УДК 517.928

ХОАНГ ЗЫОНГ ТУАН, асп. (Одес. ун-т)

Одна теорема о непрерывной зависимости по параметру множества решений дифференциальных включений в банаховом пространстве с замкнутой правой частью

Доказана теорема о непрерывной зависимости по параметру множества решений дифференциальных включений в банаховом пространстве с замкнутой правой частью. На основе полученного результата доказывается обобщение теоремы Н. Н. Боголюбова об усреднении на конечном промежутке для включений соответствующего класса.

Доведено теорему про неперервну залежність за параметром множини розв'язків диференціальних включень у банаховому просторі з замкненою правою частиною. На основі одержаного результату доводиться узагальнена теорема Н. Н. Боголюбова про усереднення на скінченному інтервалі для включення відповідного класу.

В последнее время теория дифференциальных включений в пространстве бесконечной размерности интенсивно развивается (см. [1—4] и библиографию в них). В [1] указано, что многие известные результаты в случае пространства конечной размерности могут распространяться на пространство бесконечной размерности, но при предположении компактности правой части, что ограничивает область приложений к задачам управления. Без предположения компактности правой части дифференциальные включения рассматривались в [2—4].

Рассмотрим вопрос о непрерывной зависимости по параметру множества решений дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), \lambda), \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

где $F : [0, T] \times X \times \Lambda \to 2^X/\varnothing$, X — сепарабельное банахово пространство, $\Lambda \subset R$.

В дальнейшем через $C(0, T; X)$ обозначается банахово пространство всех непрерывных из $[0, T]$ в X функций с нормой $\|x\|_C = \sup_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$, через $L^1(0, T; X)$ — банахово пространство всех интегрируемых по Бохнеру на $[0, T]$ функций с нормой $\|x\|_1 = \int_0^T \|x(t)\| \, dt$, $d(\cdot, \cdot)$ — псевдометрика Хаусдорфа в пространстве непустых подмножеств X, $\rho(x, A)$ — расстояние из элемента x до множества A, B — единичный замкнутый шар в X.

Непрерывная функция $x \in C(0, T; X)$ называется решением включения (1), если существует функция $f \in L^1(0, T; X)$ такая, что $f(t) \in F(t, x(t), \lambda)$ почти всюду (п. в.) на $[0, T]$ и для любого $t \in [0, T]$ справедливо $x(t) = x^0 + \int_0^t f(\tau) \, d\tau$.

Многозначное отображение $\Phi : X \to 2^X$ называется L-липшицевым на $D \subset X$, если для каждого $x \in D$, $\Phi(x) \neq \varnothing$ и $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant L \|x - y\|$, $x \in D$, $y \in D$.

Следующий результат является частным случаем теоремы 1.2 [4], полученной на основании теоремы о существовании измеримого селектора отображения с замкнутым образом [5] и техники Филиппова [6].

Л е м м а. *Пусть* $G : [0, T] \times X \to 2^X$ — *многозначное отображение, удовлетворяющее следующим условиям: для каждого* $(t, x) \in [0, T] \times X$ *множество* $G(t, x)$ *замкнуто; для каждого* $t \in [0, T]$ *отображение* $G(t, \cdot)$ *является* L-*липшицевым; для каждого* $x \in X$ *отображение* $G(\cdot, x)$ *измеримо.*

$$\text{Пусть } g \in L^1(0, T; X), \ \ y(t) = y^0 + \int_0^t g(\tau)\, d\tau, \ \ \gamma(t) = \rho(g(t), G(t, y(t))),$$

$$m(t) = \exp(Lt), \ \ \eta(t) = m(t) \int_0^t \gamma(\tau)\, d\tau.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *существует решение* $x(t)$ *дифференциального включения* $\dot{x}(t) \in G(t, x(t))$, $x(0) = y^0$, *такое, что* $\| x(t) - y(t) \| \leqslant \eta(t) + \varepsilon t m(t)$.

З а м е ч а н и е. По леммам 1.4 и 1.5. [4] функция $t \to \gamma(t)$ измерима, поэтому все функции в лемме имеют смысл.

Т е о р е м а. *Пусть отображение* F *удовлетворяет следующим условиям в своей области определения:*

1) *для каждого* $(t, x, \lambda) \in [0, T] \times X \times \Lambda$ *множество* $F(t, x, \lambda]$ *замкнуто и* $F(t, x, \lambda) \subset MB$, *где* M — *некоторая повтоянная;*

2) *для каждого* $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$ *отображение* $F(t, \cdot, \lambda)$ *является измеримым;*

3) *для каждого* $(t, \lambda) \in [0, T] \times \Lambda$ *отображение* $F(t, \cdot, \lambda)$ *является* L-*липшицевым;*

4) *существует* $D \subset X$, *в котором любое решение включения* (1) *при* $\lambda \in \Lambda$ *лежит со своей* β-*окрестностью в* D, *и, кроме того, равномерно относительно* $(t, x) \in [0, T] \times D$ *в предельной точке* $\lambda_0 \in \Lambda$ *выполняется соотношение*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} d\left(\int_0^t F(\tau, x, \lambda)\, d\tau, \quad \int_0^t F(\tau, x, \lambda_0)\, d\tau\right) = 0.$$

Тогда для любого $\eta > 0$ *существует окрестность* $U(\lambda_0)$ *точки* λ_0 *такая, что при* $\lambda \in U(\lambda_0)$ *на* $[0, T]$ *для каждого решения* $x \in C(0, T; X)$ *включения* (1) *существует решение* $x_0 \in C(0, T; X)$ *включения*

$$\dot{x}_0(t) \in F(t, x_0(t), \lambda_0), \ x_0(0) = x^0, \tag{2}$$

такое, что

$$\| x(t) - x_0(t) \| \leqslant \eta, \tag{3}$$

и для каждого решения $x_0 \in C(0, T; X)$ *включения* (2) *существует решение* $x \in C(0, T; X)$ *включения* (1), *удовлетворяющее оценке* (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условиях 1—3 теоремы включения (1) и (2) всегда имеют решения на $[0, T]$ [2, 4]. Пусть задано $\eta > 0$ и $x \in C(0, T; X)$ — некоторое решение включения (1). Разделим $[0, T]$ на m равномерных подсегментов точками t_i, $i = \overline{0, m}$.

Пусть $x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)\, d\tau$; положив $\bar{x}(t) = x(t_i)$ при $t \in (t_i, t_{i+1}]$, рассмотрим два включения

$$\dot{x}_1(t) \in F(t, \bar{x}(t), \lambda), \ x_1(0) = x^0, \tag{4}$$

$$\dot{x}_2(t) \in F(t, \bar{x}(t), \lambda_0), \ x_2(0) = x^0. \tag{5}$$

Если $\gamma_1(t) = \rho(v(t), F(t, \bar{x}(t), \lambda)) \leqslant d(F(t, x(t), \lambda), F(t, \bar{x}(t), \lambda)) \leqslant LM(t_{i+1} - t_i)^2/2$, то по лемме для любого $\varepsilon > 0$ существует решение $x_1 \in C(0, T; X)$ включения (4) такое, что

$$\| x_1(t) - x(t) \| \leqslant \exp(LT)\, LMT^2/2m^2 + \varepsilon T \exp(LT). \tag{6}$$

Из условия 4 получим, что для любых $\eta_1 > 0$, m существует окрестность $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такая, что если

$$x_1(t) = x_1(t_i) + \int_{t_i}^{t} v_1(\tau)\,d\tau,\ t \in (t_i, t_{i+1}],$$

то существует $\bar{v}_1(\tau) \in F(\tau, \bar{x}(\tau), \lambda_0)$ такое, что

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (v_1(\tau) - \bar{v}_1(\tau))\,d\tau \right\| \leqslant \eta_1.$$

Очевидно, $x_2(t) = x_2(t_i) + \int_{t_i}^{t} \bar{v}_1(\tau)\,d\tau,\ t \in (t_i, t_{i+1}]$ — решение включения (5) и, кроме того,

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant m\eta_1 + 2MT/m. \tag{7}$$

Полагая $\gamma_2(t) = \rho(\bar{v}_1(t),\ F(t, x_2(t), \lambda_0))$, с учетом (6), (7) получаем при $t \in (t_i, t_{i+1}]$

$$\gamma_2(t) \leqslant L \| x_2(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant L(\| x_2(t) - x_1(t) \| + \| x_1(t) - x(t) \| + \| x(t) - \\ - \bar{x}(t) \|) \leqslant L(m\eta_1 + 2MT/m + \exp(LT) LMT^2/2m^2 + \varepsilon T \exp(LT) + \\ + M(t - t_i)^2/2).$$

По лемме существует решение $x_0 \in C(0, T; X)$ включения (2) такое, что

$$\| x_0(t) - x_2(t) \| \leqslant \exp(LT) LT (m\eta_1 + 2MT/m + \exp(LT) \times \\ \times LMT^2/2m^2 + \varepsilon T \exp(LT) + MT^2/2m^2) + \varepsilon T \exp(LT). \tag{8}$$

Из (6) — (8) находим

$$\| x(t) - x_0(t) \| \leqslant \| x(t) - x_1(t) \| + \| x_1(t) - x_2(t) \| + \| x_2(t) - x_0(t) \| \leqslant \\ \leqslant \exp(LT) LMT^2/2m^2 + \varepsilon T \exp(LT) + m\eta_1 + 2MT/m + \exp(LT) \times \\ \times LT(m\eta_1 + 2MT/m + \exp(LT) LMT^2/2m^2 + \varepsilon T \exp(LT) + MT^2/2m^2) + \\ + \varepsilon T \exp(LT). \tag{9}$$

Выбрав

$$\varepsilon \leqslant \eta (2T \exp(LT) + LT^2 \exp(2LT))^{-1}/3,$$
$$m \geqslant 3(\exp(LT) LMT^2/2 + 2MT + 2LMT^2 \exp(LT) + \\ + L^2MT^3 \exp(2LT)/2 + LMT^3 \exp(LT))/\eta,$$
$$\eta_1 \leqslant \eta (m + mT \exp(LT))^{-1}/3, \quad \lambda \in U(\lambda_0)$$

из (9) имеем $\| x(t) - x_0(t) \| \leqslant \eta$, т. е. первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Аналогичными [7] рассуждениями получим следующий результат об усреднении дифференциальных включений на конечном промежутке.

Следствие. *Пусть многозначное отображение $G : R_+ \times X \to 2^X/\varnothing$ удовлетворяет условиям: для любого $(t, x) \in R_+ \times X$ множество $G(t, x)$ замкнуто и $G(t, x) \subset MB$; для любого $x \in X$ отображение $G(\cdot, x)$ является измеримым на R_+; для любого $t \in R_+$ отображение $G(t, \cdot)$ является L-липшицевым. Пусть существует $D \subset X$, в котором любое решение включения*

$$\dot{x}(t) \in \mu G(t, x(t)),\ x(0) = x^0 \tag{10}$$

при $\mu \in [0, \mu_0]$ лежит со своей β-окрестностью в D, и отображение $\bar{G} : D \to 2^X/\varnothing$ такое, что для любого $x \in D$ множество $\bar{G}(x)$ замкнуто, равномерно относительно $x \in D$ выполняется соотношение

$$\lim_{T \to +\infty} d\left(\frac{1}{T}\int_0^T G(t, x)\,dt, \quad \bar{G}(x)\right) = 0,$$

любое решение включения

$$\dot{\bar{x}}(t) \in \mu \bar{G}(\bar{x}(t)), \quad \bar{x}(0) = x^0 \tag{11}$$

лежит со своей β*-окрестностью в* D.

Тогда для любых $\eta > 0$, $L > 0$ *существует* $\bar{\mu}_0 > 0$ *такое, что при* $0 < \mu \leqslant \bar{\mu}_0$ *на* $[0, L\mu^{-1}]$ *для любого решения* $x \in C(0, L\mu^{-1}; X)$ *включения* (10) *существует решение* $\bar{x} \in C(0, L\mu^{-1}; X)$ *включения* (11) *такое, что*

$$\| x(t) - \bar{x}(t) \| \leqslant \eta, \tag{12}$$

и для любого решения $\bar{x} \in C(0, L\mu^{-1}; X)$ *включения* (11) *существует решение* $x \in C(0, L\mu^{-1}; X)$ *включения* (10), *удовлетворяющее оценке* (12).

Замечание. Приведенное следствие является обобщением результата [8].

1. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве.— Новосибирск : Наука, 1987.— 357 с.
2. *Deimling K.* Multivalued differential equations on closed sets // Different. and Integral equat.— 1988.— **1**, N 1.— P. 23—30.
3. *Parageorgiou N. S.* On the attainable set of differential inclousions and control systems // J. Math. Anal. and Appl.— 1987.— **125**, N 2.— P. 305—322.
4. *Frankowska H.* Estimations a priori pour les inclousions différentiles opérationnelles // Note C. R. Acad. Sci. Ser. 1.— 1989.— **308**, N 2.— P. 47—50.
5. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions.— New York, Berlin : Springer-Verlag, 1977.— 278 p.
6. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.— 1967.— № 3.— С. 16—26.
7. *Васильев А. Б.* О непрерывной зависимости по параметру решений дифференциальных включений // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 5.— С. 607—611.
8. *Плотников В. А.* Метод усреднения для дифференциальных включений и его приложение к задачам оптимального управления // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, № 8. С. 1427—1433.

Получено 02.07.90