УДК 517.5

Б. В. ВИННИЦКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Дрогобыч. пед. ин-т),
В. М. СОРОКИВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

О поведении на действительной оси целых функций, представленных рядами Дирихле

Найдены условия, при которых для целой функции f, представленной рядом Дирихле, с конечным порядком по Ритту на некоторой последовательности (x_k), $0 < x_k \uparrow \infty$, при $k \to \infty$ выполняется $|f(x_k)| = M_f((1 + o(1))x_k)$, $M_f(x) = \sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z \leqslant x\}$

Знайдені умови, за яких для цілої функції f, заданої рядом Діріхле, з скінченним порядком за Ріттом на деякій послідовності (x_k), $0 < x_k \uparrow \infty$, при $k \to \infty$ виконується $|f(x_k)| = M_f((1 + o(1))x_k)$, $M_f(x) = \sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z \leqslant x\}$.

Пусть (λ_n), $0 < \lambda_n \uparrow +\infty$,— фиксированная последовательность, f — целая функция, представленная сходящимся в $\mathbb{C}$ рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \exp(\lambda_n z), \tag{1}$$

$$M_f(x) = \sup\{|f(z)| : \operatorname{Re} z \leqslant x\},\ s(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1/\lambda_n,\ n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1,$$

$$\tau = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, n(t)/t,\ \ \Delta = \underline{\lim_{t\to\infty}}\, s(t)/\ln t,\ \ L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2),$$

$$\delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n \ln \lambda_n} \ln \frac{1}{|L'(\lambda_n)|},\ \ \rho_R = \overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{1}{x} \ln\ln M_f(x).$$

В работах [1—7] обсуждался вопрос о поведении $f(z)$ на действительной оси. В частности, из [6, 7] следует, что если $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant h > 0$ при всех $n \geqslant 2$, то для того чтобы для каждой целой функции вида (1) нашлась последовательность (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, для которой $|f(x_k)| = M_f((1 + o(1))x_k)$ при $k \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $s(t) = O(1)$ при $t \to +\infty$. В случае $\rho_R < \infty$ последнее условие можно ослабить. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\tau < \infty$ и $\delta = 0$. Тогда для того чтобы для каждой целой функции вида* (1), *для которой $\rho_R < \infty$, существовала последовательность (x_k), $0 < x_k \uparrow +\infty$, такая, что $|f(x_k)| = M_f((1 + o(1))x_k)$ при $k \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = 0$.*

Через K, K_1, $K(\varepsilon)$, ..., c_1, c_2, ... обозначаем положительные постоянные.

Лемма 1. *Пусть $\tau < \infty$ и $z = x + iy = re^{i\varphi}$. Тогда для функции*

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \exp(2z/\lambda_n).$$

в области $\mathcal{D} = \{z : \operatorname{Re} z \geqslant 0,\ \ \operatorname{Im} z \neq 0\}$ справедлива оценка

$$|H(z)| \geqslant \exp\left(2xs(r) + c_1\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right| - 12 - 8\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)x\right). \tag{2}$$

Доказательство. Полагая $W_n(z) = \dfrac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z} \exp(2z/\lambda_n)$, имеем

$$\ln|H(z)| \geqslant \ln \prod_{\lambda_n \leqslant r} \left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z}\right| + 2xs(r) - \sum_{\lambda_n > r} |\ln|w_n(z)||. \tag{3}$$

Поскольку $\lambda_n^2 + r^2 \geqslant 2\lambda_n r$, то

$$\left|\frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z}\right|^2 = 1 - \frac{4\lambda_n x}{\lambda_n^2 + r^2 + 2\lambda_n x} \geqslant 1 - \frac{2x}{r + x} = \frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}.$$

Поэтому первое слагаемое в (3) не меньше

$$n(r) \ln \left|\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right|. \tag{4}$$

Далее, заметив, что при $\lambda_n > r$ выполняется

$$1 - \frac{\lambda_n^2}{|\lambda_n + z|^2} = \frac{r^2 + 2\lambda_n r\cos\varphi}{\lambda_n^2 + r^2 + 2\lambda_n r\cos\varphi} \leqslant \frac{r^2 + 2\lambda_n r}{\lambda_n^2} \leqslant \frac{3r}{\lambda_n}.$$

$$\left(\frac{4\lambda_n x}{|\lambda_n + z|^2}\right)^2 \leqslant \frac{16\,\lambda_n^2 x^2}{\lambda_n^4} \leqslant \frac{16\,xr}{\lambda_n^2}, \quad \frac{4\lambda_n x}{|\lambda_n + z|^2} =$$

$$= \frac{4\lambda_n r \cos\varphi}{\lambda_n^2 + r^2 + 2\lambda_n r\cos\varphi} \leqslant \frac{2\cos\varphi}{1+\cos\varphi},$$

при $\lambda_n > r$ будем иметь

$$|\ln|w_n(z)|| = \left|\frac{2x}{\lambda_n} + \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{4x\lambda_n}{|\lambda_n + z|^2}\right)\right| = \left|\frac{2x}{\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda_n^2}{|\lambda_n + z|^2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{4\lambda_n x}{|\lambda_n + z|^2}\right)^k\right| \leqslant \frac{6rx}{\lambda_n^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{4\lambda_n x}{|\lambda_n + z|^2}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{4\lambda_n x}{|\lambda_n + z|^2}\right)^m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6xr}{\lambda_n^2} + \frac{4xr}{\lambda_n^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^m = \frac{xr}{\lambda_n^2}\left(6 + 4\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right). \tag{5}$$

Так как $\tau < \infty$, то найдется $\tau_1 < \infty$ такое, что при всех $t > 0$ имеем $n(t) \leqslant \tau_1 t$. Значит, из (5) получаем

$$\sum_{\lambda_n > r} |\ln|w_n(z)|| \leqslant xr\left(12 + 8\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\right)\int_r^{\infty}\frac{n(t)}{t^3}\,dt \leqslant \tau_1 x\left(12 + 8\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right). \tag{6}$$

Поэтому из (6), (4) и (3) следует (2).

Лемма 2. *Пусть* $\tau < \infty$, $z = x + iy = re^{i\varphi}$. *Тогда найдется последовательность* (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$ *такая, что на полуокружностях* $\rho_R = \{z : |z| = r_k,\ |\arg z| \leqslant \pi/2\}$ *выполняется*

$$|H(z)| \geqslant \exp(2xs(r) - c_1 x). \tag{7}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что оценка (7) справедлива в каждом из углов $-\pi/2 \leqslant \arg z \leqslant -\pi/4$, $\pi/4 \leqslant \arg z \leqslant \pi/2$. Пусть теперь $|\arg z| \leqslant \pi/4$. Очевидно,

$$H(z) = L(z)/l^2(z), \quad l(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{\lambda_n}\right)e^{-z/\lambda_n}. \tag{8}$$

Известно [8, с. 107], что при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$

$$\ln|l(z)| = -xs(r) + O(r). \tag{9}$$

С другой стороны [1, с. 40], найдутся $\sigma > 0$ и последовательность (r_k), $0 < r_k \uparrow +\infty$, такие, что при $|z| = r_k$ имеем $\ln|L(z)| \geqslant -\sigma r$. Отсюда и из (8), (9), учитывая, что $x/\cos\varphi \leqslant \sqrt{2}x$, получаем (7).

Лемма 3. *Пусть* $\tau < \infty$, $\delta = 0$ *и* $\Delta > 0$. *Тогда существует целая функция вида* (1), *для которой* $\rho_R = 1/2\Delta \neq 0$, ∞ *и* $|f(x)| = O(1)$ *при* $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(\lambda_n z)}{(1+\lambda_n)^2 H'(\lambda_n)}. \tag{10}$$

Учитывая (8), имеем $|H'(\lambda_n)| = |L'(\lambda_n)/l^2(\lambda_n)|$. Поэтому из условия $\delta = 0$ и (9) следует, что при $n \to +\infty$

$$\frac{1}{(1+\lambda_n)^2|H'(\lambda_n)|} = \exp(o(\lambda_n\ln\lambda_n) - 2\lambda_n s(\lambda_n)). \tag{11}$$

Так как при $\lambda_n \leqslant t < \lambda_{n+1}$ имеем $s(\lambda_{n+1}) - 1/\lambda_{n+1} = s(t) = s(\lambda_n)$, то $\Delta = \varlimsup_{n\to\infty} (\ln \lambda_n)^{-1} s(\lambda_n)$. Следовательно, из (11) получаем, что ряд (10) сходится в $\mathbb{C}$ абсолютно и, используя формулу [1, с. 176] для нахождения порядка по Ритту, из (11) имеем $\rho_R = 1/2\Delta$. Далее, на основании леммы 2, как и в [6], убеждаемся, что

$$f(x) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} dt}{(1+it)^2 H(it)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Так как $|H(it)| = 1$, то отсюда следует $|f(x)| = O(1)$ при $x \in \mathbb{R}$. Из условия $\tau < \infty$ имеем $\Delta < \infty$ и $\rho_R > 0$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть в ряде* (1) *множество* $\{n : d_n \neq 0\}$ *бесконечно. Тогда* $(\forall \lambda > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0)(\forall x \geqslant x_0) : M_f(x) \exp(\lambda x) \leqslant M_f((1+\varepsilon)x)$.

Действительно, функция $\ln M_f(x)$ выпуклая [1, с. 175], поэтому ее правая производная $\eta(x) = d \ln M_f(x)/dx$ не убывает. Так как f — не квазиполином, то $\ln M_f(x) \to +\infty$ и $\eta(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Следовательно,

$$\ln M_f(x(1+\varepsilon)) - \ln M_f(x) = \int_x^{(1+\varepsilon)x} \eta(t)\, dt \geqslant \eta(x) \varepsilon x \geqslant \lambda x, \quad x \geqslant x_0,$$

и лемма 3 доказана.

Пусть γ — положительная непрерывная и возрастающая на $[0, +\infty[$ функция такая, что $\gamma(n) = \lambda_n$, а $N(x) = [\gamma^{-1}(\exp(\bar{\rho}(x+1)))]$, где $[x]$ — целая часть числа $x > 0$, $\bar{\rho} = \rho_R + \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малое. Положим $h(x) = \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} |d_n| \exp(\lambda_n x)$.

Лемма 5. *Пусть* $\tau < \infty$ и $\rho_R < \infty$. *Тогда* $|h(x)| \leqslant K(\varepsilon) < \infty$ *при всех* $x \in [0 : +\infty[$.

Действительно, используя известную [1, с. 176] формулу, выражающую порядок по Ритту через коэффициенты ряда (1) при $n \geqslant n_0$, имеем $|d_n| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{\bar{\rho}} \lambda_n \ln \lambda_n\right)$. Поэтому

$$|h(x)| \leqslant \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \exp(-\lambda_n((1/\bar{\rho}) \ln \lambda_{N(x)} - x)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=N(x)+1}^{\infty} \exp(-\lambda_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n} < \infty.$$

Лемма 6 [5]. *Для коэффициентов квазиполинома* $Q_n(z) = \sum_{m=1}^{n} d_m e^{\lambda_m z}$ *при* $1 \leqslant m \leqslant n$ *справедлива оценка*

$$|d_m| \leqslant \sqrt{2\lambda_m}\, q_m \left(\int_{-\infty}^{2s(\lambda_n)} |Q_n(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad q_m = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_i + \lambda_m}{\lambda_i - \lambda_m} e^{-2\lambda_m/\lambda_i} \right|.$$

Докажем теорему 1. Необходимость сформулированных условий следует из леммы 3. Доказательство достаточности проводим от противного. Предположим, что для некоторой целой функции f вида (1)

$$(\exists \alpha < 1)(\exists x_0 < \infty)(\forall x \geqslant x_0) : |f(x)| \leqslant M_f(\alpha x). \qquad (12)$$

Очевидно, f не квазиполином. Пусть (t_k), $0 < t_k \uparrow +\infty$, — такая последовательность, что $s(t_k) = o(\ln t_k)$ при $k \to +\infty$, а $x_k = (1/\bar{\rho}) \ln t_k + 2$ и $N = N(x_k)$. Тогда

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{s(\lambda_N)}{x_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \frac{s(\exp(\bar{\rho}(x_k+2)))}{x_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{s(t_k)}{\ln t_k} = 0.$$

Значит,

$$(1-\varepsilon) x_k + 2s(\lambda_N) \leqslant x_k, \quad k \geqslant k_0. \tag{13}$$

Поэтому, применив лемму 6 к квазиполиному $T_N(t) = Q_N((1-\varepsilon)x_k + t)$, при $1 \leqslant m \leqslant N$ получим

$$|d_m| e^{(1-\varepsilon)x_k\lambda_m} \leqslant \sqrt{2\lambda_m} q_m \Big(\int\limits_{-\infty}^{(1-\varepsilon)x_k+2s(\lambda_N)} |Q_N(t)|^2 dt \Big)^{1/2}. \tag{14}$$

Легко проверить, что $q_m = 2e^2 l^2(\lambda_m)/\lambda_m L'(\lambda_m)$. Поэтому, используя (9) и учитывая, что $\delta = 0$, находим

$$\sqrt{2\lambda_m} q_m \leqslant \frac{\exp(-\lambda_m 2s(\lambda_m) + c_1\lambda_m)}{|\lambda_m L'(\lambda_m)|} \leqslant K_1 \exp(\varepsilon\lambda_m \ln\lambda_m).$$

Следовательно, из (12) — (14) и леммы 5 при $k \geqslant k_0$ получаем

$$|d_m| e^{(1-\varepsilon)x_k\lambda_m} \leqslant K_1 e^{\varepsilon\lambda_m \ln\lambda_m} \Big(\int\limits_0^{x_k} |Q_N(t)|^2 dt + c_2 \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant K_1 e^{\varepsilon\lambda_m \ln\lambda_m} \Big(c_2 + \int\limits_0^{x_k} \Big| f(t) - \sum_{k=N+1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k t} \Big|^2 dt \Big)^{1/2} \leqslant K_1 e^{\varepsilon\lambda_m \ln\lambda_m} \times$$

$$\times \Big(c_2 + \int\limits_0^{x_k} (|f(t)|^2 + 2h(x_k)|f(t)| + h^2(x_k))\, dt \Big)^{1/2} \times$$

$$\leqslant K_2 M_f(\alpha x_k) x_k e^{\varepsilon\lambda_m \ln\lambda_m}, \quad 1 \leqslant m \leqslant N. \tag{15}$$

Поэтому, используя лемму 5, имеем

$$M_f((1-(1+2\bar\rho)\varepsilon x_k) \leqslant \sum_{m=1}^{N} d_m e^{(1-\varepsilon)x_k\lambda_m} e^{-2\bar\rho\varepsilon x_k\lambda_m} +$$

$$+ \sum_{m=N+1}^{\infty} |d_m| e^{x_k\lambda_m} \leqslant K_3 N x_k M_f(\alpha x_k) \exp\big(\max_{\lambda_1 \leqslant t \leqslant \lambda_N} (-2\bar\rho\varepsilon x_k t + \varepsilon t \ln t)\big) + K_4. \tag{16}$$

Последний максимум ограничен и достигается на одном из концов отрезка $[\lambda_1, \lambda_N]$, ибо соответствующая стационарная точка этому отрезку не принадлежит. Кроме того, поскольку $\tau < \infty$, то $N \leqslant c_3\lambda_N \leqslant c_3 \exp(\bar\rho x_k)$. Следовательно, используя лемму 3, из (16) получаем $M_f((1-(1+2\bar\rho)\varepsilon) x_k) \leqslant M_f((1+\varepsilon)\alpha x_k)$, $k \geqslant k_0$. Так как $\alpha < 1$, а $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым, то приходим к противоречию. Теорема 1 доказана.

Заметим, что если $\lambda_n - \lambda_{n-1} \geqslant h > 0$ при $n \geqslant 1$, то [1] $\tau < \infty$ и $\delta = 0$.

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с.
2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
3. *Шеремета М. Н.* О росте на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Мат. заметки.— 1983.— 33.— № 2. — С. 235—245.
4. *Винницкий Б. В., Сорокивский В. М.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле.— Дрогобыч Дрогобыч. пед. ин-т, 1981.— 23 с.
5. *Сорокивский В. М.* Поведение на действительной оси целой функции медленного роста, заданной рядом Дирихле // Изв. вузов. Математика.—1987.— № 8.— С. 60—65.
6. *Шеремета М. Н.* Теоремы единственности для целых рядов Дирихле//Там же.— № 7.— С. 64—72.
7. *Винницкий Б. В., Сорокивский В. М.* О поведении на действительной оси целой функции, представленной рядом Дирихле // Там же.— 1989.— № 12.— С. 57—58.
8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.

Получено 29.06.90