УДК 517.94

Л. Б. УРМАНЧЕВА, асп. (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Численно-аналитический метод решения двухточечных задач для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

Обобщая метод Самойленко — Ронто, находятся условия существования решения двухточечных задач для систем интегро-дифференциальных уравнений с частичными производными вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}=f(t,x,u(t,x),\ u(t-\tau,x),\ u'_t(t,x),\ u'_t(t-\tau,x),$$

$$u''_{tx}(t-\tau,x),\ \int\limits_0^t\int\limits_0^x \varphi(t,s,x,p,u(s,p),u(s-\tau,p),u'_s(s,p),u'_s(s-\tau,p),\ u''_{sp}(s-\tau,p))\,dsdp).$$

Узагальнюючи метод Самойленко — Ронто, знаходяться умови існування розв'язку двоточкових задач для систем інтегро-диференціальних рівнянь з частинними похідними вигляду

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}=f(t,x,u(t,x),\ u(t-\tau,x),\ u'_t(t,x),\ u'_t(t-\tau,x),\ u''_{tx}(t-\tau,x),$$

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^x \varphi(t,s,x,p,u(s,p),\ u(s-\tau,p),\ u'_s(s,p),\ u'_s(s-\tau,p),\ u''_{sp}(s-\tau,p))\,dsdp).$$

В настоящей статье для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными обобщается численно-аналитический метод, предложенный Самойленко и Ронто [1] для решения двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для систем уравнений с частными производными задачи с многоточечными краевыми условиями изучались в работах Скоробогатько [2], Пташника [3] и др.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с отклоняющимся аргументом вида [4, 5]

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x}=f(t,x,u(t,x),\ u(t-\tau,x),\ u'_t(t,x),\ u'_t(t-\tau,x),$$

$$u''_{tx}(t-\tau, x), \int_0^t\int_0^x \varphi(t, s, x, p, u(s, p), u(s-\tau, p), u'_s(s, p), u'_s(s-\tau, p),$$
$$u''_{sp}(s-\tau, p))\,dsdp). \qquad (1)$$

Здесь $u=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $f=(f_1, \ldots, f_n)$ — векторы n-мерного евклидова пространства E_n, запаздывание τ постоянно.

Будем искать решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u(t, 0)=u_0(t)+v(0), \qquad (2)$$

$$Au(0, x)+Bu(T, x)=w(x), \qquad (3)$$

причем предполагаем, что

$$u(0, x)=u_0(0)+v(x), \qquad (4)$$

где вектор-функция $v(x)$ строится в процессе нахождения искомого решения, а вектор-функция $u_0(t)$ задана, непрерывна и обладает непрерывной ограниченной производной: $|u_0(t)|\leqslant N$, $|u'_{0_t}(t)\leqslant N$, $t\in[-\tau, T]$, вектор-функция $v(x)$ ограничена и непрерывна.

Примем следующие предложения.

I. Вектор-функция $f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$ определена и непрерывна в области Ω: $(t, x)\in[-\tau, T]\times[-a, a]$, $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)\in D\times D\times D_1\times D_1\times D_2\times D_3$, где D, D_1, D_2, D_3 — некоторые ограниченные области E_n, и удовлетворяет неравенствам

$$|f(t, x, u_0(t), u_0(t-\tau), u'_0(t), u'_0(t-\tau), 0,$$
$$\int_0^t\int_0^x \varphi(t, s, x, p, u_0(s), u_0(s-\tau), u'_0(s), u'_0(s-\tau))\,dsdp\leqslant M, \qquad (5)$$

$$|f(t, x, \bar u_1, \bar u_2, \bar u_3, \bar u_4, \bar u_5, \bar u_6)-f(t, x, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)|\leqslant\sum_{i=1}^{6}K_i|\bar u_i-u_i|, \qquad (6)$$

причем элементы матриц K_i $(i=\overline{1, 6})$ неотрицательны.

II. Вектор-функция $\varphi(t, s, x, p, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ определена, непрерывна и ограничена, $|\varphi|\leqslant M_0$, в области Ω_0:

$$(t, x)\in[-\tau, T]\times[-a, a],\ (t, s, x, p)\in[-\tau, T]\times[-\tau, T]\times$$
$$[-a, a]\times[-a, a],\ (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)\in D\times D\times D_1\times D_1\times D_2,$$

а также удовлетворяет условиям Липшица

$$|\varphi(t, s, x, p, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)-\varphi(t, s, x, p, \bar z_1, \bar z_2, \bar z_3, \bar z_4, \bar z_5)|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{5}L_i|z_i-\bar z_i|, \qquad (7)$$

где L_i $(i=\overline{1, 5})$ — постоянные $n\times n$-матрицы с неотрицательными элементами.

III. Постоянные матрицы A и B имеют обратные B^{-1} и $(A+B)^{-1}$. Элементы матриц A_0, B_0, B_0^{-1}, $(A+B)_0^{-1}$ неотрицательны, $\{A_0\}_{ij}=|\{A\}_{ij}|$, $\{B_0\}_{ij}=|\{B\}_{ij}|$, $\{B_0^{-1}\}_{ij}=|\{B^{-1}\}_{ij}|$, $\{(A+B)_0^{-1}\}_{ij}=|\{(A+B)^{-1}\}_{ij}|$.

IV. Собственные числа матрицы

$$Q=\Big\{[aK_1+aK_2+(L_1+L_2)K_6a^2T]\cdot\left[\frac{T}{2}+(E+B_0^{-1}A_0)(A+B)_0^{-1}B_0T\right]+$$
$$+a(K_3+K_4+K_6aT(L_3+L_4)+K_5+aTL_5\Big\}$$

лежат в круге единичного радиуса.

Выберем последовательные приближения в виде

$$u_0(t, x) = u_0(t) + v_0(x),$$

$$u_{n+1}(t, x) = u_0(t) + v_0(x) + \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i(x) + \int_0^x \int_0^t f_n d\xi d\eta, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

где

$$f_n = f(\xi, \eta, u_n(\xi, \eta), u_n(\xi - \tau, \eta), u'_{n\xi}(\xi, \eta),$$

$$u'_{n\xi}(\xi - \tau, \eta), u''_{n\xi\eta}(\xi - \tau, \eta), \int_0^\eta \int_0^\xi \varphi(\xi, s, \eta, p, u_n(s, p), \tag{9}$$

$$u_n(s - \tau, p), u'_{n\xi}(s, p), u'_{ns}(s - \tau, p), u''_{nsp}(s - \tau, p)\, ds dp.$$

Вектор-функции $v_0(x)$, $\delta_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, будем выбирать так, чтобы последовательные приближения $u_0(t, x)$, $u_n(t, x)$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяли двухточечному условию (3). Тогда для нахождения вектор-функции $v_0(x)$ получим соотношение

$$A[u_0(0) + v_0(x)] + B[u_0(T) + v_0(x)] = w(x). \tag{10}$$

Поэтому

$$v_0(x) = (A + B)^{-1}[w(x) - Au_0(0) - Bu_0(T)]. \tag{11}$$

Для определения вектор-функции $\delta_1(x)$ из (8) находим $u_1(0, x)$ и $u_1(T, x)$ и подставляем в условие (3):

$$A[u_0(0) + v_0(x) + \delta_1(x)] + B\Big[u_0(T) + v_0(x) + \delta_1(x) + \int_0^x \int_0^T f_0 d\xi d\eta\Big] = w(x). \tag{12}$$

Вычитая из соотношения (12) соотношение (10), получаем

$$(A + B)\delta_1(x) + B\int_0^x \int_0^T f_0 d\xi d\eta = 0. \tag{13}$$

Тогда

$$\delta_1(x) = -(A + B)^{-1}B\int_0^x \int_0^T f_0 d\xi d\eta.$$

Умножим соотношение (13) на $\frac{t}{T}B^{-1}$ и вычтем его из правой части выражения для $u_1(t, x)$ из (8). Тогда $u_1(t, x)$ запишется в виде

$$u_1(t, x) = u_0(t) + v_0(x) + \int_0^x \int_0^t [f_0 - \bar{f}_0]\, d\xi d\eta + \frac{T - t}{T}\delta_1(x) - \frac{t}{T}B^{-1}A\delta_1(x),$$

где

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f_0 d\xi.$$

Оценим разность $u_1(t, x) - u_0(t, x)$. Учитывая неравенство (5), имеем

$$|u_1(t, x) - u_0(t, x)| \leqslant \Big|\int_0^x \alpha(t) M dt\Big| + \Big|\frac{T - t}{T}\delta_1(x)\Big| + \Big|\frac{t}{T}B^{-1}A\delta_1(x)\Big|,$$

где $\alpha(t) = 2t(1 - t/T)$. Так как

$$|\delta_1(x)| \leqslant (A + B)_0^{-1}B_0\Big|\int_0^x \int_0^T M d\xi d\eta\Big| \leqslant a(A + B)_0^{-1}B_0 TM,$$

то

$$|u_1(t,x)-u_0(t,x)|\leqslant a\alpha(t)M+a(E+B_0^{-1}A_0)(A+B)_0^{-1}B_0TM, \quad (14)$$

$$|u'_{1t}(t,x)-u'_{0t}(t,x)|\leqslant aM,$$

$$|u''_{1tx}(t-\tau,x)-u''_{0tx}(t-\tau,x)|\leqslant M.$$

С помощью выражения для $u_2(t,x)$ находим $u_2(0,x)$ и $u_2(T,x)$. Подставим их в условие (3) и вычтем из правой и левой частей этого соотношения правую и левую части (12). Тогда имеем

$$(A+B)\delta_2(x)+B\int_0^x\int_0^T[f(\xi,\eta,u_1(\xi,\eta),\ldots,u''_{1\xi\eta}(\xi-\tau,\eta),$$

$$\int_0^\eta\int_0^\xi\varphi(\xi,s,\eta,p,u_1(s,p),\ldots,u''_{1sp}(s-\tau,p))\,dsdp)-$$

$$-f(\xi,\eta,u_0(\xi,\eta),\ldots,u''_{0\xi\eta}(\xi-\tau,\eta),\int_0^\eta\int_0^\xi\varphi(\xi,s,\eta,p,u_0(s,p),\ldots$$

$$\ldots,u''_{0sp}(s-\tau,p))\,dsdp)]\,d\xi d\eta=0. \quad (15)$$

Используя условия Липшица (6), (7) и неравенства (14), из соотношения (15) находим оценку для $\delta_2(x)$:

$$|\delta_2(x)|\leqslant(A+B)_0^{-1}B_0aTQM. \quad (16)$$

Разность $u_2(t,x)-u_1(t,x)$ можно записать в виде

$$u_2(t,x)-u_1(t,x)=\int_0^x\int_0^t(\{f_1-f_0\}-\{\overline{f}_1-\overline{f}_0\})\,d\xi d\eta+$$

$$+\frac{T-t}{T}\delta_2(x)-\frac{t}{T}B^{-1}A\delta_2(x). \quad (17)$$

Используя неравенства (6), (7), оценки (14), (16), из соотношения (17) находим

$$|u_2(t,x)-u_1(t,x)|\leqslant a\alpha(t)QM,$$

$$|u'_{2z}(t,x)-u'_{1z}(t,x)|\leqslant aQM,$$

$$|u''_{2tx}(t-\tau,x)-u'_{1tx}(t-\tau,x)|\leqslant QM.$$

Последовательно продолжая этот процесс, получаем

$$|\delta_n(x)|\leqslant(A+B)_0^{-1}B_0aTQ^{n-1}M, \quad (18)$$

$$|u_{n+1}(t,x)-u_n(t,x)|\leqslant a\alpha(t)Q^nM+(E+B_0^{-1}A_0)(A+B)_0^{-1}B_0aTQ^nM,$$

$$|u'_{(n+1)t}(t,x)-u'_{nt}(t,x)|\leqslant aQ^nM,$$

$$|u''_{(n+1)tx}(t-\tau,x)-u''_{ntx}(t-\tau,x)|\leqslant Q^nM. \quad (19)$$

Легко видеть из (18) и (19), что

$$|u_{n+k}(t,x)-u_n(t,x)|\leqslant a\alpha(t)Q^n\sum_{i=0}^{k-1}Q^iM+$$

$$+(E+B_0^{-1}A_0)(A+B)_0^{-1}B_0aTQ^n\sum_{i=0}^{k-1}Q^iM, \quad (20)$$

$$|u'_{(n+k)t}(t,x)-u'_{nt}(t,x)|\leqslant aQ^n\sum_{i=0}^{k-1}Q^iM,$$

$$|u''_{(n+k)tx}(t-\tau,x)-u''_{ntx}(t-\tau,x)|\leqslant Q^n\sum_{i=0}^{k-1}Q^iM,$$

а также

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta_i(x)| \leqslant (A+B)_0^{-1} B_0 a T \sum_{i=0}^{n-1} Q^i M. \tag{21}$$

Из неравенств (20) и условия IV вытекает равномерная сходимость последовательных приближений (8) к предельной вектор-функции $u_\infty(t, x)$ в области $(t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$, причем предельная вектор-функция $u_\infty(t, x)$ удовлетворяет двухточечному условию (3) и системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными

$$u_\infty(t, x) = u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t f[\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots, u''_{\xi\eta}(\xi - \tau, \eta),$$
$$\int_0^\eta \int_0^\xi \varphi(\xi, s, \eta, p, u(s, p), \ldots, u''_{sp}(s-\tau, p))\, ds dp]\, d\xi d\eta. \tag{22}$$

Из неравенств (21) и условия IV следует равномерная сходимость для $x \in [-a, a]$ последовательности $\left\{v_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x)\right\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \left[v_0(x) + \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x)\right] = v(x).$$

Из неравенств (20) для предельной вектор-функции получаем оценки

$$|u_\infty(t, x) - u_n(t, x)| \leqslant a\alpha(t) Q^n (E-Q)^{-1} M +$$
$$+ (E + B_0^{-1} A_0)(A+B)_0^{-1} B_0 a T Q^n (E-Q)^{-1} M,$$
$$|u'_{(\infty)t}(t, x) - u'_{nt}(t, x)| \leqslant a Q^n (E-Q)^{-1} M,$$
$$|u''_{(\infty)tx}(t-\tau, x) - u''_{ntx}(t-\tau, x)| \leqslant Q^n (E-Q)^{-1} M.$$

Для доказательства единственности полученного решения системы (1)—(4) предположим, что существуют два решения $u(t, x)$ и $z(t, x)$ системы (1)—(4), удовлетворяющие условиям (2)—(4). Эти решения будут удовлетворять системе интегро-дифференциальных уравнений (22), т. е.

$$u(t, x) \equiv u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots, u''_{\xi\eta}(\xi-\tau, \eta),$$
$$\int_0^\eta \int_0^\xi \varphi(\xi, s, \eta, p, u(s, p), \ldots, u''_{sp}(s-\tau, p))\, ds dp)\, d\xi d\eta, \tag{23}$$

$$z(t, x) \equiv u_0(t) + v(x) + \int_0^x \int_0^t f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \ldots, z''_{\xi\eta}(\xi-\tau, \eta),$$
$$\int_0^\eta \int_0^\xi \varphi(\xi, s, \eta, p, z(s, p), \ldots, z''_{sp}(s-\tau, p))\, ds dp)\, d\xi d\eta. \tag{24}$$

Аналогично (15) для $\delta_n(x)$ верно соотношение

$$(B^{-1}A + E) \sum_{k=1}^{n} \delta_k(x) + \int_0^x \int_0^T f_n\, d\xi d\eta = 0.$$

Поэтому система интегро-дифференциальных уравнений (22), которой удовлетворяет вектор-функция $u_\infty(t, x)$, может быть записана в виде

$$u_\infty(t, x) = u_0(t) + v_0(x) + (v(x) - v_0(x)) +$$
$$+ \int_0^x \int_0^t [f_\infty - \bar{f}_\infty]\, d\xi d\eta - \frac{t}{T}(v(x) - v_0(x)), \qquad (25)$$

причем $v_0(x)$ определена соотношением (11) и

$$v(x) - v_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(x).$$

Тогда соотношения (23) и (24) могут быть записаны в виде (25), и для разности $u(t, x) - z(t, x)$ получаем

$$u(t, x) - z(t, x) = \int_0^x \int_0^t [\{f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots) - f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \ldots)\} -$$
$$- \overline{\{f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots) - f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \ldots)\}}]\, d\xi d\eta.$$

Последовательно интегрируя, находим

$$|u(t, x) - z(t, x)|_0 \leqslant a\alpha(t) Q^n G,$$
$$|u_t'(t, x) - z_t'(t, x)|_0 \leqslant a Q^n G, \qquad (26)$$
$$|u_{tx}''(t - \tau, x) - z_{tx}''(t - \tau, x)|_0 \leqslant Q^n G,$$

где

$$|u(t, x) - z(t, x)|_0 = \sup_{(t,x)} |u(t, x) - z(t, x)|,$$

$$G = (K_1 + K_2)|u(t, x) - z(t, x)|_0 + (K_3 + K_4)|u_t'(t, x) - z_t'(t, x)|_0 +$$
$$+ (K_3 + K_4 + K_5|u_{tx}''(t - \tau, x) - z_{tx}''(t - \tau, x)|_0 + K_6 a T M.$$

Из неравенства (26) и условия IV при $n \to \infty$ следует единственность полученного решения, т. е. $u(t, x) \equiv z(t, x)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными* (1) *удовлетворяет условиям* I—IV. *Тогда существует единственное решение* $u(t, x)$ *системы* (1)—(4). *Это решение является равномерным пределом при* $(t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$ *последовательности вектор-функций* (8)—(9), *удовлетворяющим также и системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными* (22), *причем вектор-функция* $v(x)$ — *равномерный для* $x \in [-a, a]$ *предел последовательности вектор-функций* $\{v_0(x) + \sum_{i=0}^{n} \delta_i(x)\}$ *при* $n \to \infty$.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач.— Киев : Наук. думка, 1986.— 224 с.
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1980.— 243 с.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1984.— 264 с.
4. *Ткач Б. П.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Тр. сем. по мат. физике.— 1968.— 1, вып. 2.— С. 237—252.
5. *Хоанг Ван Тао.* Усреднение в интегро-дифференциальных уравнениях с частными производными // Изв, АН УзбССР. Сер. техн. наук,— 1970.— № 1.— С. 38—44.

Получено 18,04.90

$$u_\infty(t, x) = u_0(t) + v_0(x) + (v(x) - v_0(x)) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^t [f_\infty - \bar{f}_\infty]\, d\xi d\eta - \frac{t}{T}(v(x) - v_0(x)), \qquad (25)$$

причем $v_0(x)$ определена соотношением (11) и

$$v(x) - v_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i(x).$$

Тогда соотношения (23) и (24) могут быть записаны в виде (25), и для разности $u(t, x) - z(t, x)$ получаем

$$u(t, x) - z(t, x) = \int_0^x \int_0^t [\{f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots) - f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \ldots)\} -$$

$$- \overline{\{f(\xi, \eta, u(\xi, \eta), \ldots) - f(\xi, \eta, z(\xi, \eta), \ldots)\}}]\, d\xi d\eta.$$

Последовательно интегрируя, находим

$$|u(t, x) - z(t, x)|_0 \leqslant a\alpha(t) Q^n G,$$
$$|u_t'(t, x) - z_t'(t, x)|_0 \leqslant a Q^n G, \qquad (26)$$
$$|u_{tx}''(t - \tau, x) - z_{tx}''(t - \tau, x)|_0 \leqslant Q^n G,$$

где

$$|u(t, x) - z(t, x)|_0 = \sup_{(t,x)} |u(t, x) - z(t, x)|,$$

$$G = (K_1 + K_2)|u(t, x) - z(t, x)|_0 + (K_3 + K_4)|u_t'(t, x) - z_t'(t, x)|_0 +$$
$$+ (K_3 + K_4 + K_5 |u_{tx}''(t - \tau, x) - z_{tx}''(t - \tau, x)|_0 + K_6 a T M.$$

Из неравенства (26) и условия IV при $n \to \infty$ следует единственность полученного решения, т. е. $u(t, x) \equiv z(t, x)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. *Пусть правая часть системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными* (1) *удовлетворяет условиям* I—IV. *Тогда существует единственное решение* $u(t, x)$ *системы* (1)—(4). *Это решение является равномерным пределом при* $(t, x) \in [0, T] \times [-a, a]$ *последовательности вектор-функций* (8)—(9), *удовлетворяющим также и системе интегро-дифференциальных уравнений с частными производными* (22), *причем вектор-функция* $v(x)$ — *равномерный для* $x \in [-a, a]$ *предел последовательности вектор-функций* $\{v_0(x) + \sum_{i=0}^{n} \delta_i(x)\}$ *при* $n \to \infty$.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования краевых задач.— Киев : Наук. думка, 1986.— 224 с.
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1980.— 243 с.
3. *Пташник Б. И.* Некорректные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.— Киев : Наук. думка, 1984.— 264 с.
4. *Ткач Б. П.* О периодических решениях систем дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Тр. сем. по мат. физике.— 1968.— 1, вып. 2.— С. 237—252.
5. *Хоанг Ван Тао.* Усреднение в интегро-дифференциальных уравнениях с частными производными // Изв, АН УзбССР. Сер. техн. наук,— 1970.— № 1.— С. 38—44.

Получено 18,04.90