УДК 517.5

В. К. Дзядык, Л. А. Островецкий

Аппроксимационный метод решения краевых задач

В данной работе предложен алгоритм эффективного построения многочленов, осуществляющих близкие к наилучшим приближения решений краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с многочленными коэффициентами.

В рассматриваемом случае краевая задача будет, например, на $[0, 1]$ иметь вид

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = p(x), \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \alpha_1^{(0)} y(0) + \alpha_1^{(1)} y'(0) + \beta_1^{(0)} y(1) + \beta_1^{(1)} y'(1) = \gamma_1, \\ \alpha_2^{(0)} y(0) + \alpha_2^{(1)} y'(0) + \beta_2^{(0)} y(1) + \beta_2^{(1)} y'(1) = \gamma_2, \end{gathered} \tag{2}$$

причем в (1) коэффициенты $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ и $p(x)$ являются многочленами. Кроме того, предположим, что $\forall x \in [0, 1]$ $a_0(x) \geqslant c > 0$ и задача (1), (2) однозначно разрешима.

Интегрируя уравнение (1) дважды по промежутку $[0, x]$, получаем эквивалентное (1) интегральное уравнение

$$a_0(x)\,y(x) = \int_0^x P(x, t)\,y(t)\,dt + [(a_1(0) - a_0'(0))\,x + a_0(0)]\,y(0) + $$
$$+ a_0(0)\,xy'(0) + \int_0^x (x - t)\,p(t)\,dt, \tag{3}$$

где $P(x, t) = 2a_0'(t) - a_1(t) - (x - t)(a_0''(t) - a_1'(t) + a_2(t))$.

Многочлен $y_n(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j x^j$, приближающий неизвестное решение задачи (1), (2), определим как решение уравнения

$$a_0(x)\,y_n(x) = \int_0^x P(x, t)\,y_n(t)\,dt + [(a_1(0) - a_0'(0))\,x + a_0(0)]\,\tilde{y}_0 + $$
$$+ a_0(0)\,x\tilde{y}_1 + \int_0^x (x - t)\,p(t)\,dt - \varepsilon_n(x), \tag{4}$$

в котором $\varepsilon_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} \tau_i T_{n+i}(2x - 1)$, $T_{n+i}(\cdot)$ — многочлены Чебышева, $l = \max\limits_{i=0,1,2} \{\deg a_i(x) + i\}$; τ_i, $i = \overline{1, l}$, $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_1$ — подлежащие определению параметры. Будем считать, что в уравнении (4) $n = \deg y_n(x) \geqslant \deg p(x) - l + 2$.

Потребуем, чтобы многочлен $y_n(x)$ помимо уравнения (4) удовлетворял также условиям

$$\alpha_i^{(0)} \tilde{y}_0 + \alpha_i^{(1)} \tilde{y}_1 + \beta_i^{(0)} [y_n(1) + \varepsilon_n(1)/a_0(1)] + \beta_i^{(1)} [y_n'(1) + (\varepsilon_n(x)/a_0(x))'_{x=1} + $$
$$+ P(1, 1)\,\varepsilon_n(1)/a_0^2(1)] = \gamma_i, \quad i = 1, 2,$$

или, что то же самое, чтобы выполнялись равенства

$$\alpha_i^{(0)} \tilde{y}_0 + \alpha_i^{(1)} \tilde{y}_1 + \beta_i^{(0)} \left[\sum_{j=0}^{n} c_j + \frac{1}{a_0(1)} \sum_{i=1}^{l} \tau_i \right] + $$
$$+ \beta_i^{(1)} \left[\sum_{j=1}^{n} j c_j + \sum_{i=1}^{l} \tau_i \left(2 \cdot \frac{(n+i)^2}{a_0(1)} + \frac{a_0'(1) - a_1(1)}{a_0^2(1)} \right) \right] = \gamma_i, \quad i = 1, 2. \tag{5}$$

Приравнивая в уравнении (4) коэффициенты при одинаковых степенях x и присоединяя к полученным в результате этого соотношениям равенства (5), приходим к системе $n+l+3$ линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой будут коэффициенты $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ многочлена $y_n(x)$, коэффициенты $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$ невязки $\varepsilon_n(x)$ и параметры $\tilde{y}_0, \tilde{y}_1$.

Подобно работам [1, 2] можно доказать, что справедливы следующие факты.

1. При всех натуральных $n \geqslant \deg p(x) - l + 2$, за исключением, возможно, конечного (небольшого) их числа, существует и притом единственная система чисел $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, $\{\tau_i\}_{i=1}^{l}$, $\tilde{y}_0$, $\tilde{y}_1$, при которой соотношения (4) и (5) превращаются в тождества.

2. Выполняются неравенства

$$|y(x) - y_n(x)| \leqslant A_1 \sum_{i=1}^{l} |\tau_i|, \quad x \in [0,1], \quad \|y(x) - y_n(x)\|_X \leqslant A_2 E_n(y)_X,$$

где $X = C[0,1]$ или $X = L^2_{q(x)}[0,1]$ с весом $q(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$, A_1 и A_2 — эффективно вычисляемые константы, $E_n(y)_X = \inf\limits_{a_k} \left\| y(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k \right\|_X$.

3. Если в уравнении (4) вместо невязки $\varepsilon_n(x)$ взять невязку $\overset{0}{\varepsilon}_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} \tau_i \overset{0}{T}_{n+i}(x)$, где $\overset{0}{T}_k(x)$ — многочлен степени k (с коэффициентом при x^k, равным единице (см., например, [3])), удовлетворяющий условию

$$\left\| \frac{\overset{0}{T}_k(x)}{a_0(x)} \right\|_{C[0,1]} = \min_{a_k} \left\| \frac{x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k}{a_0(x)} \right\|_{C[0,1]},$$

то построенные при этом многочлены $\overset{0}{y}_n(x)$ будут иметь такие же свойства, как и многочлены $y_n(x)$. Более того, для многочленов $\overset{0}{y}_n(x)$ справедлива оценка

$$\|y(x) - \overset{0}{y}_n(x)\|_{L^2_{q(x)}[0,1]} \leqslant (1 + \alpha_n) E_n(y)_{L^2_{q(x)}[0,1]},$$

где

$$\|\varphi\|_{L^2_{q(x)}[0,1]} = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi^2(x)}{\sqrt{x(1-x)}} dx \right)^{1/2}, \quad \alpha_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Получено также обобщение изложенного алгоритма на случай решения краевых задач для уравнений произвольного порядка.

1. *Дзядык В. К.* Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1974.— 38, № 4.— С. 937—967.
2. *Дзядык В. К.*, *Островецкий Л. А.* Приближение многочленами решений краевых задач для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Киев, 1985.— 32 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики ; 85.11).
3. *Dzyadik V. K.* On a problem of Chebyshev and Markov // Anal. math. — 1977.— 3, N 3.— P. 171—175.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 28.07.86