УДК 517.5

Е. К. КРУТИГОЛОВА, канд. физ.-мат. наук (Дрогобыч. пед. ин-т)

Свойства рядов экспонент, показатели которых имеют конечную плотность

Приведены условия суммируемости методом Абеля рядов экспонент с комплексными показателями, имеющими конечную угловую плотность, в неугловых точках границы выпуклой многоугольной области сходимости ряда; установлены условия сходимости этих рядов в указанных выше точках.

Наведено умови підсумовування методом Абеля рядів експонент з комплексними показниками, які мають скінченну кутову густину, у всіх точках границі опуклої многокутної області збіжності ряду, крім вершин многокутника. Встановлено також умови збіжності цього ряду в указаних точках.

1. Пусть $\bar{D}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $3 \leqslant N < \infty$; D — открытая часть $\bar{D}$, причем начало координат принадлежит D.

Рассмотрим ряд

$$f(z) = \sum_{K=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(\lambda_n^{(k)} z), \tag{1}$$

в котором показатели $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1, k = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{(k)}/n = 2\pi i/(a_{k+1} - a_k). \tag{2}$$

Условие (2) означает, что при каждом $k = 1, \ldots, N$ последовательность $\lambda_n^{(k)} (n \geqslant 1)$ имеет конечную отличную от нуля плотность $\sigma_k = \lim_{n\to\infty} n\,|\lambda_n^{(k)}|$, причем $l_k \overset{\mathrm{df}}{=} |a_{k+1} - a_k| = 2\pi\sigma_k$. Таким же образом, как при доказательстве теоремы 1 ([1], с. 571), можно убедиться, что ряд (1), в котором показатели $\lambda_n^{(k)} (n \geqslant 1)$ удовлетворяют условию (2), сходится абсолютно в D и расходится вне $\bar{D}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n^{(k)}|} = \exp(-2\pi h_k \,|\, l_k), \quad k = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

где h_k — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на сторону $[a_k, a_{k+1}]$ многоугольника D.

Т е о р е м а 1. *При выполнении условий* (2) *и* (3) *ряд* (1) *суммируется методом Абеля в каждой неугловой точке границы многоугольника* D, *в которой существует граничное значение функции* $f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий (2) и (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(\lambda_n^{(k)} z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1)} \exp(\lambda_n^{(1)} z) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(N)} \exp(\lambda_n^{(N)} z) = \varphi_1(z) + \ldots + \varphi_N(z), \quad z \in D.$$

Поскольку сумма каждого из рядов

$$\psi_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(j)} \exp(\lambda_n^{(j)} z), \quad j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, N, \; j \neq k,$$

является аналитической функцией при $z \in (a_k, a_{k+1})$, то существует граничное значение функции $\varphi_k(z) = f(z) - \varphi_1(z) - \ldots - \varphi_{k-1}(z) - \varphi_{k+1}(z) - \ldots - \varphi_N(z)$ в каждой точке $z \in (a_k, a_{k+1})$, в которой существует граничное значение $f(z)$. Предположим, что существует граничное значение функции $f(z)$ в точке $z_0 \in (a_k, a_{k+1})$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(-|\lambda_n^{(k)}|\, r) \exp(\lambda_n^{(k)} z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp\{\lambda_n^{(k)} (z - r\exp(-i\arg\lambda_n^{(k)}))\}, \quad r > 0, \quad z \in D.$$

Этот ряд сходится в точке z_0 при фиксированном $r > 0$. Действительно, в силу (3) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n^{(k)}| \exp(-\lambda_n^{(k)}|\, r} = \exp\{-2\pi(h_k + r)/l_k\},$$

т. е. ряд сходится абсолютно в многоугольнике D^*, стороны которого параллельны сторонам многоугольника D и отстоят от начала координат на расстояние $h_k + r$. В отличие от рассмотренного в [1, с. 572] случая, когда $\lambda_n^{(k)} = 2\pi ni/(a_{k+1} - a_k)$, в данном случае при выполнении условия (2) показатели $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1,\; k$ — фиксированное) не обязательно расположены на одном луче. Поэтому необходимо показать, что при $r \to 0$ и при каждом фиксированном $n > n_0$, $n_0 = \mathrm{const}$, точка $z_0 - r\exp(-i\arg\lambda_n^{(k)})$

стремится к z_0 изнутри области D. Имеем в силу (2)

$$\lambda_n^{(k)} = 2\pi ni/(a_{k+1} - a_k) + n\gamma_n^{(k)} = \omega_n^{(k)} + n\gamma_n^{(k)}, \quad \gamma_n^{(k)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\arg \lambda_n^{(k)} - \arg \omega_n^{(k)} = \arg (\lambda_n^{(k)}/\omega_n^{(k)}) =$$
$$= \arg \{1 + \gamma_n^{(k)} (a_{k+1} - a_k)/2\pi i\}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Учитывая, что $\gamma_n^{(k)} \to 0$ при $n \to 0$ при $n \to \infty$, видим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при $n > \Delta_1$ точки $1 + \gamma_n^{(k)} (a_{k+1} - a_k)/2\pi i$ лежат внутри окружностей с центром в точке $z=1$ радиусов $\rho_k < \varepsilon$. Поэтому при $n > \Delta_1$ получим

$$\arg \{1 + \gamma_n^{(k)} (a_{k+1} - a_k)/2\pi i\} < \delta < \pi/2, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Обозначим через $\theta_k = \arg \omega_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, N$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $n > n_0$ выполняется неравенство $\theta_k - \varepsilon < \arg \lambda_n^{(k)} < \theta_k + \varepsilon$. Следовательно, лучи $r \exp(-i \arg \lambda_n^{(k)})$, $n > n_0$, лежат внутри угла, симметричного относительно луча, выходящего из начала координат и перпендикулярного к стороне $[a_k, a_{k+1}]$ многоугольника D, т. е. луча $r \exp(-i\theta_k)$. Этот угол ограничен лучами $p_1 = r \exp(-i(\theta_k - \varepsilon))$, $p_2 = r \exp(-i(\theta_k + \varepsilon))$. Таким образом, при каждом $n > n_0$ и достаточно малых $r > 0$ точка $z_0 - r \exp(-i \arg \lambda_n^{(k)})$ получается путем смещения точки z_0 внутрь области D параллельно лучу $r \exp(-i \arg \lambda_n^{(k)})$ на вектор длины $r > 0$.

В силу установленного выше так же, как при доказательстве теоремы 1 [2, с. 778], получим, что существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(\lambda_n^{(k)} z_0 - \mu_n^{(k)}/r) = f_0, \quad f_0 = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} f(z).$$

Теорема доказана.

2. Запишем теперь условие (2) в виде

$$\lambda_n^{(k)} = 2\pi ni/(a_{k+1} - a_k) + \beta_n^{(k)}, \quad n \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, N. \qquad (2')$$

Предположим, что последовательность $\beta_n^{(k)}$, $n \geqslant 1$, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n^{(k)}| < \infty, \quad k = 1, \ldots, N. \qquad (4)$$

Образуем ряд

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp \mu_n^{(k)} z, \qquad (5)$$

в котором $\mu_n^{(k)}$ — нули квазиполинома

$$P(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \exp(a_k z)\, c_k = \mathrm{const}.$$

Теорема 2. *Если выполняются условия* (2)—(4), *то из сходимости ряда* (1) *в неугловой точке* $z \in \partial D$ *следует сходимость в этой точке ряда* (5), *и наоборот.*

Доказательство. В силу (2′) имеем

$$\exp(\lambda_n^{(k)} z) = \exp(\omega_n^{(k)} z) \exp(\beta_n^{(k)} z), \quad n \geqslant 1, \quad k = 1, \ldots, N.$$

При фиксированном $z_0 \in \overline{D}$

$$\exp(\beta_n^{(k)} z_0) = 1 + (1 + \delta_n^{(k)}) \beta_n^{(k)} z_0, \quad \delta_n^{(k)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому в области D справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(\lambda_n^{(k)} z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} \exp(\omega_n^{(k)} z) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)} (1 + \delta_n^{(k)}) \beta_n^{(k)} z \exp \omega_n^{(k)} z. \quad (6)$$

Если первый из рядов в правой части этого равенства сходится в точке $z_0 \in (a_k, a_{k+1})$, то в силу (4) сходится и второй ряд в правой части в этой точке. Если же первый ряд в правой части расходится в точке z_0, то и ряд в левой части расходится в этой точке. Действительно, если первый из рядов в правой части (6) расходится,

$$|u_n^{(k)} \exp(\omega_n^{(k)} z_0)| < C_1, \quad C_0 = \text{const}, \quad C_1 = \text{const}, \quad n = 1, \quad k = 1, \ldots, N,$$

то второй ряд в правой части (6) в силу условия (4) сходится абсолютно в точке z_0, поэтому ряд в левой части (6) расходится в точке z_0. Таким образом, сходимость ряда (1) в точке $z_0 \in (a_k, a_{k+1})$ равносильна сходимости первого из рядов в правой части (6). Но сходимость первого из рядов в правой части (6) в точке z_0 равносильна сходимости ряда (5) в этой точке, если выполнены условия этой теоремы. Теорема доказана.

Пусть

$$Q(z) = \exp(qz) \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{N} (1 - z/\lambda_n^{(k)}), \quad q = \text{const}. \quad (7)$$

Если последовательность $\lambda_n^{(k)}$ имеет вид (2′) и удовлетворяет условию (4), то согласно теореме 1.4.2 [3, с. 100] функция (7) является целой функцией вполне регулярного роста, ибо множество ее нулей $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1,\ k = 1, \ldots, N)$ в этом случае является регулярным множеством. Тогда согласно теоремам 1.2.6 [3, с. 39], 4.64 [3, с. 294] можно утверждать, что произвольная аналитическая в $\bar{D}$ функция может быть представлена в D рядом (1), в котором $u_n^{(k)}$, $n > 1$, коэффициенты Леонтьева. В силу теоремы 1 [4, с. 643] нули функции (7) в таком случае пригодны для представления рядом (1) произвольной аналитической в D функции. Коэффициенты $u_n^{(k)}$ в этом ряде вычисляются по вполне определенным формулам.

Покажем, что произвольную аналитическую в D и непрерывную на $\bar{D}$ функцию можно представить в D рядом (1), в котором $u_n^{(k)}$ — коэффициенты Леонтьева, $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1)$ — нули целой функции (7).

Рассмотрим также целую функцию

$$Q_1(z) = \exp(qz) \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} (1 - z/\omega_n^{(k)}), \quad q = \text{const}, \quad \omega_n^{(k)} = 2\pi n i/(a_{k+1} - a_k).$$

Используя методику доказательства теоремы 1.2.11 [2, с. 89] и учитывая условие (5), убеждаемся, что при всех z справедлива оценка

$$C_2 |Q_1(z)| < |Q(z)| < C_3 |Q_1(z)|, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0.$$

Отсюда в силу теорем 1.2.12 [2, с. 62], 1.2.13 [2, с. 64], 4.6.5 [2, с. 295] следует доказываемое утверждение.

Теорема 3. *Если выполняются условия* (3) *и* (5), *то произвольную аналитическую в D функцию можно представить в D рядом* (1), *в котором $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1)$ — нули целой функции* (7), *а коэффициенты вычисляются по вполне определенным формулам. Кроме того, произвольную аналитическую в D и непрерывную в $\bar{D}$ функцию можно представить в D в виде ряда* (1), *в котором $\lambda_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1)$ — нули функции* (7), и *$u_n^{(k)}$ $(n \geqslant 1,$ $k = 1, \ldots, N)$ — коэффициенты Леонтьева.*

1. *Мельник Ю. И., Крутиголова Е. К.* Свойства некоторых специальных рядов экспонент с комплексными показателями // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 4.— С. 571—573.
2. *Дзядык В. К., Крутиголова Е. К.* О представлении аналитических функций рядами Дирихле на границе области сходимости // Мат. заметки.— 1973.— **14**, № 6.— С. 769—784.

3. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 576 с.
4. *Мельник Ю. И.* К вопросу о представлении регулярных функций рядами Дирихле // Мат. заметки.— 1977.— **21**, № 5.— С. 54—65.

Получено 16.04.90