УДК 517.9

В. Г. КОЛОМИЕЦ, А. И. МЕЛЬНИКОВ, кандидаты физ.-мат. наук
(Ин-т математики АН УССР, Киев),
Т. М. МУХИТДИНОВ, канд. физ.-мат. наук (Ташкент. политех. ин-т)

Об усреднении стохастических систем интегро-дифференциальных уравнений с «пуассоновским шумом»

Доказан аналог теоремы Н. Н. Боголюбова об усреднении на конечном интервале времени системы стохастических интегро-дифференциальных уравнений с «пуассоновским шумом».

Доведено аналог теореми М. М. Боголюбова про усереднення на скінченному інтервалі часу системи стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь з «пуассонівським шумом».

Изучение влияния случайных сил на нелинейные системы имеет большое значение во многих областях науки и техники. Многочисленные задачи теории стохастических дифференциальных уравнений эффективно решаются с помощью метода усреднения. В работах И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [1—3] рассмотрены общие стохастические уравнения. В них доказаны предельные теоремы, которые касаются и метода усреднения [4, 5].

В настоящей статье рассмотрен случай стохастических интегро-дифференциальных уравнений [6, 7] с «пуассоновским шумом». Доказан аналог теоремы Н. Н. Боголюбова об усреднении на конечном интервале времени.

Пусть дано вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$, U — подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; обозначим соответственно $\mathfrak{B}_U$ и $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ σ-алгебры множеств U и $\mathbb{R}_+$. Задано также семейство σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{R}_+$, множеств из Ω, удовлетворяющих условиям $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$, если $t_1 \leqslant t_2$.

Рассмотрим на заданном вероятностном пространстве пуассоновскую меру $\nu(\Delta, A)$, которая является случайной мерой по (Δ, A) на $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+} \times \mathfrak{B}_U$. Предполагаем, что мера $\nu(\Delta, A)$ однородна относительно сдвига на $\mathbb{R}_+$, т. е. $M\nu(\Delta, A) = |\Delta| \Pi(A)$, где $|\Delta|$ — лебегова мера Δ, а $\Pi(A)$ — конечная мера на $\mathfrak{B}_U$. Кроме того, мера $\nu([0, t], A)$ предполагается согласованной с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_t$.

Пусть заданы n-мерные вектор-функции $a(t, x, y)$, $b(t, x, y, u)$ и m-мерные вектор-функции $\varphi(t, s, x)$ и $\psi(t, s, x)$ в области t, $s \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) функции $a(t, x, y)$, $b(t, x, y, u)$, $\varphi(t, s, x)$, $\psi(t, s, x)$ измеримы по совокупности своих переменных и непрерывны;

2) существуют такие $K > 0$ и $\mu(t, s)$, что для всех x', $x'' \in \mathbb{R}^n$, $y', y'' \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\| a(t, x', y') - a(t, x'', y'') \|^2 + \int_U \| b(t, x', y', u) - b(t, x'', y'', u) \|^2 \Pi(du) \leqslant$$

$$\leqslant K^2 (\| x' - x'' \|^2 + \| y' - y'' \|^2),$$

$$\| \varphi(t, s, x') - \varphi(t, s, x'') \| + \| \psi(t, s, x') - \psi(t, s, x'') \| \leqslant \mu(t, s) (\| x' - x'' \|),$$

где $\mu(t, s)$ — положительная функция, определенная для t, $s \geqslant 0$ такая, что $\int_0^t \mu^2(t, s)\, ds = \mu_1^2(t)$ ограничена некоторой константой μ_0^2 для всех $t \geqslant 0$;

3) $$\| a(t, x, y) \|^2 + \int_U \| b(t, x, y, u) \|^2 \Pi(du) \leqslant K^2 (1 + \| x \|^2),$$

$$\| \varphi(t, s, x) \|^2 + \| \psi(t, s, x) \|^2 \leqslant K^2 (1 + \| x \|^2).$$

Рассмотрим следующую систему стохастических интегро-дифференциальных уравнений:

$$x(t) = x_0 + \varepsilon \int_0^t a\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) d\tau + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_U b\left(\tau, x(\tau),\right.$$

$$\left. \int_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\, ds, u\right) P(d\tau, du), \tag{1}$$

где $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\varepsilon_0 > 0$, x_0 — n-мерный случайный вектор с $M\{\| x_0 \|^2\} < \infty$, $P(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta| \Pi(A)$, $\nu(\Delta, A)$ — пуассоновская мера, $M\nu(\Delta, A) = |\Delta| \Pi(A)$.

При каждом фиксированном $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ уравнение (1) имеет единственное решение $x(t)$, необязательно являющееся марковским случайным процессом.

Обозначим через $\varphi_0(t, x)$ и $\psi_0(t, x)$ функции

$$\int_0^t \varphi(t, s, x)\, ds = \varphi_0(t, x), \quad \int_0^t \psi(t, s, x)\, ds = \psi_0(t, x)$$

и предположим, что существуют некоторые функции $\bar{a}(x)$ и $\bar{b}(x, u)$ такие, что

$$\lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} a(t, x, \varphi_0(t, x))\, dt = \bar{a}(x),$$

$$\lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \int_U b(t, x, \psi_0(t, x), u)\, P(dt, du) = \int_U \bar{b}(x, u)\, \Pi(du).$$

Одновременно с системой (1) рассмотрим систему [6], являющуюся усредненной к системе (1):

$$\xi(t) = \xi_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{a}(\xi(\tau))\, d\tau + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_U \bar{b}(\xi(\tau), u)\, P(d\tau, du), \tag{2}$$

где $\xi(0) = \xi_0 = x_0$.

Условия существования среднего у функций a и b заменим некоторыми более сильными условиями, а именно: предположим, что

4) существуют измеримые функции $\bar{a}(x)$ и $\bar{b}(x, u)$, удовлетворяющие условию Липшица по x такие, что для некоторых функций $\gamma_1(T_1)$ и $\gamma_2(T_1)$, стремящихся к нулю при $T_1 \to \infty$, выполнены неравенства

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \| a(t, x, \varphi_0(t, x) - \bar{a}(x) \|\, dt \leqslant \gamma_1(T_1)(1 + \|x\|),$$

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \int_U \| b(t, x, \psi_0(t, x), u) - \bar{b}(x, u) \|^2\, \Pi(du)\, dt \leqslant \gamma_2(T_1)(1 + \|x\|^2).$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть для коэффициентов уравнения* (1) *выполнены условия* 1—3 *и* 4. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\delta > 0$, $\alpha \in]0, 1/2[$ *и сколь угодно большого* $L > 0$ *существует* $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ *такое, что для всех* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$ *будет справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in [0, L\varepsilon^{-\alpha}]} M \{ \| x(t) - \xi(t) \|^2 \} \leqslant \delta. \tag{3}$$

Доказательство. Из (1) и (2) имеем

$$x(t) - \xi(t) = \varepsilon \int_0^t \left[a\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) - \bar{a}(\xi(\tau)) \right] d\tau +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_U \left[b\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\, ds, u\right) - \bar{b}(\xi(\tau), u) \right] P(d\tau, du). \tag{4}$$

В (4) слагаемые в правой части обозначим соответственно через R_1 и R_2. Оценим теперь математическое ожидание квадрата каждого из них. Для этого R_1 и R_2 представим в виде $R_1 = R_{11} + R_{12} + R_{13}$, где

$$R_{11} = \varepsilon \int_0^t \left[a\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, x(s))\, ds\right) - a\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\right) \right] d\tau,$$

$$R_{12} = \varepsilon \int_0^t \left[a\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(s))\, ds\right) - a\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds \right] d\tau,$$

$$R_{13} = \varepsilon \int_0^t a\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \varphi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds - \bar{a}(\xi(\tau)) \right] d\tau,$$

$$R_2 = R_{21} + R_{22} + R_{23},$$

где

$$R_{21} = \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_U \left[b\left(\tau, x(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, x(s))\, ds, u\right) - \right.$$

$$\left. - b\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, \xi(s))\, ds, u\right) \right] P(d\tau, du),$$

$$R_{22} = \sqrt{\varepsilon} \int_0^t \int_U \left[b\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, \xi(s))\, ds, u\right) - \right.$$

$$\left. - b\left(\tau, \xi(\tau), \int_0^\tau \psi(\tau, s, \xi(\tau))\, ds, u \right] P(d\tau, du),$$

$$R_{23}=\sqrt{\varepsilon}\int_0^t\int_U\left[b\left(\tau,\xi(\tau),\int_0^\tau\psi(\tau,s,\xi(\tau))\,ds,u\right)-\overline{b}(\xi(\tau),u)\right]P(d\tau,du).$$

Из условия 2 теоремы находим

$$\|R_{11}\|^2\leqslant 2t\varepsilon^2K^2(1+\mu_0^2t)\int_0^t\|x(\tau)-\xi(\tau)\|^2d\tau.$$

Тогда

$$M\{\|R_{11}\|^2\}\leqslant 2t\varepsilon^2K^2(1+\mu_0^2t)\int_0^t\rho(t)\,dt, \tag{5}$$

где $\rho(t)=M\{\|x(t)-\xi(t)\|^2\}$.

Используя оценки моментов [3] и свойства решения уравнения (1), получаем неравенство

$$\|R_{12}\|^2\leqslant\varepsilon^2K^2\mu_0^2t\int_0^t\int_0^\tau\|\xi(s)-\xi(\tau)\|^2dsd\tau.$$

При рассматриваемых условиях [3] для любого t^* $M\{\sup\limits_{t\in[0,t^*/\varepsilon]}\|\xi(t)\|^2\}<\infty$. Поэтому

$$M\{\|R_{12}\|^2\}\leqslant 2\varepsilon^2K\mu_0^2t^3M\sup_{t\in[0,t_0/\varepsilon]}\|\xi(t)\|^2\leqslant\varepsilon^2\mu_0^2K_1^2t^3,\ \text{где } K_1=\mathrm{const}, \tag{6}$$

t_0 — некоторое фиксированное число.

Перейдем теперь к оценке слагаемого R_{13}:

$$R_{13}=\varepsilon\int_0^t\left[a\ (\tau,\xi(\tau)),\int_0^\tau\varphi(\tau,s,\xi(\tau))\,ds-\overline{a}(\xi(\tau))\right]d\tau=$$

$$=\varepsilon\int_0^t[a(\tau,\xi(\tau),\varphi_0(\tau,\xi(\tau)))-\overline{a}(\xi(\tau))]\,d\tau.$$

Из условия теоремы и условия 4 вытекает

$$\|R_{13}\|^2\leqslant 2K_2\varepsilon^2t^2f_1(\varepsilon)(1+\sup_{t\in[0,t_0/\varepsilon]}\|\xi(t)\|^2), \tag{7}$$

где $f_1(\varepsilon)=\gamma_1^2(t/\varepsilon)$. Очевидно, $f_1(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Следует заметить, что неравенство (7) будет выполнено P-почти наверное.

Из (7) имеем

$$M\{\|R_{13}\|^2\}\leqslant K_3\varepsilon^2t^2,\quad K_3=\mathrm{const}. \tag{8}$$

Оценим теперь слагаемое R_2. Так как функция b удовлетворяет условию 2, то из свойств стохастических интегралов по пуассоновской мере [3] легко получить неравенства

$$M\{\|R_{21}\|^2\}\leqslant 2t\varepsilon K^2(1+\mu_0^2t)\int_0^t\rho(\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

$$M\{\|R_{22}\|^2\}\leqslant 2K_1^2\mu_0^2t^2. \tag{10}$$

Если воспользоваться условием 4, выводом неравенства (8) и свойствами стохастических интегралов, для R_{23} получаем

$$M\{\|R_{23}\|^2\}\leqslant\varepsilon t^2f_2(\varepsilon)(1+M\{\sup_{t\in[0,t_0/\varepsilon]}\|\xi(t)\|^2\}),$$

$$f_2(\varepsilon)=\gamma_2^2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\to 0,\quad\varepsilon\to 0.$$

Откуда, повторяя те же рассуждения, что и выше, следует неравенство

$$M\{\|R_{23}\|^2\}\leqslant K_4\varepsilon t^2,\quad K_4=\mathrm{const}. \tag{11}$$

Полученные оценки (5) — (11) позволяют найти оценку для $\rho(t)$:

$$\rho(t) \leqslant 24\varepsilon t K^2 (1+\mu_0^2 t)(1+\varepsilon) \int_0^t \rho(\tau)\, d\tau + 6\varepsilon K_1^2 \mu_0^2 (1+\varepsilon t) t^2 + 24\varepsilon t^2 (K_3 \varepsilon + K_4).$$

Из свойств случайных процессов $x(t)$ и $\xi(t)$ следует, что $\rho(t)$ — неотрицательная и непрерывная функция и поэтому, применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла — Беллмана [6], имеем

$$\rho(t) \leqslant 6 [\varepsilon K_1^2 \mu_0^2 (1+\varepsilon t) t^2 + 4\varepsilon t^2 (K_3 \varepsilon + K_4)] \exp\{24 t \varepsilon K^2 (1+\mu_0^2 t)(1+\varepsilon) t\}.$$

Исходя из последнего соотношения и выбора $\alpha \in]0, 1/2[$, $L > 0$, $L \leqslant t_0$ возьмем $\varepsilon_1 > 0$ таким, что для всех $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1]$

$$\sup_{t \in [0, L\varepsilon^{-\alpha}]} \rho(t) \leqslant \delta,$$

что и требовалось доказать.

1. *Гихман И. И.* Дифференциальные уравнения со случайными функциями // Зим. шк. по теории вероятностей и мат. статистике.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1964.— С. 48—65.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев : Наук. думка, 1982.— 612 с.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев : Наук. думка, 1968.— 354 с.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
5. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.— Ташкент : Фан, 1974.— 216 с.
6. *Стоянов И. М., Байнов Д. Д.* Метод усреднения для одного класса стохастических дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1974.— **26**, № 2.— С. 225—234.
7. *Коломиец В. Г., Мухитдинов Т. М.* О непрерывной зависимости от параметра решений нелинейных систем интегро-дифференциальных стохастических уравнений // II Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике: Тез. докл.— Ч. 1.— Вильнюс: Вильнюс. ун-т, 1977.— С. 200—201.

Получено 23.06.89