УДК 517.5

А. И. СТЕПАНЕЦ, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев),
Н. Л. ПАЧУЛИА, канд. физ.-мат. наук (Абхаз. ун-т)

Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций

Изучаются уклонения прямоугольных частных сумм Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых периодических функций многих переменных.

Вивчаються відхилення прямокутних сум Фур'є на множинах (ψ, β)-диференційовних періодичних функцій багатьох змінних.

1. Введение. Пусть C — пространство 2π-периодических непрерывных функций $f(\cdot)$, $S_n(f; x)$ — частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(\cdot)$, $\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x)$ и $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения функции $f(\cdot)$ посредством тригонометрических полиномов $t_{n-1}(\cdot)$ порядка $n-1$ в равномерной метрике: $E_n(f) = \inf\limits_{t_{n-1}} \| f(\cdot) - t_{n-1}(\cdot) \|_C$.

В этих обозначениях неравенство Лебега [1] имеет вид

$$\| \rho_n(f; x) \|_C \leqslant \left(\frac{4}{\pi^2} \ln n + R_n \right) E_n(f), \; |R_n| \leqslant 4. \tag{1}$$

На всем классе C это неравенство точно по порядку (и в нем константу $4/\pi^2$) уменьшить нельзя. В то же время, как показано в [2], существуют подмножества функций из C, для которых соотношение (1) оказывается неточным даже по порядку. В [2] доказан ряд утверждений, уточняющих неравенство (1) на классах функций $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. В настоящей работе получены многомерные аналоги основных утверждений из [2].

2. Основные результаты. Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений и определений.

Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ — 2π-периодическая по каждой из m переменных суммируемая на кубе периодов T^m функция ($f \in L(T^m)$). Ее ряд Фурье $S[f]$ можно записать в виде

$$S[f] = \sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_m=0}^{\infty} 2^{-q(k_1,\ldots,k_m)} \mathcal{A}_{k_1,\ldots,k_m}(f; x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \mathcal{A}_k(f; x), \tag{2}$$

где $q(k) = q(k_1, \dots, k_m)$ — количество нулевых координат точки k,

$$\mathcal{A}_k(f;\ x) = \sum_{\gamma \in P} a_k(f;\ \gamma) \prod_{i=1}^{m} \cos(k_i x_i - \gamma_i \pi/2), \tag{3}$$

P — множество всех точек $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in R^m$, координаты которых имеют значения, равные нулю либо единице, и

$$a_k(f;\ \gamma) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos(k_i t_i - \gamma_i \pi/2)\, dt \tag{4}$$

— коэффициент Фурье функции $f(\cdot)$, соответствующий вектору $k = (k_1, \dots$ $\dots, k_m)$ и набору γ.

Формулы (3) и (4) можно объединить, и тогда получим

$$\mathcal{A}_k(f;\ x) = \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i(t_i - x_i)\, dt. \tag{3$'$}$$

Значит,

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i(t_i - x_i)\, dt. \tag{2$'$}$$

Выражения (2) и (2$'$) будем называть полными рядами Фурье функции $f(\cdot)$, или же просто рядами Фурье в отличие от частных рядов Фурье функции $f \in L(T^m)$ по фиксированному набору переменных x_i, которые определяются следующим образом. Пусть $\overline{m} = \{1, \dots, m\}$ и μ — какое-либо подмножество из $\overline{m}$, $|\mu|$ — количество элементов множества μ. Тогда $\forall f \in L(T^m)$ положим

$$S[f]_\mu = \sum_{k^\mu = 0}^{\infty} 2^{-q(k)} \pi^{-|\mu|} \int_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} \cos k_i(t_i - x_i)\, dt^\mu, \tag{5}$$

где $k^\mu = (k_{j_1}, \dots, k_{j_{|\mu|}})$, $j_1, \dots, j_{|\mu|} \in \mu$, $t^\mu = (t_1, \dots, t_m)$, причем $t_i = 0$, если $i \in c\mu$, $c\mu = \overline{m} \setminus \mu$, $x^{c\mu} = (x_1, \dots, x_m)$, и $x_i = 0$, если $i \in \mu$, т. е. $t^\mu + x^{c\mu}$ — точка из R^m, у которой координаты, имеющие номера из множества μ, обозначаются t_i, а остальные — через x_i; $dt^\mu = dt_{j_1} dt_{j_2} \dots dt_{j_{|\mu|}}$. Выражение (5) будем называть частным рядом Фурье функции $f \in L(T^m)$ по группе переменных x_i, $i \in \mu$. Ясно, что когда $\mu = \overline{m}$, то $S[f]_\mu = S[f]$.

Пусть, далее, $\psi_i(k_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$ — произвольные функции натурального аргумента и β — фиксированный вектор из R^m; $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Предположим, что для данной функции $f \in L(T^m)$ и набора $\mu \in \overline{m}$ ряд

$$\sum_{k^\mu = 1}^{\infty} \pi^{-|\mu|} \int_{T^{|\mu|}} f(t^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} \frac{1}{\psi_i(k_i)} \cos k_i(t_i - x_i - \beta_i \pi/2k_i)\, dt^\mu. \tag{6}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\varphi \in L(T^m)$ по переменным x_i, $i \in \mu$. Эту функцию будем обозначать через $f^{\psi}_{\beta,\mu}(\cdot)$ и называть $(\psi, \beta)_\mu$—производной функции $f(\cdot)$.

Множество функций $f \in L(T^m)$ таких, что $\forall \mu \in \overline{m}$ существуют производные $f^{\psi}_{\beta,\mu}$, будем обозначать $L^{\psi}_{\beta,m}$ или же L^{ψ}_{β}. Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ и $\forall \mu \in \overline{m}$ $f^{\psi}_{\beta,\mu} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L(T^m)$, то множество таких функций $f(\cdot)$ обозначим через $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Подмножества непрерывных функций из L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ обозначаются соответственно C^{ψ}_{β} и $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$.

При $m = 1$ понятия (ψ, β) — производных, а также множеств L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, введены ранее (см., например [3]).

Суммой Фурье порядка $n-1=(n_1-1, \dots, n_m-1)$ функции $f \in L(T^m)$ называют прямоугольную частную сумму ряда $S[f]$ — тригонометрический полином

$$S_n(f;\ x)=\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-q(k)} A_k(f;\ x)=\sum_{k=0}^{n-1} 2^{-q(k)}\pi^{-m} \int\limits_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i(t_i-x_i)\, dt. \quad (7)$$

Мы изучаем величину

$$\rho_n(f;\ x)=f(x)-S_n(f;\ x),$$

когда $f \in C_\beta^\psi M$, где M — множество существенно ограниченных функций из $L(T^m)$. При этом предполагаем, что функции $\psi_i(k_i)$, входящие в определение классов $C_\beta^\psi M$ являются сужениями на множестве N натуральных чисел функций $\psi_i(t_i)$, которые выпуклы вниз, непрерывны при всех $t_i \geqslant 1$, $i \in \overline{m}$, и $\lim\limits_{t_i \to \infty} \psi_i(t_i)=0$. Множество таких функций $\psi_i(\cdot)$ обозначается через $\mathfrak{M}$. Множество функций $\psi_i \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\int\limits_1^\infty t_i^{-1}\psi_i(t_i)\, \mathrm{d}t_i<\infty, \quad (8)$$

обозначаем через F.

Пусть $\tau_{\mu,n}$ — множество функций $t_{\mu,n} \in L(T^m)$, которые являются тригонометрическими полиномами порядка n_i-1, по переменным t_i, $i \in \mu$, т. е. $t_{\mu,n}$ имеют вид

$$t_{\mu,n}(x)=\sum_{k^\mu=0}^{(n-1)^\mu} \sum_{\gamma^\mu \in R^{|\mu|}} a_{k^\mu}(x^{c\mu};\ \gamma^\mu) \prod_{i \in \mu} \cos(k_i x_i-\gamma_i \pi/2), \quad (9)$$

где $\gamma^\mu=(\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_{|\mu|}})$, причем γ_{j_k} принимают значения, равные нулю либо единице, $a_{k^\mu}(x^{c\mu};\ \gamma^\mu)$ — функция переменных x_i, $i \in c\mu=\overline{m} \setminus \mu$, суммируемая на кубе периодов $T^{|c\mu|}$;

$$E_{\mu,n}(\varphi)=\inf_{t_{\mu,n} \in \tau_{\mu,n}} \| \varphi(x)-t_{\mu,n}(x) \|_C$$

— наилучшее приближение функции $\varphi \in M$ посредством функций $t_{\mu,n} \in \tau_{\mu,n}$.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\psi_i \in F$, $i=1, 2, \dots, m$ и $a_i=a_i(n_i)$ — произвольные последовательности, для которых $a_i(n_i) \geqslant a_0>0$. Тогда $\forall f \in C_\beta^\psi M$, $\forall \beta \in R^m$ справедливо неравенство*

$$\|\rho_n(f;\ x)\|_C \leqslant \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{|\mu|} E_{\mu,n}(f_{\beta,\mu}^\psi) \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i) \ln^+ \frac{n_i}{a_i(n_i)}+b_n^\psi(f;\ a), \quad (10)$$

где $\ln^+ t=\max(\ln t;\ 0)$,

$$b_n^\psi(f;\ a)=\sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f_{\beta,\mu}^\psi) \sum_{\substack{\tilde{\mu} \in \mu \\ \tilde{\mu} \neq \mu}} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{|\mu|} \prod_{i \in \tilde{\mu}} \psi_i(n_i) \ln^+ \frac{n_i}{a_i(n_i)} \prod_{i \in \mu \setminus \tilde{\mu}} r_i+$$

$$+\sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f_{\beta,\mu}^\psi) \sum_{\tilde{\mu} \subset \mu'} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{|\tilde{\mu}|} \prod_{i \in \tilde{\mu}} \psi_i(n_i) \ln^+ \frac{n_i}{a_i(n_i)} \prod_{i \in \mu' \setminus \tilde{\mu}} r_i \prod_{i \in \mu''} \psi_i(n_i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f_{\beta,\mu}^\psi) \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i), \quad (11)$$

μ' *и* μ'' — *непустые непересекающиеся подмножества из* μ, *причем* $\mu' \cup \cup \mu'' = \mu$, $r_i = k_i(\psi_i(n_i) + R_{n_i}(a_i;\ \psi_i))$,

$$R_{n_i}(a_i;\ \psi_i) = \int\limits_{1/a_i(n_i)}^{\infty} \frac{\psi_i(n_i t_i + n_i)}{t_i} + \int\limits_{a_i(n_i)}^{\infty} t^{-n_i}(\psi_i(n_i) - \psi_i(n_i + n_i/t_i)\,dt_i. \quad (12)$$

Каждой функции $\psi \in \mathfrak{M}$ поставим в соответствие две функции

$$\eta(t) = \eta(\psi;\ t) = \psi^{-1}[\psi(t)/2],\ \ \mu(t) = \mu(\psi;\ t) = t/(\eta(t) - t)$$

и положим (см., например, [3, с. 94])

$$\mathfrak{M}_C = \{\psi \in \mathfrak{M}\colon K_1 \leqslant \mu(\psi;\ t) \leqslant K_2,\ K_1,\ K_2 > 0\},$$
$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : 0 < \mu(\psi;\ t) \leqslant K,\ \ K > 0\},$$
$$\mathfrak{M}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{M} : \mu(\psi;\ t) \uparrow \infty\}.$$

В [3] показано, что если в качестве $a(n)$ взять последовательность $\mu(n) = \mu(\psi;\ n)$, то $\forall \psi \in \mathfrak{M}_{C,\infty} = \mathfrak{M}_C \cup \mathfrak{M}_\infty$, будут выполняться неравенства

$$R_n(\mu;\ \psi) < K\psi(n),$$

где K — величина, равномерно ограниченная на n. При этом $\psi \in F$ и $\mu(n) \geqslant a_0 > 0$. Поэтому из теоремы 1 при $a_i(n_i) = \mu_i(\psi_i;\ n_i)$ получается такое утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{M}_{C,\infty}$, $i \in \overline{m}$. *Тогда*

$$\forall f \in C^{\psi}_{\beta}M,\ \ \forall \beta \in R^m$$

$$\| \rho_n(f;\ x) \|_C \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{\beta,\mu}) \prod_{i\in\mu} \psi_i(n_i) \sum_{\tilde{\mu}\in\mu} \ln^{+}(\eta_i(n_i) - n_i) + b^{\psi}_n(f), \quad (13)$$

где

$$| b^{\psi}_n(f) | \leqslant K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{\beta,\mu}) \prod_{i\in\mu} \psi_i(n_i) \sum_{\substack{\tilde{\mu}\in\mu \\ \tilde{\mu}\neq\mu}} \prod_{j\in\tilde{\mu}} \ln^{+}(\eta_i(n_i) - n_i), \quad (14)$$

K — *величина, равномерно ограниченная по* $f \in C^{\psi}_{\beta}M$ *и по* n,

$$\eta_i(n_i) = \eta_i(\psi_i;\ n_i) = \psi^{-1}(\psi(n_i)/2).$$

Для всего множества $\mathfrak{M}_0$, которое включает в себя $\mathfrak{M}_C$, выполняется следующий аналог теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i \in \overline{m}$. *Тогда* $\forall f \in C^{\psi}_0 M$

$$\| \rho_n(f;\ x) \|_C \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^k \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{0,\mu}) \prod_{i\in\mu} \psi_i(n_i) \ln n_i + b^{\psi}_n(f), \quad (15)$$

где

$$| b^{\psi}_n(f) | \leqslant K \sum_{k=1}^{m} \sum_{|\mu|=k} E_{\mu,n}(f^{\psi}_{0,\mu}) \prod_{i\in\mu} \psi_i(n_i) \sum_{\substack{\tilde{\mu}\subset\mu \\ \tilde{\mu}\neq\mu}} \prod_{i\in\tilde{\mu}} \ln n_i, \quad (16)$$

K — *величина, равномерно ограниченная по* $f \in C^{\psi}_0 M$ *и по* n.

Утверждения теорем 1, 2 и 3 при $m = 1$ переходят в соответствующие утверждения из [2], где, в частности, показано, что в одномерном случае неравенства (10), (13) и (15) асимптотически точны на всем пространстве $C^{\psi}_{\beta}C$, а также на ряде важных подмножеств из $C^{\psi}_{\beta}C$. Здесь

C — совокупность непрерывных функций на T_0^1. Поэтому соотношения (10) (13) и (15) в известном смысле неулучшаемы.

3. Вспомогательные утверждения. Получим интегральные представления величин $\rho_n(f; x)$, удобные для дальнейших исследований.

В одномерном случае справедливо такое утверждение ([3, с. 62]).

Лемма 1. *Если $f \in C_\beta^\psi M$ и $\psi \in F$, то $\forall x \in R$*

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n) J_2(\psi; t)\, dt + \frac{1}{2} \mathcal{A}_n(f; x), \tag{17}$$

где

$$\mathcal{A}_n(f; x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{\psi(n)}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(t) \cos(t - x - \beta\pi/2)\, dt = $$
$$= \psi(n)\, a_n(f_\beta^\psi; x) \tag{18}$$

и

$$J_2(\psi; t) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \psi(nv) \cos(vt + \beta\pi/2)\, dv. \tag{19}$$

Если $f \in L_\beta^\psi$ и $\psi \in F$, то равенство (17) *верно почти всюду.*

Полагая

$$S_n^*(f; x) = S_{n-1}(f; x) + \frac{1}{2} \mathcal{A}_n(f; x), \tag{20}$$

из (17) получаем

$$S_n^*(f; x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_\beta^\psi(x + t/n) J_2(\psi; t). \tag{21}$$

Ближайшей целью является получение аналога последнего равенства при $m > 1$. Кратным аналогом суммы (20) будет тригонометрический полином

$$S_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-\bar{q}(k)} \mathcal{A}_k(f; x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-\bar{q}(k)} \pi^{-m} \int_{T^m} f(t) \prod_{i=1}^{m} \cos k_i (t_i - x_i),$$

где $\bar{q}(k) = q(k) + q_1(k)$, $q_1(k)$ — количество координат точки $k = (k_1, \ldots, k_m)$, совпадающих с соответствующими координатами точки $n = (n_1, \ldots, n_m)$. Если при любом $\nu \in \overline{m}$ положить

$$S_{n_\nu}^*(f; x) = \sum_{k_\nu=0}^{n} 2^{-\bar{q}(k_\nu)} \pi^{-1} \int_{T^1} f(x_1, \ldots, t_\nu, \ldots, x_m) \cos k_\nu (t_\nu - x_\nu)\, dt_\nu, \tag{22}$$

то, очевидно, будет справедливо равенство

$$S_n^*(f; x) = S_{n_m}^*(\ldots(S_{n_2}^*(S_{n_1}^*(f; x))\ldots) \tag{23}$$

и в силу соотношений (17) и (18)

$$S_{n_\nu}^*(f; x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta,\{\nu\}}^\psi(x_1, \ldots, x_\nu + t_\nu/n_\nu, \ldots, x_m) J_2(\psi_\nu, t_\nu)\, dt_\nu. \tag{24}$$

В частности, при $\nu = 1$

$$S_{n_1}^*(f; x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f_{\beta,\{1\}}^\psi(x_1 + t_1/n_1, x_2, \ldots, x_m) J_2(\psi_1, t_1)\, dt_1. \tag{25}$$

Далее, если $m \geqslant 2$, то

$$S_{n_1}^*(S_{n_1}^*(f; x)) = S_{n_1}^*(f; x) - \int_{-\infty}^{\infty} [S_{n_1}^*(f; x_1)]_{\beta,\{2\}}^\psi(x_1, x_2 + t_2/n_2, x_3, \ldots$$
$$\ldots, x_m) J_2(\psi_2; t_2)\, dt_2. \tag{26}$$

Но ввиду (24) и (25)

$$[S^*_{n_1}(f;\ x)]^{\psi}_{\beta,\{2\}}(x_1, x_2 + t_2/n_2, x_3, \ldots, x_m) = f^{\psi}_{\beta,\{2\}}(x_1, x_2 + t_2/n_2, x_3, \ldots, x_m) -$$

$$-\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1\}}(x_1 + t_1/n_1, x_2, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_1;\ t_1)\, dt_1\Big)^{\psi}_{\beta,\{2\}}(x_1, x_2 + t_2/n_2, x_3, \ldots, x_m). \tag{27}$$

В силу определения производной $f^{\psi}_{\beta,\{1,2\}}$ последнее слагаемое в (27) равно

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1,2\}}(x_1 + t_1/n_1, x_2 + t_2/n_2, x_3, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_1;\ t_1)\, dt_1. \tag{28}$$

Потому, объединяя соотношения (25) — (28), получаем

$$S^*_{n_2}(S^*_{n_1}(f;\ x)) = f(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1\}}(x_1 + t_1/n_1,\ x_2, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_1;\ t_1)\, dt_1 -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{2\}}(x_1,\ x_2 + t_2/n_2,\ x_3, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_2;\ t_2)\, dt_2 +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1,2\}}(x_1 + t_1/n_1,\ x_2 + t_2/n_2,\ x_3, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_1;\ t_1)\, \times$$

$$\times J_2(\psi_2;\ t_2)\, dt_1 dt_2. \tag{29}$$

Если $m \geqslant 3$, то аналогично имеем

$$S^*_{n_3}(S^*_{n_2}(S^*_{n_1}(f;\ x))) = f(x) - \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{j\}}((x_j + t_j/n_j) + x^{\{j\}})\, J_2(\psi_j;\ t_j)\, dt_j +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1,3\}}(x_1 + t_1/n_1),\ x_2,\ x_3 + t_3/n_3,\ x_4, \ldots, x_m)\, J_2(\psi_1;\ t_1)\, \times$$

$$\times J_2(\psi_3;\ t_3)\, dt_1 dt_3 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{2,3\}}(x_1,\ x_2 + t_2/n_2,\ x_3 + t_3/n_3,\ x_4, \ldots, x_m)\, \times$$

$$\times J_2(\psi_2;\ t_2)\, J_2(\psi_3;\ t_3)\, dt_2 dt_3 + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1,2\}}(x_1 + t_1/n_1,\ x_2 + t_2/n_2,\ x_3, \ldots, x_m)\, \times$$

$$\times J_2(\psi_1;\ t_1)\, J_2(\psi_2;\ t_2)\, dt_1 dt_2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{1,2,3\}}(x_1 + t_1/n_1,\ x_2 + t_2/n_2,\ x_3 +$$

$$+ t_3/n_3,\ x_4, \ldots, x_m) \prod_{i=1}^{3} J_2(\psi_i;\ t_i)\, dt_1 dt_2 dt_3.$$

Если $m > 3$, то, продолжая этот процесс и полагая при любом $\mu \in \overline{m}$

$$F_\mu(x) = F_\mu(f_{\beta,\mu};\ x) = \int\limits_{R^{|\mu|}} f^{\psi}_{\beta,\mu}((x + t/n)^{\mu} + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} J_2(\psi_i,\ t_i)\, dt^{\mu}, \tag{30}$$

в результате получаем

$$S^*_n(f;\ x) = f(x) - \sum_{|\mu|=1} F_\mu(x) + \sum_{|\mu|=2} F_\mu(x) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \sum_{|\mu|=k} F_\mu(x) + \ldots + (-1)^{|\overline{m}|} F_m(x).$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $f \in C^{\psi}_{\beta} M$ *и* $\psi_i \in F$, $i = \overline{1, m}$. *Тогда* $\forall \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in R^m$ *и* $\forall x \in R^m$, $m \geqslant 1$, *выполняется равенство*

$$S^*_n(f; x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{|\mu|=k} F_\mu(x), \; n = (n_1, \ldots, n_m). \tag{31}$$

Если же $f \in L^{\psi}_{\beta}$ *и* $\psi_i \in F$, $i = \overline{1, m}$, *то равенство* (31) *верно почти всюду.*

Получим теперь аналог формулы (31) для сумм $S_n(f; x)$.

Пусть при любом $\nu \in [1, m]$

$$S_n(f; x) = \sum_{k_\nu=0}^{n_\nu-1} 2^{-q(k_\nu)} \pi^{-1} \int_{T^1} f(x_1, \ldots, t_\nu, \ldots, x_m) \cos k_\nu (t_\nu - x_\nu)\, dt_\nu \tag{32}$$

— сумма Фурье функции $f \in L(T^m)$ порядка $n_\nu - 1$ по переменной x_ν, или же частная сумма порядка $n_\nu - 1$ ряда $S[f]_{\{\nu\}}$. Тогда нетрудно видеть, что $\forall f \in L(T^m)$ при любых $n = (n_1, \ldots, n_m)$ и $x \in R^m$

$$S_n(f; x) = S_{n_m}(S_{n_{m-1}}(\ldots S_{n_2}(S_{n_1}(f; x)) \ldots),$$

т. е. значение $S_n(f; x)$ также получается последовательным действием оператора (32) по каждой из переменных.

В силу соотношений (17) и (18)

$$S_{n_\nu}(f; x) = f(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta,\{\nu\}}(x_1, \ldots, x_\nu + t_\nu/n_\nu, \ldots, x_m) J_2(\psi_\nu; t_\nu)\, dt_\nu -$$

$$- \frac{\psi_\nu(n_\nu)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta,\{\nu\}}(x_1, \ldots, t_\nu, \ldots, x_m) \cos n_\nu (t_\nu - x - \beta_\nu \pi/2n_\nu)\, dt_\nu. \tag{33}$$

Далее, поступая так же, как при доказательстве равенства (31) и полагая для любого $\mu \in \overline{m}$

$$P_\mu(x) = P_\mu(f^{\psi}_{\beta,\mu}; x) = \frac{\prod_{i\in\mu} \psi_i(n_i)}{(2\pi)^{|\mu|}} \int_{T^{|\mu|}} f^{\psi}_{\beta,\mu}((x+t)^\mu + x^{c\mu}) \times$$

$$\times \prod_{i\in\mu} \cos(n_i t_i + \beta_i \pi/2)\, dt^\mu, \tag{34}$$

$$Q_\mu(x) = Q_\mu(f^{\psi}_{\beta,\mu}; x) = \frac{\prod_{i\in\mu''} \psi_i(n_i)}{(2\pi)^{|\mu''|}} \int_{R^{|\mu'|}} \int_{T^{|\mu''|}} f^{\varphi}_{\beta,\mu}((x + t/n)^{\mu'} +$$

$$+ x^{c\mu}) \prod_{i\in\mu'} J_2(\psi_i; t_i) \prod_{i\in\mu''} \cos(n_i t_i + \beta_i \pi/2)\, dt^\mu, \tag{35}$$

где μ и μ'' — непустые непересекающиеся подмножества множества μ, причем $\mu' \cup \mu'' = \mu$, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *Если* $f \in C^{\psi}_{\beta} M$ *и* $\psi_i \in F$, $i = \overline{1, m}$, *то* $\forall \beta \in R^m$ *и* $\forall x \in R^m$ *выполняется равенство*

$$S_n(f, x) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{|\mu|=k} F_\mu(x) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \sum_{|\mu|=k} P_\mu(x) +$$

$$+ \sum_{k=2}^{m} (-1)^k \sum_{|\mu|=k} Q_\mu(x). \tag{36}$$

Если же $f \in L^{\psi}_{\beta}$ *и* $\psi_i \in F$, $i = \overline{1, m}$, *то равенство* (36) *выполняется почти всюду.*

Поскольку всякий тригонометрический полином $t_{n-1}(x)$ является (ψ, β) — производной некоторого полинома $T_{n-1}(x)$, то в силу формул (17) и (18) $\forall \psi \in F$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{n-1}(x + t/n) J_2(\psi; t)\, dt + \frac{\psi(n)}{2\pi} \alpha(t_{n-1}; x) \equiv 0. \tag{37}$$

Стало быть, если $t_{\{\nu\},n} \in \tau_{\{\nu\},n}$, то вследствие равенства (33) $\forall \psi_i \in F$ и $\forall \nu \in \overline{m}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_{\{\nu\},n}(x_1, \dots, x_\nu + t_\nu/n_\nu, \dots, x_m) J_2(\psi_\nu; t_\nu)\, dt_\nu \equiv 0 \tag{38}$$

и

$$\frac{\psi_\nu(n_\nu)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_{\{\nu\},n}(x_1, \dots, x_\nu + t_\nu, \dots, x_m) \cos(n_\nu t_\nu - \beta_\nu \pi/2)\, dt_\nu \equiv 0. \tag{39}$$

Поэтому из определения величин $F_\mu(\cdot; x)$, $P_\mu(\cdot; x)$ и $Q_\mu(\cdot; x)$ заключаем, что $\forall t_{\mu,n} \in \tau_{\mu,n}$, $\mu \in \overline{m}$, $\forall \psi_i \in F$ и $\forall \beta \in R^1$, $i \in \mu$,

$$F_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv P_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv Q_\mu(t_{\mu,n}; x) \equiv 0 \tag{40}$$

и тогда из леммы 3 вытекает такое утверждение.

Лемма 4. *Пусть* $f \in C^{\psi}_{\beta} M$, $\psi_i \in F$, $i \in \overline{m}$, $\beta \in R^m$ *и*

$$\varphi_\mu(x) = f^{\psi}_{\beta,\mu}(x) - t_{\mu,n}(x), \; t_{\mu,n} \in \Gamma_{\mu,n}. \tag{41}$$

Тогда $\forall x \in R^m$

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_n(f; x) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{|\mu|=k} F_\mu(\varphi_\mu; x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} P_\mu(\varphi_\mu; x) + \sum_{k=2}^{m} (-1)^{k+1} \sum_{|\mu|=k} Q_\mu(\varphi_\mu; x). \tag{42}$$

Если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ *и* $\psi_i \in F$, $i \in \overline{m}$, *то равенство* (33) *верно почти всюду.*

Анализируя доказательство теоремы 1 из [2], можно заключить, что справедлива следующая лемма.

Лемма 5. *Пусть* $\psi \in F$ *и* $a = a(n)$ — *произвольная последовательность, для которой* $a(n) \geqslant a_0 > 0$. *Тогда* $\forall \varphi \in M$ *при любом* $n \in N$ *выполняется неравенство*

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t/n) J_2(\psi; t)\, dt \right\|_M \leqslant \|\varphi\|_M \delta(a, n, \psi), \tag{43}$$

где

$$\delta(a, n, \psi) = \frac{4}{\pi^2} \psi(n) \ln^+ \frac{n}{a(n)} + K(\psi(n) + R_n(a, \psi)), \tag{44}$$

$$R_n(a, \psi) = \int_{1/a(n)}^{\infty} \frac{\psi(nt + n)}{t}\, dt + \int_{a(n)}^{\infty} t^{-n}(\psi(n) - \psi(n + n/t))\, dt \tag{45}$$

и K — *величина, не зависящая от* $f \in C^{\psi}_{\beta} M$, $n \in N$ *и* β.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi \in M$, $\psi_i \in F$, $i = \overline{1, s}$, и

$$J_s^{(x)} = \int_{R^s} \varphi(x + t/n) \prod_{i=1}^{s} J_2(\psi_i; t_i)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{R^{s-1}} \varphi(x + t/n) \prod_{i=2}^{s} J_2(\psi_i; t_i)\, dt_2 \dots dt_s \Big) dt_1.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 5, получаем

$$\| J_s(x) \|_M \leqslant \Big\| \int\limits_{R^{s-1}} \varphi(x + t/n) \prod_{i=2}^{s} J_2(\psi_i;\, t_i)\, dt_2 \ldots dt_s \Big\|_M \delta(a_1, n_1, \psi_1) =$$

$$= \| J_{s-1}(x) \|_M \delta(a_1, n_1, \psi_1).$$

Здесь и в дальнейшем $a_i(n)$, $i = 1, 2, \ldots, s$,— любые последовательности, для которых $a_i(n) \geqslant a_0 > 0$. Поэтому для величины $J_s(x)$ справедлива оценка

$$\| J_s(x) \|_M \leqslant \| \varphi \|_M \prod_{i=1}^{s} \delta(a_i, n_i, \psi_i). \tag{46}$$

Учитывая эти соображения, для величин $F_\mu(\varphi_\mu;\, x)$ и $Q_\mu(\varphi_\mu;\, x)$ из леммы 4 имеем

$$\| F_\mu(\varphi_\mu;\, x) \|_M = \Big\| \int\limits_{R^{|\mu|}} \varphi_\mu(x + t/n)^\mu + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu} J_2(\psi_i;\, t_i)\, dt_i \Big\|_M \leqslant$$

$$\leqslant \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu} \delta(a_i, n_i, \psi_i). \tag{47}$$

Аналогично,

$$\| Q_\mu(\varphi_\mu;\, x \|_M = (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i \in \mu''} \psi_i(n_i) \Big\| \int\limits_{R^{|\mu'|}} \Big(\int\limits_{T^{|\mu''|}} \varphi_\mu((x + t/n)^{\mu'} +$$

$$+ (x + t)^{\mu''} + x^{c\mu}) \prod_{i \in \mu''} (\cos(n_i t_i + \beta_i \pi/2)\, dt^{\mu''} \Big) \prod_{i \in \mu'} J_2(\psi_i;\, t_i)\, dt^{\mu''} \Big\|_M \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{-|\mu''|} \prod_{i \in \mu''} \psi_i(n_i) \Big\| \int\limits_{T^{|\mu''|}} \varphi_\mu((x + t/n)^{\mu'} + (x + t)^{\mu''} + x^{c\mu}) \times$$

$$\times \prod_{i \in \mu''} \cos(n_i t_i + \beta_i \pi/2) \Big\|_M \prod_{i \in \mu'} \delta(a_i, n_i, \psi)_i .$$

Отсюда

$$\| Q_\mu(\varphi_\mu, x) \|_M \leqslant \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu''} \psi_i(n_i) \prod_{i \in \mu'} \delta(a_i, n_i, \psi_i). \tag{48}$$

Заметим, что величины $P_\mu(\varphi_\mu;\, x)$ в лемме 1 допускают оценку

$$\| P_\mu(\varphi_\mu;\, x) \| = (2\pi)^{-|\mu|} \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i) \Big\| \int\limits_{T^{|\mu|}} \varphi_\mu((x + t)^\mu + x^{c\mu}) \times$$

$$\times \prod_{i \in \mu} \cos(n_i t_i + \beta_i \pi/2)\, dt^\mu \Big\|_M \leqslant \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i). \tag{49}$$

Объединяя неравенства (46) — (49), видим, что в условиях леммы 4 справедлива оценка

$$\| \rho(f;\, x) \|_C = \| \rho(f;\, x) \|_M \leqslant \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{|\mu|=k} \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu} \delta(a_i, n_i, \psi_i) +$$

$$+ \sum_{|\mu|=k} \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu} \psi_i(n_i) \Big) + \sum_{k=2}^{m} \sum_{|\mu|=k} \| \varphi_\mu \|_M \prod_{i \in \mu} \delta(a_i, n_i, \psi_i) \prod_{i \in \mu''} \psi_i(n_i). \tag{50}$$

Выбирая теперь функции $t^*_{\mu,n}(x)$ в равенстве (41) согласно условию

$$\inf_{t_{\mu,n} \in \Gamma_{\mu,n}} \| f^\psi_{\beta,\mu}(x) - t_{\mu,n}(x) \|_M = \| f^\psi_{\beta,\mu}(x) - t^*_{\mu,n}(x) \|_M = E_{\mu,n}(f^\psi_{\beta,\mu}) \tag{51}$$

и учитывая равенство (44), получаем утверждение теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 3. Если $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, 2, \dots, m$, то условие (8) может не выполняться, однако, как показано в [3, с. 66] (см. также [2, с. 508]), и в этом случае справедлив аналог леммы 1 при $\beta = 0$.

Лемма 1. *Если $f \in C_0^\psi M$ и $\psi \in \mathfrak{M}$, то $\forall\, x \in R$*

$$\rho_n(f;\ x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0^\psi(x + t/n)\, J_2^{(0)}(\psi;\ t)\, dt + \frac{1}{2}\mathcal{A}_n(f;\ x), \tag{52}$$

где

$$J_2^{(0)}(\psi;\ t) = \frac{1}{\pi}\int_1^\infty \psi(nv)\cos vt dt \tag{53}$$

и

$$A_n(f;\ x) = \frac{\psi(n)}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0^\psi(t + x)\cos nt dt.$$

Если $f \in L_0^\psi$ и $\psi \in \mathfrak{M}$, то равенство (52) *выполняется почти всюду.*

Поэтому будут справедливы также утверждения лемм 2, 3 и 4 при условии, что $\beta = 0$. В частности, будет иметь место следующий аналог леммы 4.

Лемма 4′. *Пусть $f \in C_0^\psi M$ и $\psi_i \in \mathfrak{M}$, $i \in \overline{m}$,*

$$\varphi_\mu(x) = f_{0,\mu}^\psi(x) - t_{\mu,n}(x),\quad t_{\mu,n} \in \tau_{\mu,n}.$$

Тогда $\forall\, x \in R^m$

$$\rho_n(f;\ x) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k} F_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x) + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k} P_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x) +$$
$$+ \sum_{k=2}^m (-1)^{k+1}\sum_{|\mu|=k} Q_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x), \tag{54}$$

где величины $F_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x)$, $P_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x)$ и $Q_\mu^{(0)}(\varphi_\mu;\ x)$ определяются формулами (30), (34) *и* (35) *соответственно при $\beta = 0$. Если $f \in L_0^\psi$ и $\varphi_i \in \mathfrak{M}$, $i \in \overline{m}$, то равенство* (54) *выполняется почти всюду.*

В процессе доказательства теоремы 3 в [2] доказан следующий аналог леммы 5.

Лемма 5′. *Если $\psi \in \mathfrak{M}_0$, то $\forall\, \varphi \in M$*

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + t/n)\, J_2^{(0)}(\psi;\ t)\, dt \right\|_M \leqslant \|\varphi\|_M \delta(n, \psi), \tag{55}$$

где

$$\delta(n, \psi) = \left(\frac{4}{\pi^2}\psi(n)\ln n + O(1)\right)\psi(n), \tag{56}$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $\varphi \in M$ и по n.

Принимая во внимание утверждение этой леммы и повторяя рассуждения, использованные для получения оценки (50), убеждаемся, что $\forall\, f \in C_0^\psi M$

$$\|\rho_n(f;\ x)\|_C \leqslant \sum_{k=1}^m \Big(\sum_{|\mu|=k} \|\varphi_\mu\|_M \prod_{i\in\mu}\delta(n_i;\ \psi_i) + \sum_{|\mu|=k}\|\varphi_\mu\|_M \prod_{i\in\mu}(\psi_i(n_i)\Big) +$$
$$+ \sum_{k=2}^m \sum_{|\mu|=k}\|\varphi_\mu\|_M \prod_{i\in\mu'}\delta(n_i, \psi_i)\prod_{i\in\mu''}\psi_i(n_i).$$

Отсюда, выбирая функции $t_{\mu,n}^*$ из условия (51) при $\beta = 0$ и учитывая соотношение (56), получаем соотношения (15) и (16).

1. *Lebeskue H.* Sur les integrales singuliéres // Ann. de Toulouse.— 1909.— **1**.— P. 25—117.
2. *Степанец А. И.* К неравенству Лебега на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 4.— С. 499—509.
3. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.

Получено 23.04.90