УДК 517.9:519.46

А. Ф. БАРАННИК, канд. физ.-мат. наук,
Л. Ф. БАРАННИК, д-р физ.-мат. наук (Полтав. пед. ин-т),
В. И. ФУЩИЧ, чл.-корр. АН УССР (Ин-т математики АН УССР, Киев)

# Редукция и точные решения уравнения эйконала

С использованием подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1,4)$, являющейся максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала, построены анзацы, редуцирующие данное уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. По решениям редуцированных уравнений найдены широкие классы точных решений уравнения эйконала.

З використанням підалгебр рангу 3 алгебри $AC(1, 4)$, яка є максимальною алгеброю інваріантності рівняння ейконала, побудовані анзаци, які редукують дане рівняння до звичайних диференціальних рівнянь. За розв'язками редукованих рівнянь знайдені широкі класи точних розв'язків рівняння ейконала.

Релятивистским аналогом классического уравнения Гамильтона является уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2=1, \qquad (*)$$

Установлено [1], что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (*) является алгебра $AC(1,4)$, являющаяся алгеброй Ли группы $C(1,4)$ конформных преобразований пространства Минковского $R_{1,4}$. Симметрийная редукция уравнения (*) по подалгебрам алгебры $AP(1,4)$ исследовалась в [2]. Некоторые точные решения этого уравнения с использованием одномерных подалгебр алгебры $A\tilde{P}(1, 2)$ определены в [3, 4].

В настоящей статье находятся вещественные решения уравнения эйконала с помощью анзацев, редуцирующих уравнение к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Большинство из полученных таким образом дифференциальных уравнений удается проинтегрировать и тем самым построить решения исходного уравнения. Для построения анзацев используются подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$. Исследуется также зависимость между уравнением эйконала и уравнением Гамильтона — Якоби

$$u_t+\frac{1}{2m}(\nabla u)=0, \qquad (**)$$

где $u=u(t,\vec{x})$, $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $m$ — постоянная (масса частицы).

1. Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения эйконала является конформная алгебра $AC(1, 4)$, обладающая базисом

$$P_\alpha=\partial_\alpha,\quad J_{\alpha\beta}=g^{\alpha\nu}x_\nu\partial_\beta-g^{\beta\nu}x_\nu\partial_\alpha,\quad \mathrm{D}=-x^\alpha\partial_\alpha,$$

$$K_\alpha=-2(g^{\alpha\beta}x_\beta)\mathrm{D}-(g^{\beta\nu}x_\beta x_\nu)\partial_\alpha,$$

где $g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=-g_{44}=1$, $g_{\alpha\beta}=0$ при $\alpha\neq\beta$ ($\alpha$, $\beta$, $\nu=0,1,\ldots,4$). Алгебра $AC(1,4)$ содержит алгебру Пуанкаре $AP(1,4)=\langle P_0,P_1,P_2,P_3,P_4\rangle \mathbin{\text{⋺}} AO(1,4)$, где $AO(1,4)=\langle J_{\mu\nu}\mid \mu,\ \nu=0,1,\ldots,4\rangle$, расширенную алгебру Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)=AP(1,4)\oplus\langle \mathrm{D}\rangle$, а также оптическую алгебру $A\,\mathrm{Opt}(3)$, обладающую базисом

$$S_1+T_1=\frac{1}{2}(P_0+P_4+K_0-K_4),\quad Z_1=-J_{04}-\mathrm{D},$$

$$C_1=J_{04}-\mathrm{D},\quad T_1=\frac{1}{2}(P_0+P_4),\quad M_1=P_0-P_4,$$

$$P_a,\ H_a=J_{0a}+J_{a4},\ J_{ab}\quad (a,b=1,2,3).$$

Алгебра $AP(1, 4)$ содержит расширенную алгебру Галилея $A\tilde{G}(3)$, порожденную генераторами

$$P_a,\ J_{ab},\ G_a = J_{0a} - J_{a4},\quad T = \frac{1}{2}(P_0 - P_4),\quad M = P_0 + P_4 \quad (a, b = 1, 2, 3).$$

В данной статье подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$ используются для редукции и поиска точных решений уравнения (*). Если $L$ — одна из таких подалгебр, $\omega'(x, u)$, $\omega(x, u)$ — ее основные инварианты, то анзац $\omega' = \varphi(\omega)$ редуцирует уравнение (*) к обыкновенному дифференциальному уравнению с неизвестной функцией $\varphi(\omega)$. Каждому решению $\varphi = \varphi(\omega)$ редуцированного уравнения соответствует $L$-инвариантное решение $u = u(x)$ исходного уравнения (*). Для классификации всех таких решений следует описать с точностью до $C(1,4)$-эквивалентности подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$. При этом две подалгебры $L_1, L_2 \subset AC(1, 4)$ называются $C(1,4)$-эквивалентными, если с точностью до $C(1,4)$-сопряженности они обладают одними и теми же инвариантами.

Так как мы ищем только вещественные решения уравнения (*), то необходимо исключить из рассмотрения те подалгебры алгебры $AC(1, 4)$, которые с точностью до эквивалентности содержат $P_0 + P_2$ или $P_0$. Действительно, пусть $L$ — подалгебра алгебры $AC(1, 4)$, содержащая $P_0 + P_2$. Если решение $u - u(x) = 0$ уравнения эйконала инвариантно относительно $L$, то $u = u(x_0 - x_2, x_1, x_3)$. Но тогда

$$(\nabla u)^2 = -\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2,$$

откуда

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2 = 1$$

и мы приходим к противоречию. Аналогично рассматривается случай $P_0 \in L$.

Используя классификацию с точностью до $C(1,4)$-сопряженности подалгебр конформной алгебры $AC(1, 4)$ [4], получаем с учетом изложенного выше требуемый перечень $C(1, 4)$-неэквивалентных подалгебр ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$.

Подалгебры ранга 3 алгебры $AC(1, 4)$:

1) $L_1 = \langle J_{01} - D,\ J_{02} - J_{21} + P_4, P_3\rangle$; 2) $L_2 = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$; 3) $L_3 = \langle J_{01}, P_2, P_3\rangle$; 4) $L_4 = \langle J_{01} - J_{12}, J_{02}, P_3\rangle$; 5) $L_5 = \langle J_{01} - J_{13},\ J_{02} - J_{23}, J_{03}\rangle$; 6) $L_6 = \langle J_{01}, D, P_3\rangle$; 7) $L_7 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D\rangle$; 8) $L_8 = \langle J_{01} - J_{12} + P_0 - P_2,\ J_{02} - 2D, P_3\rangle$; 9) $L_9 = \langle J_{01} + P_4, P_2, P_3\rangle$; 10) $L_{10} = \langle J_{01} - J_{12},\ J_{02} + P_4, P_3\rangle$; 11) $L_{11} = \langle J_{01} - J_{13},\ J_{02} - J_{23},\ J_{03} + P_4\rangle$; 12) $L_{12} = \langle J_{01} - J_{13} + P_4,\ J_{02} - J_{23} + \alpha P_2 + \beta P_4,\ J_{03} - D\rangle$, $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$; 13) $L_{13} = \langle J_{04}, J_{12}, P_3\rangle$; 14) $L_{14} = \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}\rangle$; 15) $L_{15} = \langle G_3, J_{04}, J_{12}\rangle$; 16) $L_{16} = \langle J_{14}, P_2, P_3\rangle$; 17) $\langle L_{17} = J_{12}, J_{14}, J_{24}, P_3\rangle$; 18) $L_{18} = \langle J_{12} + J_{34},\ J_{13} - J_{24},\ J_{23} + J_{14}\rangle$; 19) $L_{19} = \langle J_{04} - J_{41}, P_2, P_3\rangle$; 20) $L_{20} = \langle J_{01} - J_{13},\ J_{02} - J_{23},\ J_{04} - J_{43} - J_{12}\rangle$; 21) $L_{21} = \langle J_{01} - J_{41},\ J_{02} - J_{21} - P_2, P_3\rangle$; 22) $L_{22} = \langle J_{03}, J_{14}, D\rangle$; 23) $L_{23} = \langle J_{12}, J_{34}, D\rangle$; 24) $L_{24} = \langle J_{02} + \alpha D,\ J_{01} - J_{12},\ J_{04} - J_{42}\rangle$, $\alpha \neq 0$; 25) $L_{25} = \langle J_{03} + \alpha D,\ J_{12} + \beta D,\ J_{04} - J_{43}\rangle$, $\alpha \neq 0$, $\beta \geqslant 0$; 26) $L_{26} = \langle J_{04},\ J_{12} + \alpha D,\ J_{03} - J_{34}\rangle$, $\alpha > 0$; 27) $L_{27} = \langle J_{12} + \alpha J_{03},\ J_{04} - J_{43}, D\rangle$, $\alpha > 0$; 28) $L_{28} = \langle J_{04} - J_{42},\ J_{02} + \alpha D, P_3\rangle$, $\alpha \neq 0$; 29) $L_{29} = \langle J_{12}, J_{14}, J_{24},$

$J_{03}+\alpha \mathbf{D}\rangle$, $\alpha>0$; 30) $L_{30}=\langle P_2, P_3, J_{01}+\mathbf{D}+P_0+P_1\rangle$; 31) $L_{31}=\langle J_{01}-J_{12}, J_{02}+\mathbf{D}+P_0+P_2, P_3\rangle$; 32) $L_{32}=\langle J_{12}, J_{14}, J_{24}, J_{03}+\mathbf{D}+P_0+P_3\rangle$; 33) $L_{33}=\langle J_{03}+\mathbf{D}+P_0+P_3, J_{12}+\alpha(P_0+P_3), J_{04}-J_{43}\rangle$, $\alpha\geqslant 0$; 34) $L_{34}=\langle J_{03}-J_{32}+P_0-P_2, J_{14}, J_{02}-2\mathbf{D}\rangle$; 35) $L_{35}=\langle J_{03}+\mathbf{D}, J_{12}+P_0+P_3, J_{04}-J_{43}\rangle$; 36) $L_{36}=\langle J_{04}-J_{41}+P_0-P_1, P_2, P_3\rangle$; 37) $L_{37}=\langle J_{14}+\alpha\mathbf{D}, P_2, P_3\rangle$; 38) $L_{38}=\langle J_{12}+\alpha J_{04}, \mathbf{D}, P_3\rangle$, $\alpha>0$; 39) $L_{39}=\langle J_{14}+P_0, P_2, P_3\rangle$; 40) $L_{40}=AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\gamma M_1\rangle$, $\gamma<0$; 41) $L_{41}=\langle S_1+T_1, J_{12}, Z_1\rangle$; 42) $L_{42}=AO(3)\oplus\langle S_1+T_1+\alpha Z_1\rangle$; 43) $L_{43}=\langle S_1+T_1+J_{12}, Z_1, H_1+P_2\rangle$;

44) $L_{44}=\langle S_1+T_1+2J_{12}+\gamma M_1, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\gamma<0$; 45) $L_{45}=\langle \alpha Z_1+S_1+T_1+2J_{12}, H_1+P_2+\sqrt{2}P_3, H_2-P_1-\sqrt{2}H_3\rangle$, $\alpha\in R$; 46) $L_{46}=\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle$; 47) $L_{47}=\langle P_0+K_0, J_{12}, J_{34}\rangle$; 48) $L_{48}=AO(3)\oplus\langle P_0+K_0\rangle$;

49) $L_{49}=\langle P_0-K_0-\alpha(K_4-P_4), J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle$, $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$;

50) $L_{50}=\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03}, -P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}\rangle$; 51) $L_{51}=\langle 2J_{12}+J_{34}, 2J_{13}+2J_{24}-\sqrt{3}(K_4-P_4), 2J_{23}-2J_{14}+\sqrt{3}(K_3-P_3)\rangle$.

**2.** Анзацы вида $u=f(x)\varphi(\omega)+g(x)$, $\omega=\omega(x)$. В настоящем пункте для построения анзацев, редуцирующих уравнение (*) к обыкновенным дифференциальным уравнениям, используются подалгебры $L_1$ — $L_{12}$. Рассмотрим, например, подалгебру $L_1$. Ее полный набор основных инвариантов состоит из функций

$$\omega'=\frac{(x_0-x_1)u-x_2}{(x_0^2-x_1^2-x_2^2)^{1/2}},\quad \omega=x_0-x_1.$$

Поэтому алгебре $L_1$ соответствует анзац $\omega'=\varphi(\omega)$, который можно записать в следующем виде:

$$u=\frac{(x_0^2-x_1^2-x_2^2)^{1/2}}{x_0-x_1}\varphi(\omega)+\frac{x_2}{x_0-x_1},\quad \omega=x_0-x_1.$$

Аналогично получаем анзацы и для остальных подалгебр

$$L_2: u=\varphi(\omega),\quad \omega=x_0;\qquad L_3: u=\varphi(\omega),\quad \omega=(x_0^2-x_1^2)^{1/2};$$

$$L_4: u=\varphi(\omega),\quad \omega=(x_0^2-x_1^2-x_2^2)^{1/2};$$

$$L_5: u=\varphi(\omega),\quad \omega=(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2)^{1/2};$$

$$L_6: u=x_2\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2}{x_2^2};$$

$$L_7\ \ u=x_3\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_0^2-x_1^2-x_2^2}{x_3^2};$$

$$L_8: u=[(x_0-x_2)^2-4x_1]\varphi(\omega),$$

$$\omega=3\ln[(x_0-x_2)^2-4x_1]-2\ln[6(x_0+x_2)-6x_1(x_0-x_2)+(x_0-x_2)^3];$$

$$L_9: u=\varphi(\omega)-\ln(x_0-x_1),\quad \omega=(x_0^2-x_1^2)^{1/2};$$

$$L_{10}: u = \varphi(\omega) - \ln(x_0 - x_2), \quad \omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2};$$

$$L_{11}: u = \varphi(\omega) - \ln(x_0 - x_3), \quad \omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2};$$

$$L_{12}: u = -\left(x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_3 + \alpha}\, x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2} \varphi(\omega) +$$

$$+ \frac{\beta x_2}{x_0 - x_3 + \alpha} + \frac{x_1}{x_0 - x_3}, \quad \omega = x_0 - x_3.$$

Анзац, соответствующий подалгебре $L_1$, редуцирует уравнение (*) к уравнению

$$2\varphi\dot{\varphi} - \omega^{-1}\varphi^2 - \omega^{-1}(1 + \omega^2) = 0. \tag{1}$$

Общим решением уравнения (1) является функция $\varphi = (\omega^2 + C\omega - 1)^{1/2}$. В этом случае

$$u = (x_0 - x_1)^{-1}\{x_2 + (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}[(x_0 - x_1)^2 + C(x_0 - x_1) - 1]^{1/2}\}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие всем остальным подалгебрам $L_2 - L_{12}$. Редуцированному уравнению присвоим номер той алгебры $L_j$, $2 \leqslant j \leqslant 12$, которой оно соответствует:

$$\dot{\varphi}^2 - 1 = 0, \tag{2—5}$$

$$4\omega\dot{\varphi}^2 - (\varphi - 2\omega\dot{\varphi})^2 - 1 = 0, \tag{6—7}$$

$$144(e^{\omega} - 1)\dot{\varphi}^2 - 96\varphi\dot{\varphi} - 16\varphi^2 - 1 = 0, \tag{8}$$

$$\dot{\varphi}^2 - \frac{2}{\omega}\dot{\varphi} - 1 = 0, \tag{9—11}$$

$$2\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 - \omega^{-2} - \beta^2(\omega + \alpha)^{-2} - 1 = 0. \tag{12}$$

Найдем общие решения редуцированных уравнений (2—12) и укажем соответствующие им точные решения уравнения эйконала. Общим решением редуцированного уравнения (2) является $\varphi = \pm\omega + C$. Следовательно, получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u = \pm(x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2)^{1/2} + C, \quad l = 1, 2, 3; \quad u = \pm x_0 + C.$$

Общим решением уравнения (6) является

$$\varphi = \frac{1}{2}(1 + \omega^{1/2})\{\lambda(\omega) + \lambda(\omega)^{-1}\} - \lambda(\omega)^{-1},$$

где $\lambda(\omega) = C$ или $\lambda(\omega) = \pm(\omega^{1/2} - 1)^{1/2}(\omega^{1/2} + 1)^{-1/2}$. В первом случае

$$u = \frac{C^2 + 1}{2C}(x_0^2 - x_1^2)^{1/2} + \frac{C^2 - 1}{2C}\, x_2, \quad C \in R,$$

а во втором —

$$u = \pm(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}.$$

Алгебре $L_7$ соответствуют такие решения уравнения эйконала.

$$u = \frac{C^2 + 1}{2C}(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2} + \frac{C^2 - 1}{2C}\, x_3,$$

$$u = \pm(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2}.$$

Общим решением уравнения (9) является

$$\varphi = \ln|\omega| \pm \{\sqrt{1 + \omega^2} + \ln|\sqrt{1 + \omega^2} - 1| - \ln|\omega|\} + C.$$

Следовательно, получаем решения уравнения эйконала

$$u = \sqrt{1 + x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2} - 1}{x_0 - x_l}\right| + C;$$

$$u = -\sqrt{1 + x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{1 + x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2} + 1}{x_0 - x_l}\right| + C;$$

где $l = 1, 2, 3$.

Интегрируя уравнение 12, находим

$$\varphi = -\left\{\frac{\omega^3 + (C + \alpha)\,\omega^2 + (C\alpha - \beta^2 - 1)\,\omega - \alpha}{\omega^2(\omega + \alpha)}\right\}^{1/2}.$$

Соответствующее ему решение уравнения эйконала имеет вид

$$u = \left(x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_3}{x_0 - x_3 + \alpha}x_2^2 - x_3^2\right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{(x_0 - x_3)^3 + (C + \alpha)(x_0 - x_3)^2 + (C\alpha - \beta^2 - 1)(x_0 - x_3) - \alpha}{(x_0 - x_3)^2(x_0 - x_3 + \alpha)}\Bigg\}^{1/2} +$$

$$+ \frac{\beta x_2}{x_0 - x_3 + \alpha} + \frac{x_1}{x_0 - x_3}.$$

**3**. Анзацы вида $u^2 = f(x)\,\varphi(\omega) + g(x)$, $\omega = \omega(x)$. Для построения анзацев указанного вида используем подалгебры $L_{13}$—$L_{35}$. В результате несложных вычислений получаем следующие анзацы:

$$L_{13} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

$$L_{14} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2};$$

$$L_{15} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2};$$

$$L_{16} : u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = x_0;$$

$$L_{17} : u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_0;$$

$$L_{18} : u^2 = \varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0;$$

$$L_{19} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2, \quad \omega = x_0 - x_1;$$

$$L_{20} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad \omega = x_0 - x_3;$$

$$L_{21} : u^2 = \varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1 - 1}x_2^2, \quad \omega = x_0 - x_1;$$

$$L_{22} : u^2 = x_2^2\varphi(\omega) - x_1^2, \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_3^2}{x_2^2};$$

$$L_{23} : u^2 = x_0^2\varphi(\omega) - x_3^2, \quad \omega = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2};$$

$$L_{24} : u^2 = -x_3^2\varphi(\omega) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = \frac{1 + \alpha}{\alpha}\ln x_3 - \ln(x_0 - x_2);$$

$$L_{25} : u^2 = -(x_1^2 + x_2^2)\,\varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2,$$

$$\omega = (1 + \alpha)\ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha\ln(x_0 - x_3) - 2\beta\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1};$$

$$L_{26} : u^2 = -(x_1^2 + x_2^2)\,\varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1};$$

$$L_{27}: u^2 = -(x_1^2 + x_2^2)\,\varphi(\omega) + x_0^2 - x_3^2,$$

$$\omega = 2\ln(x_0 - x_3) - \ln(x_1^2 + x_2^2) - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1};$$

$$L_{28}: u^2 = -x_1^2\varphi(\omega) + x_0^2 - x_2^2, \quad \omega = \alpha\ln(x_0 - x_2) - (1+\alpha)\ln x_1;$$

$$L_{29}: u^2 = (x_0^2 - x_3^2)\,\varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2,$$

$$\omega = (1+\alpha)\ln(x_0 + x_3) + (1-\alpha)\ln(x_0 - x_3);$$

$$L_{30}: u^2 = (x_0 - x_1)\,\varphi(\omega), \quad \omega = x_0 + x_1 + \ln(x_0 - x_1);$$

$$L_{31}: u^2 = (x_0 - x_2)\,\varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2}{x_0 - x_2} + \ln(x_0 - x_2);$$

$$L_{32}: u^2 = (x_0 - x_3)\,\varphi(\omega) - x_1^2 - x_2^2, \quad \omega = x_0 + x_3 + \ln(x_0 - x_3);$$

$$L_{33}: u^2 = -(x_0 - x_3)\,\varphi(\omega) + (x_0 - x_3)\left[\ln(x_0 - x_3) + 2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right] +$$

$$+ x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \frac{x_0 - x_3}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$L_{34}: u^2 = [(x_0 - x_2)^2 - 4x_3]^2\,\varphi(\omega) - x_1^2,$$

$$\omega = 3\ln[(x_0 - x_2)^2 - 4x_1] - 2\ln[6(x_0 + x_2) - 6x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3];$$

$$L_{35}: u^2 = -(x_0 - x_3)\,\varphi(\omega) + 2(x_0 - x_3)\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + x_0^2 - x_3^2, \quad \omega = \frac{x_0 - x_3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Выпишем редуцированные уравнения, соответствующие указанным анзацам:

$$\dot\varphi^2 + 4\varphi = 0, \tag{13—15}$$

$$\dot\varphi^2 - 4\varphi = 0, \tag{16—18}$$

$$\omega\dot\varphi - \varphi = 0, \tag{19—21}$$

$$(\omega - \omega^2)\,\dot\varphi^2 + 2\omega\varphi\dot\varphi - \varphi^2 - \varphi = 0, \tag{22}$$

$$(\varphi - \omega\dot\varphi)^2 - \omega\dot\varphi^2 - \varphi = 0, \tag{23}$$

$$\varphi^2\dot\varphi^2 - 4(1 - \gamma\varphi)\,\dot\varphi + 4(\varphi^2 - \varphi) = 0, \quad \gamma = \alpha^{-1}(1+\alpha), \tag{24}$$

$$\{(1+\alpha)^2 + \beta^2\}\,\dot\varphi^2 + 2\{(1+\alpha)\,\varphi - \alpha\}\,\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0, \tag{25}$$

$$(1+\alpha^2)\,\dot\varphi^2 + 2\varphi\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0, \tag{26}$$

$$(1+\alpha^2)\,\dot\varphi^2 - 2\varphi\dot\varphi + 2\dot\varphi^2 + \varphi^2 - \varphi = 0, \tag{27}$$

$$(1+\alpha)^2\,\dot\varphi^2 + 4\{\alpha - (1+\alpha)\,\varphi\}\,\dot\varphi + 4\varphi(\varphi - 1) = 0, \tag{28}$$

$$(1-\alpha^2)\,\dot\varphi^2 + 2\varphi\dot\varphi + \varphi^2 - \varphi = 0, \tag{29}$$

$$\dot\varphi^2 + \varphi\dot\varphi - \varphi = 0, \tag{30—32}$$

$$\omega^3\dot\varphi^2 + \omega\dot\varphi + \omega\alpha^2 - 1 = 0, \tag{33}$$

$$144\,(e^{\omega} - 1)\,\dot\varphi^2 - 96\varphi\dot\varphi - 16\varphi^2 - 1 = 0, \tag{34}$$

$$\omega^2\dot\varphi^2 + \dot\varphi + 1 = 0. \tag{35}$$

Общим решением уравнения (13) является $\varphi = -(\omega + C)^2$. Таким образом, получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2C(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - C^2;$$

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 - 2C(x_1^2 + \ldots + x_l^2)^{1/2}, \quad l = 2, 3.$$

Решая уравнение (16), получаем такие решения уравнения эйконала:

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_l^2 + 2Cx_0 + C^2, \quad l = 1, 2, 3.$$

Так как $\varphi = C\omega$ является общим решением уравнения (19), то уравнение эйконала имеет такие решения:

$$u^2 = C(x_0 - x_1) + x_0^2 - x_1^2; \qquad u^2 = C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2;$$

$$u^2 = C(x_0 - x_1) + x_0^2 - x_1^2 - \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_1 - 1} x_2^2.$$

Рассмотрим уравнение (24). Если $\gamma = 2$, то $\varphi = -Ce^{-\omega}$ или $\varphi = 1 - Ce^{\omega}$. Получаем решение уравнения эйконала

$$u^2 = C(x_0 - x_2) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \delta x_3^2, \quad \delta = 0, 1.$$

Если $\gamma = 1$, то $\varphi = -C^2e^{-2\omega} + 2Ce^{-\omega}$, $C \in R$, а потому

$$u^2 = C^2(x_0 - x_2)^2 - 2Cx_3(x_0 - x_2) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2.$$

Если $\gamma = 0$, то $\varphi = -Ce^{-\omega}(1 - Ce^{-\omega})^{-1}$. Соответствующим решением уравнения (*) является

$$u^2 = \left\{\frac{x_3^2}{1 - C(x_0 - x_2)} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2\right\}.$$

Если $\gamma \neq 0, 1, 2$, то $\varphi$ задается неявно

$$|\{1 - (2\gamma - \gamma^2)\varphi\}^{1/2} - \gamma + 1|^{\gamma-1} |\{1 - (2\gamma - \gamma^2)\varphi\}^{1/2} + 1| = e^{-\omega+C};$$

$$|\{1 - (2\gamma - \gamma^2)\varphi\}^{1/2} + \gamma - 1|^{\gamma-1} |\{1 - (2\gamma - \gamma^2)\varphi\}^{1/2} - 1| = e^{-\omega+C}.$$

Подставляя вместо $\varphi$ выражение $(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2)x_3^{-2}$, получаем уравнения, которые в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ задают $u$ как неявную функцию от $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$.

Уравнение (25) имеет частные решения $\varphi = 1$ и $\varphi = 0$. Им соответствуют решения

$$u^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \text{ и } u^2 = x_0^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = -1$, $\beta = 0$, то

$$\varphi = Ce^{\omega/2}(Ce^{\omega/2} - 1)^{-1}.$$

В этом случае

$$u^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{1 - C(x_0 - x_3)} + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то $\varphi = -Ce^{-\omega/2}$ или $\varphi = 1 - Ce^{-\omega/2}$. Имеем такие решения уравнения (*):

$$u^2 = C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_3^2;$$

$$u^2 = C(x_0 - x_3) + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Уравнение (27) распадается на два уравнения. Общее решение первого уравнения задается соотношением

$$2\ln|\{(1 - \varphi)(1 + \alpha^2\varphi)\}^{1/2} - 1 + \varphi| - \ln|1 - \varphi| +$$

$$+ 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{\{(1 - \varphi)(1 + \alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1 - \varphi)} = \omega + C,$$

а общее решение второго уравнения — соотношением

$$2\ln|\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}+1-\varphi|-\ln|1-\varphi|-$$
$$-2\alpha\operatorname{arctg}\frac{\{(1-\varphi)(1+\alpha^2\varphi)\}^{1/2}}{\alpha(1-\varphi)}=\omega+C.$$

Уравнение (28) имеет при $\alpha^2\neq 1$ такие решения:

$$\alpha\ln|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-\alpha|+\ln|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+1|=\omega+C;$$
$$\alpha\ln|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}+\alpha|+\ln|\{\alpha^2+(1-\alpha^2)\varphi\}^{1/2}-1|=\omega+C.$$

Если $\alpha=1$, то $\varphi=Ce^{\omega}$ или $\varphi=1+Ce^{\omega}$. Во втором случае получаем решение

$$u^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-C(x_0-x_2).$$

При $\alpha=-1$ имеем $\varphi=(1-Ce^{\omega})^{-1}$ и, соответственно,

$$u^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-\frac{Cx_1^2}{C-(x_0-x_2)}.$$

Общим решением уравнения (29) при $\alpha=1$ является $\varphi=1+Ce^{-\omega/2}$. Соответствующим ему решением уравнения (*) будет

$$u^2=C(x_0+x_3)+x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2.$$

Уравнение (30) распадается на два уравнения, которые имеют соответственно такие общие решения:

$$\ln\left|\frac{\psi-1}{\psi+1}\right|-\frac{2}{\psi+1}=\omega+C,\quad \ln\left|\frac{\psi+1}{\psi-1}\right|+\frac{2}{\psi-1}=\omega+C,$$

где $\psi=((\varphi+4)/\varphi)^{1/2}$.

Интегрируя уравнение (33), находим, что при $\alpha\neq 0$

$$\varphi=\frac{1}{2\omega}\pm\left\{\frac{1-\lambda(\omega)}{4\omega}+2\alpha\operatorname{arctg}\frac{\lambda(\omega)-1}{2\alpha\omega}+\right.$$
$$\left.+\ln\left|\frac{\lambda(\omega)-1-2\omega}{\omega}\right|+\frac{(1+\alpha^2)\omega}{\lambda(\omega)-1-2\omega}\right\}+C,$$

где $\lambda(\omega)=(-4\alpha^2\omega+4\omega+1)^{1/2}$, а при $\alpha=0$

$$\varphi=\frac{1}{2\omega}\pm\left\{\ln\left|\frac{(4\omega+1)^{1/2}-1}{(4\omega+1)^{1/2}+1}\right|-\frac{(4\omega+1)^{1/2}}{2\omega}\right\}+C.$$

Уравнение (35) распадается на два уравнения, которые имеют такие общие решения соответственно:

$$\varphi=-\frac{2\omega}{(1-4\omega^2)^{1/2}-1}-2\operatorname{arctg}\frac{(1-4\omega^2)^{1/2}-1}{2\omega}-C;$$
$$\varphi=-\frac{(1-4\omega^2)^{1/2}-1}{2\omega}+2\operatorname{arctg}\frac{(1-4\omega^2)^{1/2}-1}{2\omega}-C.$$

Получаем следующие решения уравнения эйконала:

$$u^2=(x_0-x_3)\left(\frac{1}{z}+2\operatorname{arctg}z+2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+x_0+x_3+C\right),$$
$$u^2=(x_0-x_3)\left(z-2\operatorname{arctg}z+2\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+x_0+x_3+C\right),$$

где

$$z=\frac{\{(x_1^2+x_2^2)^2-4\,(x_0-x_3)^2\}^{1/2}-(x_1^2+x_2^2)}{2\,(x_0-x_3)}.$$

4. Неявные анзацы. Используя подалгебры $L_{36}$—$L_{50}$, получаем анзацы вида $\omega'(x,u)=\varphi(\omega(x,u))$, где $\omega'$ и $\omega$ зависят от $u$. Такие анзацы задают в некоторых областях пространства $R_{1,4}$ $u$ как неявную функцию от $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ и потому мы их называем неявными анзацами:

$$L_{36}: u=\frac{1}{4}\varphi(\omega)+\frac{1}{4}(x_0-x_1)^2\quad \omega=6\,(x_0-x_1)\,u-(x_0-x_1)^3-6\,(x_0+x_1);$$

$$L_{37}: u^2=x_0^2\varphi(\omega)-x_1^2,\quad \omega=\ln(x_1^2+u^2)-2\alpha\operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$

$$L_{38}: u^2=-(x_1^2+x_2^2)\,\varphi(\omega)+x_0^2,\quad \omega=2\alpha\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}-\ln\frac{x_0-u}{x_0+u};$$

$$L_{39}: u^2=\varphi(\omega)-x_1^2,\quad \omega=x_0+\operatorname{arctg}\frac{u}{x_1};$$

$$L_{40}: x_0-u-\frac{(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(x_0+u)^2+1}-2\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u)=\sqrt{2}\varphi(\omega),$$

$$\omega=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2};$$

$$L_{41}: x_0-u-\frac{(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(x_0+u)^2+1}=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{(x_0+u)^2+1}\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2};$$

$$L_{42}: -x_0-u+\frac{(x_0-u)[(x_0+u)^2+1]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\varphi(\omega),$$

$$\omega=\ln\frac{(x_0+u)^2+1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-2\alpha\operatorname{arctg}(x_0+u);$$

$$L_{43}: \frac{(x_0-u)[(x_0+u)^2+1]}{x_3^2}-2\,\frac{(x_1^2-x_2^2)(x_0+u)+x_1x_2[(x_0+u)^2-1]}{(x_0+u)^2+1}-$$

$$-(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=\varphi(\omega),\quad \omega=\frac{[x_1+(x_0+u)\,x_2]^2}{[(x_0+u)^2+1]\,x_3};$$

$$L_{44}: \frac{x_0-u}{2}-(x_0+u)\,\omega^2-\left\{\frac{(x_0+u)[(x_0+u)^2-3]}{2\,[(x_0+u)^2+1]^2}(x_1^2-x_2^2)+\right.$$

$$+\frac{1-3\,(x_0+u)^2}{[(x_0+u)^2+1]^2}\,x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}\,x_1x_3-$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2}\,(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}\,x_2x_3\right\}-\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u)=\varphi(\omega),$$

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}\,(x_0+u)\,x_1+\sqrt{2}\,[(x_0+u)^2-1]\,x_2+[(x_0+u)^2+1]\,x_3}{\sqrt{2}\,[(x_0+u)^2+1]^{3/2}};$$

$$L_{45}: \frac{x_0-u}{2}-(x_0+u)\,\omega^2-\left\{\frac{(x_0+u)[(x_0+u)^2-3]}{2\,[(x_0+u)^2+1]^2}(x_1^2-x_2^2)+\right.$$

$$+\frac{1-3\,(x_0+u)^2}{[(x_0+u)^2+1]^2}\,x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{(x_0+u)^2+1}\,x_1x_3-$$

$$\left.-\frac{\sqrt{2}\,(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}\,x_2x_3\right\}-\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u)=\varphi(\ln\omega+d\operatorname{arctg}(x_0+u)),$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1 + \sqrt{2}[(x_0+u)^2-1]x_2 + [(x_0+u)^2+1]x_3}{\sqrt{2}[(x_0+u)^2+1]^{3/2}};$$

$$L_{46}: \frac{(\vec{x}^2-1)^2 - 4(x_1^2+x_2^2)}{(\vec{x}^2+1)^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x_0(\vec{x}^2-1) + 2x_1x_3 + 2x_2u}{(\vec{x}^2+1)^2};$$

$$L_{47}: \frac{x_3^2+x_4^2}{x_1^2+x_2^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{(\vec{x}^2+1)^2}{x_1^2+x_2^2};$$

$$L_{48}: \frac{u^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{\vec{x}^2+1}{u};$$

$$L_{49}: \frac{4u^2+(\vec{x}^2+1)^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha \operatorname{arctg}\frac{2x_0}{\vec{x}^2-1} + \operatorname{arctg}\frac{\vec{x}^2+1}{2u};$$

$$L_{50}: u^2 = -\frac{1}{12}\frac{x_2}{\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3}\varphi(u) - \frac{1}{12}\frac{[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3]^2}{x_2^2} +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2(x_0+u)+2\sqrt{3}(x_0-u)x_3+(x_0-u)^3}{x_2^2[\sqrt{3}(x_0-u)^2+4x_3]} - 1.$$

Указанные анзацы редуцируют уравнение эйконала к следующим уравнениям:

$$9\varphi\dot{\varphi}^2 + 4 = 0; \tag{36}$$

$$(\varphi - \alpha^2)\dot{\varphi}^2 + 4\varphi^2\dot{\varphi} + 4\varphi^3 - 4\varphi^2 = 0; \tag{37}$$

$$(4 + \alpha^2\varphi^2)\dot{\varphi}^2 + \varphi^4 - \varphi^3 = 0; \tag{38}$$

$$(\varphi - 1)\dot{\varphi}^2 - 4\varphi^2 = 0; \tag{39}$$

$$2\omega\dot{\varphi}^2 + \omega + 2\gamma =; \tag{40}$$

$$2\omega(\omega+1)^2\dot{\varphi}^2 + 2\varphi^2 + 1 = 0; \tag{41}$$

$$2\dot{\varphi}^2 - (4\varphi + 2\sqrt{2}\alpha)\dot{\varphi} + 2\varphi^2 + 1 = 0; \tag{42}$$

$$(\omega + \omega^2)\dot{\varphi}^2 - 2\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 + 4\omega + 1 = 0; \tag{43}$$

$$3\dot{\varphi}^2 + 12\omega^2 + 4\gamma = 0; \tag{44}$$

$$12 + 12\varphi^2 + (4\alpha + 12\varphi)\dot{\varphi} + 3\dot{\varphi}^2 = 0; \tag{45}$$

$$(16\omega^2 - 1)\dot{\varphi}^2 + 2(5\varphi - 1)\omega\dot{\varphi} + 16\varphi(\varphi - 1) = 0; \tag{46}$$

$$(\omega^2 + 4)\dot{\varphi}^2 - 4\omega\varphi\dot{\varphi} - 4\varphi - 4\varphi^2 = 0; \tag{47}$$

$$(4 + \omega\varphi)\dot{\varphi}^2 + 4\omega\varphi\dot{\varphi} + 4\varphi^2(\varphi + 1) = 0; \tag{48}$$

$$(-\alpha^2\varphi + \varphi + 4)\dot{\varphi}^2 + \varphi^2(\varphi + 4)^2 = 0; \tag{49}$$

$$-9[\varphi^2 - 256(\omega^2+1)^2]\dot{\varphi}^2 + 6\omega\varphi\dot{\varphi} - \omega^2 - 1 = 0. \tag{50}$$

Общим решением уравнения (36) является $\varphi = -(\omega + C)^{2/3}$. Ему соответствует решение

$$4u + [6(x_0 - x_1)u - (x_0 - x_1)^3 - 6(x_0 + x_1) + C]^{2/3} - (x_0 - x_1)^2 = 0$$

уравнения (*).

По решениям уравнения (37) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$\alpha \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)(x_1^2+u^2)-\alpha^2 x_0}}{\alpha x_0} + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)(x_1^2+u^2)-\alpha^2 x_0} - x_0\right| - \alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1} + C = 0;$$

$$-\alpha \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1+\alpha^2)(x_1^2+u^2)-\alpha^2 x_0}}{\alpha x_0} + \ln\left|\sqrt{(1+\alpha^2)(x_1^2+u^2)-\alpha^2 x_0} + x_0\right| - \alpha \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1} + C = 0.$$

Уравнение (38) имеет решения $\varphi = 0$, $\varphi = 1$ и

$$-2\alpha\left\{\alpha\left(\frac{1-\varphi}{1+\alpha^2\varphi}\right)^{1/2}\right\} + \ln\left|\frac{(1-\varphi)^{1/2}-(1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}{(1-\varphi)^{1/2}+(1+\alpha^2\varphi)^{1/2}}\right| = \pm\omega + C.$$

Если $\varphi = 0$, то $u = \pm x_0$.

Общим решением уравнения (39) является

$$\sqrt{\varphi - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{\varphi - 1} + C = \pm\omega.$$

Следовательно, получаем решение уравнения эйконала

$$\sqrt{x_1^2+u^2-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{x_1^2+u^2-1} \pm \left(x_0 + \operatorname{arctg}\frac{u}{x_1}\right) + C = 0.$$

По решениям редуцированных уравнений (40—50) находим следующие решения уравнения эйконала:

$$-x_0 + u + \frac{(x_0+u)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{(x_0+u)^2+1} + 2\gamma \operatorname{arctg}(x_0+u) \pm \gamma\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma[(x_0+u)^2+1]}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} + \frac{\sqrt{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\gamma[(x_0+u)^2+1]}}{\gamma[(x_0+u)^2+1]}\right],$$

$$-u + \sqrt{2}(x_0+u)\omega^2 + \frac{(x_0+u)[(x_0+u)^2-3]}{\sqrt{2}[(x_0+u)^2+1]^2}(x_1^2-x_2^2) + \frac{\sqrt{2}[1-3(x_0+u)^2]}{[(x_0+u)^2+1]^2}x_1x_2 - \frac{2}{(x_0+u)^2+1}x_1x_3 - \frac{2(x_0+u)}{(x_0+u)^2+1}x_2x_3 + \sqrt{2}\gamma\operatorname{arctg}(x_0+u) \pm 2\sqrt{2}\arcsin\sqrt{\frac{3}{|\gamma|}}\,\omega + C = 0,$$

$$\omega = \frac{2\sqrt{2}(x_0+u)x_1 + \sqrt{2}[(x_0+u)^2-1]x_2 + [(x_0+u)^2+1]x_3}{\sqrt{2}[(x_0+u)^2+1]^{3/2}}.$$

5. **О связи между уравнениями эйконала и Гамильтона—Якоби.** Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (**) является конформная алгебра $AC(1, 4)$ [5], обладающая базисом

$$\hat{J}_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, \quad \hat{P}_a = \partial_a, \quad \hat{P}_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 + m\partial_u),$$

$$\hat{P}_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_0 - m\partial_u), \quad \hat{D} = -(t\partial_0 + x^a\partial_a + u\partial_u),$$

$$\hat{J}_{04} = t\partial_0 - u\partial_u, \quad \hat{J}_{0a} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$

$$J_{a4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}\,u\right)\partial_a + mx_a\partial_u\right\},$$

$$K_0 = -\sqrt{2}\left[\left(t^2 + \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\partial_0 + \left(t + \frac{1}{m}\,u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^2 + \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$

$$K_4 = \sqrt{2}\left[\left(t^2 - \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\partial_0 + \left(t - \frac{1}{m}\,u\right)x^a\partial_a + \left(\frac{m}{2}\vec{x}^2 - \frac{u^2}{m}\right)\partial_u\right],$$

$$K_a = -2x_a\mathbf{D} + \left(\frac{2}{m}\,tu - \vec{x}^2\right)P_a,$$

где $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,\ a, b = 1, 2, 3.$

Чтобы установить связь между уравнениями (*) и (**), рассмотрим пространства $X_t \times V$ и $X \times U$, где $X = \{(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\}$ и $X_t = \{(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\}$ — пространства, представляющие независимые переменные, а $U = \{u\}$ и $V = \{v\}$ — пространства зависимых переменных. Отображение $\theta :$ $(t,\ \vec{x},\ v) \to ((x_0,\ \vec{x},\ u)$, определенное с помощью формул

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t + \frac{v}{m}\right),\quad x_a = x_a,\quad u = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t - \frac{v}{m}\right),$$

является отображением пространства $X_t \times V$ на пространство $X \times U$. В предположении, что $\partial u/\partial x_0 + 1 \neq 0$, подстановка $\theta$ переводит уравнение (*) в уравнение (**). Аналогично, отображение $\theta_1 : (x_0, \vec{x}, u) \to (t, \vec{x}, v)$, определенное с помощью формул

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x_0 + u),\quad x_a = x_a,\quad v = \frac{m}{\sqrt{2}}\,(x_0 - u),$$

является отображением пространства $X \times U$ на пространство $X_t \times V$ и если $m + v_t \neq 0$, то подстановка $\theta_1$ переводит уравнение (**) в (*). Так как $\theta\theta_1$ — тождественное преобразование пространства $X \times U$, а $\theta_1\theta$ — тождественное преобразование пространства $X_t \times V$, то $\theta_1 = \theta^{-1}$.

Исследуем зависимость между уравнениями (*) и (**) более подробно. С этой целью рассмотрим пространства $X_t \times V \times V^{(1)}$ и $X \times U \times U^{(1)}$, координаты которых представляют независимые переменные, зависимые переменные и производные первого порядка от зависимых переменных. Выделим в $X_t \times V \times V^{(1)}$ открытое подпространство $M_1$, состоящее из тех векторов $(t, \vec{x},\ v,\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3)$, у которых $v_0 + m \neq 0$, а в $X \times U \times U^{(1)}$ — открытое подпространство $M_2$, состоящее из тех векторов $(x_0\ \vec{x},\ u,\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3)$, у которых $u_0 + 1 \neq 0$. Покажем, что отображение $\theta : X_t \times V \to X \times U$ можно продолжить до отображения $\hat{\theta} : M_1 \to M_2$.

Возьмем произвольную функцию $v = f\,(t, \vec{x})$ и пусть

$$\Gamma_f = \{(t, \vec{x}, f\,(t, \vec{x}) \mid (t, \vec{x}) \in \Omega\} \subset X_t \times V$$

— ее график, где $\Omega$ — область определения функции $f$. Отображение $\theta$ переводит $\Gamma_f$ в

$$\theta\cdot\Gamma_f = \{(x_0, \vec{x}, u) = \theta\,(t, \vec{x}, v) \mid (t, \vec{x}, v) \in \Gamma_f\}.$$

Множество $\theta\cdot\Gamma_f$ в общем случае не является графиком какой-либо однозначной функции $u = \hat{f}\,(x_0, \vec{x})$. Однако, поскольку $m + v_t \neq 0$, то результат преобразования $\theta\cdot\Gamma_f = \Gamma_{\hat{f}}$ является графиком некоторой однозначной гладкой функции $u = \hat{f}\,(x_0, \vec{x})$. Докажем это. Действительно, имеем

$$\frac{m}{\sqrt{2}}\,(x_0 - u) - v\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,(x_0 + u),\ x_1, x_2, x_3\right) = 0. \tag{51}$$

Найдем производную по $u$:

$$-\frac{m}{\sqrt{2}}-v_t\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(m+v_t).$$

По условию $m+v_t\neq 0$. Поэтому уравнение (51) определяет в некоторой окрестности точки $(x_0, x_1, x_2, x_3, u)$ $u$ как однозначную неявную функцию $\hat{f}$ от $x_0, x_1, x_2, x_3$. Функция $\hat{f}$ называется образом $f$ при отображении $\theta$ и обозначается $\hat{f}=\theta\cdot f$. Отметим также, что если $v_t=0$, то уравнение Гамильтона — Якоби не имеет вещественных решений. Поэтому следует предполагать, что $v_t\neq 0$ и $m+v_t\neq 0$. При таком предположении $u_0+1\neq 0$. Продолжение $\hat{\theta}: M_1\to M_2$ отображения $\theta$ определяется так, что оно преобразует производные функции $v=f(t,\vec{x})$ в соответствующие производные преобразованных функций $u=\hat{f}(x_0,\vec{x})$. Продолженное действие отображения $\theta$ определено корректно. Действительно, пусть $(t^0, \vec{x}^0, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$ — заданная точка в $M_1$. Выберем произвольную гладкую функцию $v=f(t,\vec{x})$, определенную в окрестности точки $(t^0,\vec{x}^0)$, график которой лежит в $M_1$ и которая имеет данные производные $v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0$ в точке $(t^0, \vec{x}^0)$. Преобразованная функция $\theta\cdot f$ определена в окрестности соответствующей точки $(x_0^0, \vec{x}^0, u^0)=\theta(t^0,\vec{x}^0,v^0)$. Определим теперь действие продолженного преобразования $\hat{\theta}$ на точку $(t^0, \vec{x}^0, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, вычисляя производные преобразованной функции $\theta\cdot f$ в точке $(x_0^0, \vec{x}^0)$. Пользуясь цепным правилом, получаем, что это определение зависит лишь от производных функции $f$ в точке $(t^0,\vec{x}^0)$, т. е. от самой точки $(t^0, \vec{x}^0, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$, и следовательно, не зависит от выбора функции $f$, представляющей точку $(t^0, \vec{x}^0, v^0, v_0^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0)$.

Пусть $\Delta_1$ и $\Delta_2$ — многообразия, определяющиеся уравнениями (*) и (**) соответственно, $M_1'$ — множество, состоящее из всех точек многообразия $\Delta_1$, для которых $u_0+1\neq 0$, а $M_2'$ — множество, состоящее из всех точек многообразия $\Delta_2$, для которых $v_t+m\neq 0$. Очевидно, $M_1'=M_1\cap\Delta_1$, $M_2'=M_2\cap\Delta_2$ и в силу изложенного выше $\hat{\theta}$ отображает $M_1'$ на $M_2'$. Инвариантность уравнения (*) относительно группы $G_1=\exp AC(1,4)$ означает, что многообразие $\Delta_1$ инвариантно относительно действия продолженной группы $\tilde{G}_1$. Аналогично, многообразие $\Delta_2$ инвариантно относительно продолженной группы $\tilde{G}_2$, где $G_2=\exp\hat{A}C(1,4)$. Отсюда вытекает, что если $g_1\in\tilde{G}_1$, то $\hat{\theta}g_1\hat{\theta}_1\in G_2$ и, обратно, если $g_2\in\tilde{G}_2$, то $\hat{\theta}_1 g_2\hat{\theta}\in G_1$. Значит, отображение $\theta$ индуцирует изоморфизм $\varphi_\theta: X\to\theta X\theta_1$ алгебры $AC(1,4)$ на алгебру $\hat{A}C(1,4)$, который действует следующим образом:

$$P_0\to-\hat{P}_0,\quad P_4\to-\hat{P}_4,\quad J_{ab}\to J_{ab},$$

$$J_{a4}\to-\hat{J}_{a4},\quad J_{04}\to\hat{J}_{04},\quad J_{0a}\to-J_{0a},\quad K_0\to-\hat{K}_0,\quad K_4\to-\hat{K}_4,$$

$$K_a\to\hat{K}_a.$$

Докажем, например, что $\varphi_\theta(P_0)=-\hat{P}$. Действительно, пусть $f(x_0,\vec{x},u)$ — произвольная дифференцируемая функция. Тогда

$$\theta_1 f(x_0,\vec{x},u)=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+\frac{u}{m}\right),\quad\vec{x},\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{u}{m}\right)\right)$$

и значит, $P_1\theta_1 f(x_0, \vec{x}, u) = -\dfrac{\partial f}{\partial x_0}$. Следовательно, $\theta P_0 \theta_1 = -\dfrac{\partial}{\partial x_0} = -\hat{P}_0$, а потому $\varphi_\theta(P_0) = -\hat{P}_0$.

Пусть $H$ — произвольная подалгебра алгебры $AC(1, 4)$, тогда $\varphi_\theta(H) = \hat{H}$ является подалгеброй алгебры $\hat{A}C(1, 4)$, причем ранги алгебр $H$ и $\hat{H}$ совпадают. Из предыдущих результатов вытекает, что если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — полная система инвариантов алгебры $H$, то $\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_s)$ — полная система инвариантов алгебры $\hat{H}$. Анзац $\omega_s = \varphi(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1})$, соответствующий подалгебре $H$, редуцирует уравнение (*) к дифференциальному уравнению $F(\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}, \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, содержащему только переменные $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$, функцию $\varphi$ и частные производные $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}$ от $\varphi$ по переменным $\omega_1, \ldots, \omega_{s-1}$ соответственно. Анзац $\theta(\omega_s) = \varphi(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1})) = 0$, соответствующий подалгебре $\hat{H}$, редуцирует уравнение (**) к дифференциальному уравнению $F(\theta(\omega_1), \ldots, \theta(\omega_{s-1}), \varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = 0$, имеющему тот же вид, что и предыдущее. Это утверждение вытекает из равенства

$$u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - 1 = -\frac{4m}{(m + v_t)^2}\left(v_t + \frac{1}{2m}(\Delta v)^2\right)$$

и соотношений

$$u_0 = \frac{m - v_t}{m + v_t}, \quad u_a = -\frac{\sqrt{2}}{m + v_t} v_a, \quad a = 1, 2, 3,$$

которые связывают производные функций $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $v = \theta_1 u$.


1. *Fushchich W. I., Shtelen W. M.* The summetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lettere al nuovo cimento.— 1982.— 34, N 16.— P. 498—502.
2. *Фущич В. И., Федорчук В. М., Федорчук И. М.* Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений.— Киев, 1986.— 36 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.27).
3. *Fushchich W. I., Serov N. I.* The summetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A.: Math. Gen.— 1983.— 16, N 15.— P. 3645—3656.
4. *Баранник Л. Ф., Фущич В. И.* О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$.— Киев, 1988.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.34).
5. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 336 с.


Получено 02.11.90