\Lambda \cap s_\varepsilon^*$, то согласно теореме Красовского [7, с. 77] заключаем, что положение равновесия системы (7) неустойчиво и существует полутраектория $\gamma^- \subset \Lambda$, асимптотически притягивающаяся к точке $x = y = p = 0$ при $t \to -\infty$. Существование полутраектории $\gamma^+ \subset \Lambda$, примыкающей к точке $x = y = p = 0$ при $t \to \infty$, следует из применения изложенной выше схемы к системе (1), (2) с заменой в ней $L(q, \dot{q})$ на $L(q, -\dot{q})$.

Следствие 1. *Если функции $L(q, \dot{q})$, $b_{ij}(q)$ аналитические в достаточно малой окрестности точки $q = \dot{q} = 0$ $(L(q, \dot{q}), b_{ij}(q) \in C^\omega(s_\varepsilon))$, то для выполнения условий* 3, 4 *теоремы* 1 *достаточна справедливость соотношений*

$$\lim_{\|q\| \to 0} \frac{\|\bar{f}\|}{\|q\|^{k/2}} = 0, \quad \bar{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T, \quad \sup_{q \in s_\varepsilon} \frac{|f_{n+i}|}{\|q\|^{k/2}} \leqslant \lambda_6 = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1, l}. \tag{19}$$

Действительно, в этом случае для функций $L_0(q)$, $f_r(q)$, $r = \overline{1, n+l}$, в окрестности точки $q = 0$ имеют место представления

$$L_0 = \sum_{k=2}^{\infty} L_{0k}, \quad f_r = \sum_{v_r = \varkappa_r}^{\infty} f_{rv_r}, \quad \varkappa_r \geqslant 1,$$

где L_{0k}, f_{rv_r} — однородные формы по q соответственно степеней k и v_r. Учитывая, что числа k, v_r — целые, при выполнении (19), исходя из ограничения $0 < \alpha < \min(2/k, 1 - 2/k)$, если $k > 2$, число $\alpha \in]0, 1[$ всегда можно подобрать так, чтобы условия 3, 4 теоремы 1 выполнялись.

Следствие 2. *Для выполнения условия* 2 *теоремы* 1 *достаточно, чтобы в точке $q = 0$ функция L_0 имела строгий минимум.*

Следствие 3. *Поскольку с помощью неособой замены переменных всегда можно достичь, чтобы $b_{ij}(0) = 0$, то теорему* 1 *можно рассматривать как обобщение результата работы* [8] *на случай неаналитичности лагранжиана $L(q, \dot{q})$ и коэффициентов $b_{ij}(q)$.*

Действительно, на основании определения неголономной системы уравнения связей всегда можно записать в виде (2) [1, с. 56]. Учитывая, что $b_{ij}(q) \in C^2(D)$ и, следовательно, имеет место представление $b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + \tilde{b}_{ij}$, где $b_{ij}^{(0)} = b_{ij}(0)$, $\tilde{b}_{ij} = O(\|q\|)$, в системе (1), (2) произведем замену

$$z_i = q_{n+i} - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(0)} q_j, \quad i = \overline{1, l}.$$

В силу полученных соотношений, представляя q_{n+i} через $q_1, \ldots, q_n$ и $z_1, \ldots, z_l$, приходим к неголономной системе с лагранжианом $L(q, z, \dot{q}, \dot{z})$, $q \in R^n$, $z \in R^l$. Обозначая далее $w^T = (q, z)$, уравнения связей и лагранжиан L соответственно получаем в форме

$$\dot{w}_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_{ij}(w)\dot{w}_j, \quad i = \overline{1, l}, \quad \tilde{b}_{ij}(0) = 0,$$

$$L(w, \dot{w}) = L_2(w, \dot{w}) + L_1(w, \dot{w}) + L_0(w).$$

Если теперь, учитывая следствие 1, в исходном лагранжиане $L(q, \dot{q})$ положить $L_1 \equiv 0$, а сам лагранжиан считать аналитическим в окрестности точки $q = \dot{q} = 0$, то с точностью до формы представления уравнений связей формулировка теоремы 1 настоящей статьи соответствует формулировке теоремы 1 [8].

2. Как отмечалось выше, особенностью неголономных систем является наличие у них многообразия состояний равновесия. Поэтому представляет интерес связать анализ устойчивости фиксированного состояния равновесия со всем многообразием.

Теорема 2. *Пусть в исходной системе* (1), (2) $L(q, \dot q)$, $b_{ij}(q) \in C^2(D)$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 1 *многообразие положений равновесия* M *системы* (2), (3), *определяемое уравнениями*

$$\frac{\partial L_0}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L_0}{\partial q_{n+i}} b_{ij} = 0, \quad q \in D, \quad \dot q_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \tag{20}$$

неустойчиво.

Доказательство. Полагая $k > 2$, представляем неравенство, входящее в определение Λ, в виде

$$px - \delta\psi - \| y \|^{k/2} = x\dot x - \delta \| x \oplus y \|^{k/2+1} - \| y \|^{k/2} + o(\| x \oplus y \|^{k/2+1}) \geqslant 0. \tag{21}$$

Замечая, что $x\dot x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| x \|^2$ и $\| x \| < \| x \oplus y \|$, на основании (21) имеем

$$\frac{d}{dt} \| x \|^2 > \nu_1 (\| x \|^2)^{(k+2)/4}, \quad 0 < \nu_1 < 2\delta, \quad \nu_1 = \text{const}. \tag{22}$$

Проинтегрируем неравенство (22) на $I \cap R^+$, учитывая (12), В результате получаем

$$\| x(t) \| > \left[\| x(0) \|^{-(k-2)/2} - \nu_1 \frac{(k-2)}{4} t \right]^{-2/(k-2)},$$
$$\| p(t) \| > \nu_2 \| x(t) \|^{k/2}, \quad \nu_2 = \text{const}. \tag{23}$$

Если же $k = 2$, то, рассматривая уравнения линейного приближения системы (7), на основании теоремы Ляпунова [6, с. 70] и условий 3, 4 теоремы 1 убеждаемся в существовании решений системы (7), удовлетворяющих оценке

$$\| x(t) \oplus p(t) \|^2 > \nu_3 \| x(0) \oplus p(0) \|^2 e^{\nu_4 t}, \tag{24}$$

где ν_3, ν_4 — положительные постоянные, а величины $x(0)$, $p(0)$ принадлежат множеству уровня интеграла $H = h$ при $h \leqslant 0$.

Обозначим через M^* многообразие, полученное из (20) в результате преобразования уравнений (2), (3) к форме (7), а через $S(M^*, \eta) = \{(x, y, p) \in D^* \times R^n_p, d((x, y, p), M^*) < \eta\}$ — его η-окрестность. Пусть $k > 2$,

$$\beta = \sup_{\Lambda} \| z(t) \|, \quad z^T = (x, y, p), \quad z(t = 0) \in \Lambda \cap s^*_\delta, \quad \delta < \varepsilon.$$

Так как число β согласно (23) не зависит от δ, то выбирая $\eta < \beta$, заключаем, что найдется точка $z(t)$ с начальным значением $z(0) \in s^*_\delta \cap \Lambda \cap S(M^*, \eta)$, которая не будет принадлежать $S(M^*, \eta)$ при $t \to \infty$, сколь бы малым ни было число δ. На основании определения 2 [9, с. 34] делаем вывод, что многообразие M^*, а следовательно, и M неустойчиво.

К аналогичному выводу приходим и в случае $k = 2$, учитывая оценку (24), а также тот факт, что в соответствии со структурой интеграла $H = h$ неустойчивость по координатам x при $h \leqslant 0$ влечет неустойчивость и по координатам p. Теорема 2 доказана.

Для теоремы 2 также справедливы следствия 1, 2 теоремы 1.

Замечание. Достаточные условия неустойчивости многообразия положений равновесия M основаны на локальном анализе лишь одного положения равновесия $q = \dot q = 0$. Если же рассматривать положения равновесия из M, отличные от точки $q = \dot q = 0$, то соответствующие уравнения возмущенного движения будут уже отличаться от (2), (3), что может сказаться и на достаточных условиях неустойчивости многообразия M.

1. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем / Итоги науки и техники. Общ. механика // ВИНИТИ.— 1983.— **6**.— С. 3—128.
2. *Сосницкий С. П.* О некоторых случаях неустойчивости равновесия натуральных систем // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 1.— С. 124—127.
3. *Наймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем.— М. : Наука, 1967.— 519 с.
4. *Карапетян А. В.* Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем // Теория устойчивости и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1979.— С. 184—190.
5. *Сосницкий С. П.* Об асимптотических движениях неголономных систем Чаплыгина // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 206—210.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения.— М. : Наука, 1966.— 530 с.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.
8. *Козлов В. В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР.— 1986.— **288**, № 2.— С. 289—291.
9. *Зубов В. И.* Устойчивость движения.— М. : Высш. шк., 1973.— 271 с.

Получено 05.12.88