УДК 519.21

Б. В. БОНДАРЕВ, канд. физ.-мат. наук (Донец. ун-т)

Усреднение в параболических системах, подверженных слабо зависимым случайным возмущениям. L_1-подход

Рассматривается процедура усреднения в уравнениях параболического типа, находящихся под воздействием центрированных, слабо зависимых случайных возмущений таких, что соответствующим образом нормированные их интегралы удовлетворяют экспоненциальным оценкам С. Н. Бернштейна. Для нормированных флуктуаций решения исходного уравнения относительно решения усредненного уравнения, которое оказывается детерминированным, установлены экспоненциальные оценки С. Н. Бернштейна. На основании полученных неравенств для любого заданного уровня доверия можно указать доверительную полосу, границы которой определяются решением усредненного уравнения, в которой будет находиться решение исходной задачи.

Розглядається процедура усереднення в рівняннях параболічного типу, які знаходяться під впливом центрованих, слабо залежних випадкових збурень таких, що відповідним чином нормовані інтеграли від яких задовольняють експоненціальним оцінкам С. Н. Бернштейна. Для нормованих флуктуацій розв'язку вихідного рівняння відповідно розв'язку усередненого рівняння, яке виявляється детермінованим, установлені експоненціальні оцінки С. Н. Бернштейна. На основі здобутих нерівностей для будь-якого заданого рівня довіри можна вказати надійну смугу, границі якої визначаються розв'язком усередненого рівняння, в якій буде знаходитися розв'язок вихідної задачі.

В данной статье рассматривается случай существования у параболического уравнения, подверженного случайному воздействию, классического решения [1]. Для оценки близости по пространственной переменной предельного и допредельного решений предполагается использовать метрику пространства L_1. Выбор L_1-расстояния мотивируется тем, что оно [2] инвариантно относительно монотонных преобразований координатных осей. Стоит отметить, что наиболее полно изученная L_2-теория приводит [2] к ряду аномальных эффектов и неправильных представлений.

Рассмотрим на $[0, T/\varepsilon] \times (-\infty, +\infty)$ уравнение

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon\,[L_{t,x}U_\varepsilon + A(t, x, U_\varepsilon) + \sigma(t, x, U_\varepsilon)\,\eta(t)],$$
$$U_\varepsilon(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} \in R^n$ — точка евклидова пространства,

$$L_{t,x}V = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\,\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\,\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

$\eta(t)$ — некоторый центрированный случайный процесс, относительно которого везде в дальнейшем будем предполагать следующее.

1. Существуют $C_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что

$$P = \left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(s)\,ds\right| > R\right\} \leqslant C_1\exp\{-C_2R^{\alpha}\} + r_1(\varepsilon),$$

$$P\left\{\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(s)|-M|\eta(s)|)\,ds\right|>R\right\}\leqslant C_3\exp\{-C_4R^{\beta}\}+r_2(\varepsilon),$$

где $r_i(\varepsilon)\to 0$, $i=1,2$, при $\varepsilon\to 0$, $R>0$ достаточно большое, считаем также, что $M|\eta(t)|\leqslant C_0<+\infty$.

Для коэффициентов оператора $L_{t,x}$ сформулируем такое предположение.

II. Неслучайные функции $a_{ij}(t,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $b_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют условиям

$$\nu\sum_{i=1}^n z_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)z_iz_j,\quad \nu>0,$$

для любой точки $z=(z_1,\ldots,z_n)\in R^n$,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(t,x)\leqslant N<+\infty,\quad \sum_{i=1}^n b_i^2(t,x)\leqslant B^2<+\infty,$$

а, кроме того, коэффициенты $a_{ij}(t,x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $b_i(t,x)$, $i=\overline{1,n}$ непрерывны, удовлетворяют условию Гельдера по x.

III. Непрерывные неслучайные функции $A(t,x,z)$, $\sigma(t,x,z)$ равномерно по z ограничены, растут при $|x|\to+\infty$ не быстрее, чем $C\exp\{\gamma|x|^2\}$, $C>0$, $\gamma>0$, удовлетворяют условиям Липшица

$$|A(t,x,z_1)-A(t,x,z_2)|\leqslant L_A|z_1-z_2|,$$
$$|\sigma(t,x,z_1)-\sigma(t,x,z_2)|\leqslant L_\sigma|z_1-z_2|.$$

У начальной функции $\varphi(x)$ предполагаем также рост при $|x|\to+\infty$ не более, чем $C\exp\{\gamma|x|^2\}$, $C>0$, $\gamma>0$.

IV. Существуют средние по времени

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T a_{ij}(t,x)\,dt=\overline{a}_{ij}(x),\quad i,j=\overline{1,n},$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T b_i(t,x)\,dt=\overline{b}_i(x),\quad i=\overline{1,n},$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(t,x,z)\,dt=\overline{A}(x,z)$$

равномерно по x и z.

Наряду с задачей Коши, описываемой уравнением (1), рассмотрим задачу Коши для уравнения с усредненными коэффициентами. Именно: пусть $U_0(t,x)$ — решение уравнения

$$\frac{\partial U_0}{\partial t}=\overline{L}_xU_0+\overline{A}(x,U_0),\tag{2}$$

$$U_0(t,x)|_{t=0}=\varphi(x),$$

где

$$\overline{L}_xV=\sum_{i,j=1}^n\overline{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2V}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n\overline{b}_i(x)\frac{\partial V}{\partial x_i},$$

коэффициенты $\overline{a}_{ij}(x)$, $\overline{b}_i(x)$, $i,j=\overline{1,n}$, $\overline{A}(x,z)$ определены в условии **IV.**

Пусть

$$\rho_\varepsilon(t,x)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\left[A\left(\frac{s}{\varepsilon},x,U_0(s,x)\right)-\overline{A}(x,U_0(s,x))\right]ds+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t(L_{s/\varepsilon,x}-\overline{L}_x)U_0(s,x)\,ds,$$

$$L_{t,x}^{*}V = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 [a_{ij}(t,x)V]}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial [b_i(t,x)V]}{\partial x_i}$$

— оператор, сопряженный к оператору $L_{t,x}$.

V. Величины α_ε, β_ε, γ_ε, σ_ε, ρ_ε конечны, где

$$\alpha_\varepsilon = \int_0^T \int_{R^n} \left| L_{t/\varepsilon, x} \sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t,x)\right)\right| dxdt,$$

$$\beta_\varepsilon = \int_0^T \int_{R^n} | L_{t/\varepsilon, x} \rho_\varepsilon(t,x)| \, dxdt,$$

$$\gamma_\varepsilon = \int_0^T \int_{R^n} \left| \frac{\partial}{\partial t} \sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t,x)\right)\right| dxdt,$$

$$\sigma_\varepsilon = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_{R^n} \left| \sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t,x)\right)\right| dx,$$

$$\rho_\varepsilon = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_{R^n} |\rho_\varepsilon(t,x)| \, dx.$$

При выполнении условий I — III (см., например, [1]) существует $Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)$ — единственное фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $\frac{\partial V}{\partial t} = L_{t/\varepsilon, x} V$, такое, что $Z_\varepsilon(t, x, \tau, y) > 0$, $\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\, dy = 1$,

$$Z_\varepsilon(t, x, \tau, y) \leqslant C(t-\tau)^{-n/2} \exp\left\{-\mu \frac{|x-y|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{3}$$

где постоянные $C > 0$, $\mu > 0$ зависят от $\nu > 0$, $N > 0$, $T > 0$, $n > 0$, постоянных Гельдера для коэффициентов $a_{ij}(t, x)$, $i, j = \overline{1, n}$, уравнения (1).

Нетрудно заметить, что

$$\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\, dx \leqslant C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* I—V; *тогда справедливо неравенство*

$$P\left\{\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_{R^n} \left| U_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) - U_0(t,x)\right| dx > \sqrt{\varepsilon}\, C(\varepsilon, r, R)\right\} \leqslant C_1 \exp\{-C_2 R^\alpha\} +$$
$$+ C_3 \exp\{-C_4 r^\beta\} + r_1(\varepsilon) + r_2(\varepsilon), \tag{4}$$

где $C(\varepsilon, r, R)$ *имеет вид*

$$C(\varepsilon, r, R) = \left(R\left[\sigma_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2} (\alpha_\varepsilon + \gamma_\varepsilon)\right] + \rho_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2} \beta_\varepsilon\right) \times$$
$$\times \exp\left\{[r\sqrt{\varepsilon} + T(1 + C_0)]\, C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\right\}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть

$$\zeta_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[U_\varepsilon\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) - U_0(t,x)\right];$$

тогда нетрудно заметить, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\zeta_\varepsilon = L_{t/\varepsilon,x}\zeta_\varepsilon + \frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right) - \right.$$

$$\left. - A\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_\varepsilon\right)\eta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), \tag{6}$$

$$\zeta_\varepsilon(t, x)|_{t=0} \equiv 0.$$

Классическое решение задачи Коши (6) можно записать [1] формулой

$$\zeta_\varepsilon(t, x) = \int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial\tau}(\tau, y)\,dyd\tau +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\left[A\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_\varepsilon\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y\right)\right) - \right.$$

$$\left. - A\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)\right]dyd\tau + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y) \times$$

$$\times\, \sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_\varepsilon(\tau, y)\right)\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)dyd\tau. \tag{7}$$

Воспользовавшись липшицивостью коэффициентов $A(t, x, z)$, $\sigma(t, x, z)$, из (7) имеем

$$|\zeta_\varepsilon(t, x)| \leqslant \left|\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\frac{\partial\rho_\varepsilon(\tau, y)}{\partial\tau}\,dyd\tau\right| +$$

$$+ L_A\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,|\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\,dyd\tau +$$

$$+ L_\sigma\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,|\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\left|\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|dyd\tau +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left|\int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)dyd\tau\right|. \tag{8}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (8). Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{R^n}\int_0^t Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\frac{\partial\rho_\varepsilon(\tau, y)}{\partial\tau}\,d\tau dy = \rho_\varepsilon(t, x) -$$

$$- \int_0^t \int_{R^n} \rho_\varepsilon(\tau, y)\frac{\partial Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)}{\partial\tau}\,dyd\tau =$$

$$= \rho_\varepsilon(t, x) - \int_0^t \int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,L_{\tau/\varepsilon,y}\rho_\varepsilon(\tau, y)\,dyd\tau. \tag{9}$$

Из (9) следует

$$\int_{R^n}\left|\int_{R^n}\int_0^t Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\frac{\partial\rho_\varepsilon(\tau, y)}{\partial\tau}\,dyd\tau\right|dx \leqslant \rho_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\beta_\varepsilon. \tag{10}$$

Заметим, что

$$\int_{R^n}\int_0^t\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)|\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\,dyd\tau dx \leqslant C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t\int_{R^n}|\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\,dyd\tau, \quad (11)$$

а

$$\int_{R^n}\int_0^t\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\left|\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right||\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\,dyd\tau dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t\left|\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|\int_{R^n}|\zeta_\varepsilon(\tau, y)|\,dyd\tau. \quad (12)$$

Пусть

$$\eta_\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon}\int_0^{t/\varepsilon}\eta(s)\,ds, \quad \eta_\varepsilon = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\eta_\varepsilon(t)|,$$

тогда в силу того, что

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^t\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)dyd\tau =$$

$$= \eta_\varepsilon(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t, x)\right) - \int_0^t\int_{R^n}\eta_\varepsilon(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\times$$

$$\times\,\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)\Big]dyd\tau = \eta_\varepsilon(t)\,\sigma\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, U_0(t, x)\right) -$$

$$-\int_0^t\int_{R^n}\eta_\varepsilon(\tau)Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,L_{\tau/\varepsilon, y}\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)dyd\tau -$$

$$-\int_0^t\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,\eta_\varepsilon(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\,\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)dyd\tau,$$

имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{R^n}\left|\int_0^t\int_{R^n} Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)\,\sigma\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, y, U_0(\tau, y)\right)dyd\tau\right|dx \leqslant$$

$$\leqslant \eta_\varepsilon\left[\sigma_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(\alpha_\varepsilon + \gamma_\varepsilon)\right]. \quad (13)$$

Пусть теперь

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_{R^n}|\zeta_\varepsilon(t, x)|\,dx, \quad \zeta_\varepsilon = \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\zeta_\varepsilon(t),$$

тогда из (8) с учетом (10) — (13), получаем

$$\zeta_\varepsilon(t) \leqslant \rho_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\beta_\varepsilon + \eta_\varepsilon\left[\sigma_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(\alpha_\varepsilon + \gamma_\varepsilon)\right] +$$

$$+ C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\int_0^t\left(1 + \left|\eta\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right|\right)\zeta_\varepsilon(\tau)\,d\tau. \quad (14)$$

Из (14) в силу леммы Гронуолла имеем

$$\zeta_\varepsilon \leqslant \left(\rho_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\beta_\varepsilon + \eta_\varepsilon\left[\sigma_\varepsilon + C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}(\alpha_\varepsilon + \gamma_\varepsilon)\right]\right)\times$$

$$\times\exp\left\{C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}T(1 + C_0)\right\}\exp\left\{C\left(\frac{\pi}{\mu}\right)^{n/2}\left|\varepsilon\int_0^{T/\varepsilon}(|\eta(\tau)| - M|\eta(\tau)|)\,d\tau\right|\right\}.$$

Отсюда в силу элементарных вероятностных неравенств получим

$$P\{\zeta_\varepsilon > C(\varepsilon, r, R)\} \leqslant P\{\eta_\varepsilon > R\} + P\left\{\sqrt{\varepsilon}\left|\int\limits_0^{T/\varepsilon} (|\eta(\tau)| - M|\eta(\tau)|)\, d\tau\right| > r\right\}.$$

Из этого неравенства с учетом условия п. 1 следует неравенство (4), где $C(\varepsilon, r, R)$ определено по формуле (5). Теорема доказана.

Замечание. Утверждения теоремы останутся справедливыми, если вместо задачи Коши для параболического уравнения рассмотреть первую начально-краевую задачу [3]. В этом нетрудно убедиться, заметив, что решение начально-краевой задачи выражается формулой, аналогичной (6), где вместо фундаментального решения $Z_\varepsilon(t, x, \tau, y)$ будет стоять функция Грина $G_\varepsilon(t, x, \tau, y)$, для которой [4] справедлива оценка (3). Как нетрудно заметить, все дальнейшие рассуждения пригодны и для рассматриваемого случая.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} = \varepsilon\left\{\left[\frac{3}{2} + \sin\left(\frac{t}{2} + x\right)\right]\frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(t + x + U_\varepsilon)}{1 + x^2} + \eta(t)\frac{\sin\left(\dfrac{1}{1+t} + x + U_\varepsilon\right)}{1 + x^2}\right\}, \tag{15}$$

$$U_\varepsilon(t, x)|_{t=0} \equiv 0,$$

где $\eta(t)$ — центрированный случайный процесс, $M\eta(t) = 0$, $|\eta(t)| \leqslant \leqslant C_0 < +\infty$ с вероятностью 1, удовлетворяющий условию равномерно сильного перемешивания [5] с коэффициентом перемешивания $\varphi(\tau)$ таким, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \leqslant D < +\infty.$$

Тогда условие п. I выполняется, причем $r_1(\varepsilon) \equiv r_2(\varepsilon) \equiv 0$. Постоянные $C_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, выписываются в явном виде. Нетрудно убедиться в том, что в данном случае усредненное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{3}{2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \quad U_0(t, x)|_{t=0} \equiv 0, \tag{16}$$

и решение задачи (16) имеет вид $U_0(t, x) \equiv 0$.

В данном случае

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_0^t \frac{\sin\left(\dfrac{s}{\varepsilon} + x\right)}{1 + x^2}\, ds = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1 + x^2}\sin\frac{t}{2\varepsilon}\sin\left(x + \frac{t}{2\varepsilon}\right). \tag{17}$$

Из представления (17) следует $\rho_\varepsilon \leqslant 2\pi\sqrt{\varepsilon}$, $\beta_\varepsilon \leqslant 33{,}5\pi\sqrt{\varepsilon}$. Нетрудно также проверить, что $\sigma_\varepsilon \leqslant \pi$, $\gamma_\varepsilon \leqslant \pi$, $\alpha_\varepsilon \leqslant 33{,}5\pi$. Таким образом, теорема доказана.

1. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Двусторонние оценки фундаментальных решений параболических уравнений второго порядка и некоторые их приложения // Успехи мат. наук.— 1984.— 39, № 2.— С. 107—156.
2. *Деврой Л., Дьерфи Л.* Непараметрическое оценивание плотности.— М. : Мир, 1988.— 407 с.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.— М. : Наука, 1973.— 407 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины.— М. : Наука, 1965.— 524 с.

Получено 02.03.90