УДК 517.574

А. Ю. РАШКОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук,
Л. И. РОНКИН, д-р физ.-мат. наук (Физ.-техн. ин-т низ. температур, Харьков)

Предельные множества субгармонических функций и ассоциированных с ними мер в конусе

Изучается связь между асимптотическим поведением субгармонической функции конечного порядка в конусе и распределением ассоциированной с ней меры.

Вивчається зв'язок між асимптотичною поведінкою субгармонічної функції скінченного порядку в конусі і розподілом асоційованої з нею міри.

Введенное В. С. Азариным понятие предельного множества субгармонической функции конечного порядка в $\mathbb{R}^n$ [1, 2] является весьма действенным средством исследования асимптотических свойств субгармонических функций (в $\mathbb{R}^n$) и целых функций (в $\mathbb{C}$). Введение и изучение подобных множеств для функций в областях, отличных от всего пространства, наталкивается на существенные трудности, обусловленные, в частности, «эффектом границы». Некоторые результаты в этом направлении содержатся в [3], где рассматриваются функции, голоморфные в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. В настоящей статье соответствующая теория строится для функций, субгармонических в конусе. Это построение основывается на предшествующих работах авторов [4—8], в которых рассмотрен ряд общих вопросов теории субгармонических функций в конусе и специальный вопрос о «вполне регулярности роста»* таких функций. Заметим, что изучение вполне регулярности роста связано с изучением некоторых пределов, в которых переменная $t \to \infty$, пробегая луч $\mathbb{R}_+$, а изучение предельных множеств связано с изучением тех же пределов, но при $t \to \infty$ по последовательности. Поэтому доказательства некоторых результатов статьи либо повторяют доказательства соответствующих утверждений о функциях вполне регулярного роста, либо весьма близки к ним. Такие доказательства здесь опускаются или приводятся в конспективном виде.

1. **Предварительные сведения и основные определения.** Пусть Γ — область на сфере $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, не совпадающая с S_1 и имеющая дважды гладкую границу. Обозначим через Δ^* сферическую часть оператора Лапласа Δ и рассмотрим на Γ краевую задачу $\Delta^*\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi|_{\partial\Gamma} = 0$. Через λ_j, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots$, обозначим собственные числа этой задачи, а через φ_j соответствующие им функции из полной ортонормированной системы собственных функций. Всюду далее область Γ предполагается такой, что $\varphi_j \in C^2(\overline{\Gamma})$, $\forall j$. Будем считать, что производная $\partial\varphi/\partial n$ по внутренней нормали к $\partial\Gamma$ положительна.

Положим $K = K^\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ty,\ y \in \Gamma,\ t > 0\}$ и продолжим каждую функцию φ_j с множества $\overline{\Gamma}$ на конус $\overline{K}$ равенством $\varphi_j(x) = \varphi_j(x/|x|)$. Положим также $\varkappa_j^{\pm} = \frac{1}{2}(-n + 2 \pm \sqrt{(n-2)^2 + 4\lambda_j})$, $\varkappa_0^+ = 0$, $\varkappa_0^- = -n + 2$, $\alpha_n = \varkappa_n^+ - \varkappa_n^-$. Для краткости всюду далее вместо φ_1 и $\varkappa_1^{\pm}$ будем писать, соответственно, φ и $\varkappa^{\pm}$.

Обозначим $\|f(x)\|_\infty = \sup\limits_x |f(x)|$, $f^+ = \max\{0, f\}$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $S_R = \partial B_R$, $B_{\lambda,R} = B_R \setminus \overline{B}_\lambda$, $B_{0,R} = B_R \setminus \{0\}$, $(E)_{\lambda,R} = E \cap B_{\lambda,R}$, $K_R = K \cap B_R$, $\Gamma_R = K \cap S_R$; $d\sigma$ и dS_R — элементы $(n-1)$-мерного объема на ∂K и S_R соответственно, $d\omega$ — элемент объема в $\mathbb{R}^n$. Через $c_j(\ldots, \ldots, \ldots)$, $d_j(\ldots, \ldots, \ldots)$, $A_j(\ldots)$, $j = 1, 2, \ldots$, будем обозначать постоянные, зависящие лишь от параметров, указанных в скобках. Нумерация постоянных различна на каждом этапе изложения.

Основным объектом исследования в данной статье являются субгармонические функции в конусе $K \neq \mathbb{R}^n$ не более чем нормального типа при конечном положительном порядке ρ. Последнее означает для рассматриваемой функции $u(x)$ следующие условия:

$$\sup\{u(x) : x \in K_R\} < \infty, \quad \forall R > 0, \tag{1}$$

$$\sigma(M_u) < \infty, \tag{2}$$

$$\sigma(\Phi_u) < \infty, \tag{3}$$

где

$$M_u = \sup\{u^+(x) : x \in \Gamma_R\},$$

$$\Phi_u = R^{-n+1} \int\limits_{\Gamma_R} |u(x)|\,\varphi(x)\,dS_R, \quad \sigma(f) = \varlimsup_{t\to\infty} t^{-\rho} f(t).$$

Класс таких функций обозначим через $SH(K, \rho]$. Отметим, что класс $SH(\mathbb{R}^n, \rho]$ определяется выполнением только условия (2).

---

* О функциях вполне регулярного роста с $\mathbb{C}_+$ см. [9]; в пространстве $\mathbb{R}^n$ — [10—12], в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ — [13, 14].

Через $D'(G)$, где G — область в $\mathbb{R}^n$, как обычно, обозначается пространство обобщенных функций в G. Соответствующее основное пространство обозначается через $D(G)$ или $C_0^\infty(G)$. Говоря о сходимости элементов того или иного топологического пространства F, для краткости будем говорить об F-сходимости, F-пределах и т. п.

С каждой функцией $u \in SH(K, \rho]$ свяжем семейство функций

$$T_t u = u^{[t]} = t^{-\rho} u(tx), \quad t > 0.$$

Из определения класса $SH(K, \rho]$ следует, что $u^{[t]} \in SH(K, \rho]$, $\forall t > 1$, это семейство $D'(K)$-компактно и, в частности, из каждой последовательности $u^{[t_j]}$, $t_j \to \infty$, можно выбрать $D'(K)$-сходящуюся подпоследовательность. Очевидно, что соответствующий $D'(K)$-предел можно считать субгармонической функцией. Множество всех таких функций (пределов) по аналогии со случаем $K = \mathbb{R}^n$ [1, 2] будем называть предельным множеством рассматриваемой функции $u \in SH(K, \rho]$; обозначать это множество будем через $\mathrm{Fr}\, u$.

Из известных свойств субгармонических функций следует, что $D'(K)$ сходимость последовательности $u^{[t_j]}$ эквивалентна ее $L^1_{\mathrm{loc}}(K)$-сходимости. Нетрудно видеть также, что справедливо и более сильное утверждение.

Предложение 1. *Пусть* $u \in SH(K, \rho]$ *и существует* $D'(K)$ — $\lim u^{[t_j]} = v$. *Тогда при произвольно фиксированных* λ *и* R, $0 < \lambda < R < \infty$,

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{(\dot K)_{\lambda/t_j, R}} u^{[t_j]} \psi d\tilde\omega = \int\limits_{\dot K_R} v d\tilde\omega, \quad \forall \psi \in C(\bar K_R),$$

где $d\tilde\omega = |x|^{-2} d\omega$.

Доказательство. Обозначим $\Lambda^\delta_{\lambda,R} = \{x \in (K)_{\lambda,R} : \varphi(x) < \delta\}$ и возьмем какие-либо неотрицательные функции $\chi_j \in C(\bar K_R)$ такие, что $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 \equiv 1$ и при заданных $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ $\mathrm{supp}\, \chi_1 \subset \bar K_\alpha$, $\mathrm{supp}\, \chi_2 \subset \Delta^\delta_{\alpha/2,R}$, $\mathrm{supp}\, \chi_3 \subset (K)_{\alpha/2,R} \setminus \Delta^{\delta/2}_{\alpha/2,R}$. Тогда

$$\Big| \int\limits_{(\dot K)_{\lambda/t_j,R}} u^{[t_j]} \psi d\tilde\omega - \int\limits_{\dot K_R} v\psi\, d\tilde\omega \Big| \leqslant \Big| \int\limits_{(\dot K)_{\lambda/t_j,R}} \chi_3 (u^{[t_j]} - v) \psi d\tilde\omega \Big| +$$

$$+ \int\limits_{\dot K_R} |v|\,|\psi|(\chi_1 + \chi_2)\, d\tilde\omega + \int\limits_{(\dot K)_{\lambda/t_j,R}} |u^{[t_j]}|\,|\psi|(\chi_1 + \chi_2)\, d\tilde\omega .$$

Согласно условию первое слагаемое справа при $t_j \to \infty$ стремится к нулю. Остальные два слагаемых могут быть сколь угодно малыми равномерно относительно t_j за счет выбора чисел α и δ. Это вытекает из следующих доказанных в [5] оценок для функций рассматриваемого класса:

$$\int\limits_{(K)_{r,R}} \varphi |u|\, d\tilde\omega \leqslant c_1 (R - r) R^{\rho+n-3}, \quad 0 < \lambda < r < R, \quad c_1 = c_1(u, \lambda), \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Lambda^\delta_{\lambda,R}} |u|\, d\tilde\omega \leqslant \delta c_2 R^{\rho+n-2}, \quad 0 < \lambda < R, \quad \delta < \delta_0, \quad c_2 = c_2(u, \delta_0, \lambda). \tag{5}$$

Предложение 1 доказано.

Подытоживая сказанное, заключаем, что все три типа сходимости (в $D'(K)$, в $L^1_{\mathrm{loc}}(K)$ и указанная в предложении 1 специальная слабая сходимость) эквивалентны и, значит, предельные множества относительно указанных сходимостей совпадают.

Как и для субгармонических функций во всем пространстве, множество $\mathrm{Fr}\, u$, $u \in SH(K, \rho]$ обладает следующими свойствами.

1) Множество $\mathrm{Fr}\, u$, рассматриваемое как подмножество в $D'(K)$, связно.

2) Множество $\mathrm{Fr}\, u$ инвариантно относительно любого преобразования $T_t : v \mapsto v^{[t]}$, $t > 0$.

3) Для любой функции $v \in \mathrm{Fr}\, u$ выполняется неравенство

$$v(x) \leqslant \sigma(M_u)\,|x|^\rho, \quad \forall x \in K.$$

4) Множество $\mathrm{Fr}\, u$ компактно в $D'(K)$ (а следовательно, и в $L^1_{\mathrm{loc}}(K)$).

Доказательства этих свойств почти не отличаются от доказательств соответствующих утверждений для функций, субгармонических во всем пространстве, и мы их опускаем. Отметим лишь, что при доказательстве свойства 4 вместо равенства $v(0)=0$, справедливого для любой функции v из $\mathrm{Fr}U$, где $U \in SH(\mathbb{R}^n, \rho]$, используется следующее свойство функций $v \in \mathrm{Fr}u$ при $u \in SH(K, \rho]$.

5) Существуют такие постоянные $c_1 = c_1(u)$ и $c_2 = c_2(u, \delta_0)$, что для любой функции $v \in \mathrm{Fr}u$

$$\int\limits_{(K)'_{r,R}} \varphi\,|v|\,d\widetilde{\omega} \leqslant c_1 R^{\rho+n-1}(R-r), \quad 0 < r < R, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\Delta^{\delta}_{0,R}} |v|\,d\widetilde{\omega} \leqslant \delta c_2 R^{\rho+n}, \;\; R > 0, \quad \delta < \delta_0. \tag{7}$$

Эти неравенства легко следуют, соответственно, из неравенств (4) и (5).

Отметим еще одно свойство $\mathrm{Fr}u$, вытекающее из (6) и результатов статьи [7].

6) Существует такая константа $c = c(u)$, что для любой функции $v \in \mathrm{Fr}u$

$$\int\limits_{\Gamma} |v(Rx)|\,\varphi(x)\,dS_1 \leqslant cR^\rho, \quad \forall R > 0. \tag{8}$$

Класс функций $v(x)$, субгармонических в конусе K и удовлетворяющих условию (8) и условию

$$v(x) \leqslant a\,|x|^\rho, \quad \forall x \in K,$$

обозначим через $SH(K, \rho, a, c)$.

Из свойств 3 и 6 вытекает свойство

7) $\mathrm{Fr}\, u \subset SH(K, \rho, \sigma(M_u), c) \subset SH(K, \rho]$.

Наряду с предельными множествами функций в [1, 2] рассматриваются предельные множества положительных мер в $\mathbb{R}^n$. В рассматриваемом случае (при изучении функций в конусе) возникают некоторые классы мер, отличные от фигурирующих в [1, 2].

Пусть τ — вещественнозначная мера. Как обычно, через τ^+, τ^- и $|\tau|$ обозначаются, соответственно, положительная и отрицательная части меры τ и ее вариация. Таким образом, $\tau = \tau^+ - \tau^-$, $|\tau| = \tau^+ + \tau^-$.

Обозначим через $\mathfrak{T}(K, \rho)$, $\rho > 0$, совокупность всех вещественнозначных мер τ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющих условиям

1) $\mathrm{supp}\,\tau \subset \overline{K} \setminus \{0\}$;

2) мера $\tau_1 = \tau|_K$ положительна;

3) для меры $\tau_2 = \tau|_{\partial K}$ при некоторых $a > 0$, $b \geqslant 0$ на $\partial K \setminus \{0\}$ выполняется оценка

$$d\tau_2(x) \geqslant -\frac{\partial\varphi}{\partial n}(a\,|x|^\rho + b)\,d\sigma(x); \tag{9}$$

4) существует такая константа $A > 0$, что

$$|\tau|((\overline{K})_{1,R}) \leqslant AR^{\rho+n-2}, \quad \forall R > 1; \tag{10}$$

5) существует такая константа $B>0$, что

$$|\tau|((\overline{K})_{r,1}) \leqslant Br^{-\varkappa^+}, \quad \forall r<1; \tag{11}$$

6) если $\rho \in \{\varkappa_i^+\}_{i=1}^{\infty}$, то величина

$$\delta_\tau^\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{R>\lambda} \max_{i:\varkappa_i^+=\rho} \left| \int\limits_{(\overline{K})_{\lambda,R}} \frac{\omega_i(x)}{\varphi(x)} |x|^{\varkappa_i^-} d\tau(x) \right|$$

конечна при любом $\lambda>0$.

По мере $\tau \in \mathfrak{I}(K, \rho)$ построим меру $\tau^{[t]}$, $t>1$, полагая $\tau^{[t]}(E) = t^{-\rho-n+2} \times \times \tau(tE)$ для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Очевидно, $\tau^{[t]} \in \in \mathfrak{I}(K, \rho)$, $\forall t>1$. Кроме того, величины $|\tau^{[t]}|((\overline{K})_{\lambda,R})$ при любых λ и R, $0<\lambda<R<\infty$, равномерно ограничены по $t>1$. Следовательно, семейство мер $\{\tau^{[t]}\}_{t>1}$ слабо компактно в следующем смысле: из любой последовательности $\tau^{[t_j]}$, $t_j \to \infty$, можно выбрать подпоследовательность $\tau^{[t_{j'}]}$ такую, что

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi d\tau^{[t_{j'}]} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi d\nu, \quad \forall \psi \in C(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{supp} \psi \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{12}$$

где ν — некоторая мера из $\mathfrak{I}(K, \rho)$.

Множество всех таких мер ν, т. е. мер, являющихся в указанном смысле частичными пределами всевозможных последовательностей $\tau^{[t_j]}$, $t_j \to \infty$, будем называть предельным множеством меры τ и обозначать через $\operatorname{Fr} \tau$. Заметим, что в рассматриваемом случае можно говорить о сходимости более сильной, чем сходимость (12).

Предложение 2. *Из сходимости* (12) *мер* $\tau^{[t_{j'}]}$ *к мере* ν *следует, что для любого* $\lambda>0$ *и любого* $R>\lambda$ *со свойством* $|\nu|(\overline{\Gamma}_R)=0$

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{(\overline{K})_{\lambda/t_{j'},R}} \psi d\tau^{[t_{j'}]} = \int\limits_{\overline{K}_R \setminus \{0\}} \psi\, d\nu, \quad \forall \psi \in C(\overline{K}_R). \tag{13}$$

Доказательство этого утверждения опирается на оценку (11) и близко к доказательству предложения 1. Поэтому мы его опускаем, отметив лишь, что попутно устанавливается неравенство

$$|\nu|(\overline{K}_R \setminus \{0\}) < AR^{\rho+n-2}, \quad R>0, \quad \nu \in \operatorname{Fr} \tau, \quad A = A(\tau). \tag{14}$$

Предложение 2 показывает, что сходимость мер $\tau^{[t_j]}$ на пространстве непрерывных финитных в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функций эквивалентна их сходимости на пространстве $C(\overline{K}_R)$ для почти всех $R>0$.

Отметим следующие свойства $\operatorname{Fr} \tau$, аналогичные свойствам предельных множеств положительных мер в $\mathbb{R}^n$ [1, 2].

1) Множество $\operatorname{Fr} \tau$ инвариантно относительно преобразования $T_t: \nu \mapsto \mapsto \nu^{[t]}$, $\forall t>0$.

2) Множество $\operatorname{Fr} \tau$, рассматриваемое как подмножество в $D'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, связно.

Следующее свойство вытекает из неравенства (14).

3) Множество $\operatorname{Fr} \tau$ слабо компактно.

Отметим два свойства (из которых первое очевидно), относящиеся к сужениям меры $\nu \in \operatorname{Fr} \tau$ на K и ∂K.

4) Сужение ν_1 меры $\nu \in \operatorname{Fr} \tau$ на K является положительной мерой.

5) Сужение ν_2 меры $\nu \in \operatorname{Fr} \tau$ на ∂K удовлетворяет условию

$$d\nu_2(x) \geqslant -a|x|^\rho \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} d\sigma(x). \tag{15}$$

Для доказательства этой оценки предположим противное. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ на $\partial K \setminus \{0\}$ существует такое ограниченное открытое (в индуцированной топологии) множество E и такое его подмножество E_1, что $E_1 \subset\subset E$ и

$$\int_E \left[d\nu_2 + a|x|^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \right] \leqslant \int_{E_1} \left[d\nu_2 + a|x|^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma \right] < -\varepsilon.$$

В силу оценки (14) можно выбрать в $\mathbb{R}^n$ такую окрестность U множества E, что $U \cap \partial K = E$ и $\nu_1(U \cap K) < \varepsilon/3$. Возьмем далее какую-либо функцию $\psi \in C(\mathbb{R}^n)$ такую, что 1) $\operatorname{supp} \psi \subset U$; 2) $0 \leqslant \psi \leqslant 1$; 3) $\psi|_{E_1} \equiv 1$, и предположим, что последовательность $\tau^{[t_j]}$ согласно определению принадлежности ν к $\operatorname{Fr} \tau$ слабо сходится к ν. Тогда для всех достаточно больших j

$$\int_{U \cap \overline{K}} \psi [d\tau^{[t_j]} - d\nu] < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\int_{U \cap \overline{K}} \psi [d\tau^{[t_j]} - d\nu] > \int_E \left[d\tau_2^{[t_j]} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} a|x|^\rho d\sigma \right] -$$

$$- \int_{E_1} \psi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} a|x|^\rho d\sigma + d\nu_2 \right] - \int_{U \cap K} \psi d\nu_1.$$

Из (9) следует, что для всех достаточно больших j

$$\int_E \left[d\tau_2^{[t_j]} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} a|x|^\rho d\sigma \right] \geqslant -bt_j^\rho \int_E \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

Учитывая это, а также выбор множеств E и E_1, получаем

$$\int_{U \cap \overline{K}} \psi [d\tau^{[t_j]} - d\nu] > \frac{\varepsilon}{3},$$

что противоречит неравенству (16). Тем самым неравенство (15) доказано.

Обозначим через $\mathfrak{T}(K, \rho, a, A)$ множество всех мер $\nu \in \mathfrak{T}(K, \rho)$ и удовлетворяющих оценкам (14) и (15). Из доказанного выше следует, что имеет место свойство

6) $\operatorname{Fr} \tau \subset \mathfrak{T}(K, \rho, a, A)$.

Непосредственно проверяется также следующее свойство.

7) Если $\rho \in \{\varkappa_j^+\}_{j=1}^\infty$, то для любой меры $\nu \in \operatorname{Fr} \tau$ выполняется неравенство $\delta_\nu^0 \leqslant \delta_\tau^\lambda$, $\forall \lambda > 0$.

Множество мер $\nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, a, A)$, где $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$, удовлетворяющих условию $\delta_\nu^0 \leqslant \delta$, где $\delta > 0$, обозначим через $\mathfrak{T}(K, \rho, a, A, \delta)$. Тогда свойство 7 запишется следующим образом.

7′) При $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$ справедливо включение $\operatorname{Fr} \tau \subset \mathfrak{T}(K, \rho, a, A, \delta_\tau)$, где $\delta_\tau = \inf_{\lambda > 0} \delta_\tau^\lambda$.

8) Если мера $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$ при $\rho \in \{\varkappa_j^-\}$ такова, что

$$\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}(t) < \infty, \quad \text{где } \tilde{\tau}(t) = |\tau|((\overline{K})_{1,t}),$$

то $\operatorname{Fr} \tau = \{0\}$.

Действительно, пусть $\nu \in \operatorname{Fr} \tau$, а число $N > 0$ таково, что $|\nu|(\overline{\Gamma}_N) = 0$. Пусть, далее, $\gamma \in C((\overline{K})_{\varepsilon,N})$, $0 < \varepsilon < N$. Тогда при произвольном $\lambda > 0$ и последовательности t_j, взятой из определения ν как меры из $\operatorname{Fr}\tau$, имеем

$$\Big|\int\limits_{(\overline{K})_{\varepsilon,N}} |x|^{-\rho-n+2}\gamma(x)\,d\nu(x)\Big| = \lim_{j\to\infty}\Big|\int\limits_{(\overline{K})_{\varepsilon,N}} |x|^{-\rho-n+2}\gamma(x)\,d\tau^{[t_j]}\Big| =$$

$$= \lim_{j\to\infty}\Big|\int\limits_{(\overline{K})_{\varepsilon t_j, Nt_j}} |x|^{-\rho-n+2}\gamma(x/t_j)\,d\tau\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \|\gamma\|_\infty \varlimsup_{j\to\infty}\int\limits_{(\overline{K})_{\varepsilon t_j, Nt_j}} |x|^{-\rho-n+2}\,d|\tau| \leqslant \int\limits_{\lambda}^{\infty} t^{-\rho-n+2}\,d\widetilde{\tau}(t).$$

Устремляя λ к $+\infty$, получаем отсюда

$$\int\limits_{(\overline{K})_{\varepsilon,N}} |x|^{-\rho-n+2}\gamma(x)\,d\nu(x) = 0, \quad \forall\gamma\in C((\overline{K})_{\varepsilon,N}),$$

откуда в свою очередь следует $\nu|_{(\overline{K})_{\varepsilon,N}} = 0$, $\forall\varepsilon$, N, и следовательно, $\nu\equiv 0$.

2. Связь между классами функций и мер. Операторы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Обозначим через μ_u, где $u(x)$ — субгармоническая функция в K, меру, ассоциированную по Рису функции $u(x)$. Таким образом, как элемент пространства $D'(K)$ мера $\mu_u = \frac{1}{\theta_n}\Delta u$, где Δ — оператор Лапласа, а $\theta_n = (n-2)\int\limits_{S_1} dS_1$ при $n>2$ и $\theta_2 = 2\pi$. Далее, через $\mu_{u,\partial}$ обозначим меру (заряд) на $\partial K\setminus\{0\}$, являющуюся локально слабым предельным значением функции $u(x)$. На открытых (в $\partial K\setminus\{0\}$) множествах $E\subset\partial K\setminus\{0\}$ таких, что $\{E+hx^0\}\subset K$ при некотором $x^0\in\mathbb{R}^n$ и всех достаточно малых $h>0$, эта мера определяется равенством

$$\lim_{h\to+0}\int\limits_E \psi(x)\,u(x+hx^0)\,d\sigma = \int\limits_E \psi(x)\,d\mu_{u,\partial}, \quad \forall\psi\in C(E), \quad \operatorname{supp}\psi\subset E. \tag{17}$$

В [4, 5] доказано, что для рассматриваемых нами конусов предел в (17) существует и однозначно определяет меру $\mu_{u,\partial}$ для любой функции $u(x)$, субгармонической в конусе K и ограниченной сверху на всех его ограниченных подмножествах.

Как и в [4, 5], для функции $u\in SH(K,\rho]$ меры μ_u и $\mu_{u,\partial}$ можно «объединить» в одну меру τ_u. Именно, положим на борелевских множествах $E\subset\subset\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$

$$\tau_u(E) = \int\limits_{E\cap K}\varphi\,d\mu_u - \frac{1}{\theta_m}\int\limits_{E\cap\partial K}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\mu_{u,\partial}.$$

Тем самым мера τ_u определена как вещественная мера в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ с носителем (замкнутым относительно $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$) на $\overline{K}\setminus\{0\}$. Отображение, ставящее в соответствие функции $u\in SH(K,\rho]$ меру τ_u, обозначим через $\mathfrak{A}$. Из результатов статей [4, 5, 7, 8] следует, что $\tau_u\in\mathfrak{T}(K,\rho)$, $\forall u\in SH(K,\rho]$, т. е. $\mathfrak{A}(SH(K,\rho])\subset\mathfrak{T}(K,\rho)$. Это включение может быть уточнено. Именно, как следует из [8] (теоремы 2 и 3), если $u\in SH(K,\rho,a,A)$, то $\mathfrak{A}u\in\mathfrak{T}(K,\rho,a,A_1)$ с $A_1 = c(\rho)\max(a,A)$, а при $\rho\in\{\varkappa_j^+\}$ дополнительно $\mathfrak{A}u\in\mathfrak{T}(K,\rho,a,A_1,\delta)$ с $\delta = c(\rho)\max(a,A)$.

Построим теперь некоторое специальное отображение $\mathfrak{T}(K,\rho)\to SH(K,\rho]$, поставив в соответствие мере ее так называемый канонический потенциал.

Для произвольного $p\in\mathbb{N}$ положим

$$G_p(x,y) = -G(x,y) + \theta_n\sum_{1\leqslant j\leqslant p}\frac{1}{\alpha_j}|x|^{\varkappa_j^+}|y|^{\varkappa_j^-}\varphi_j(x)\varphi_j(y),$$

$$x\in K, \quad y\in\overline{K}\setminus\{0\},$$

где $G(x, y)$ — функция Грина конуса K, $\alpha_j = \varkappa_j^+ - \varkappa_j^-$. Положим также $G_0(x, y) = -G(x, y)$. Следуя [6], введем в рассмотрение ядро

$$W_p(x, y) = \begin{cases} G_p(x, y)/\varphi(y), & x, y \in K, \\ \dfrac{\partial G_p(x, y)}{\partial n_y} \Big/ \dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial n}, & x \in K, \quad y \in \partial K \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Отметим, что функция W_p непрерывна по $x \in K$, $y \in \overline{K} \setminus \{0\}$, $x \neq y$.

Пусть $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$, p — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию

$$\int^{\infty} t^{\varkappa_{p+1}^-} d\tilde{\tau}(t) < \infty.$$

Как показано в [8] (теорема 1), функция $v_\tau^\lambda(x)$ (канонический потенциал), определенная равенством

$$v_\tau^\lambda(x) = \int\limits_{(\overline{K})_{\lambda,\infty}} W_p(x, y)\, d\tau(y), \quad \lambda > 0,$$

при всех $\lambda > 0$ принадлежит классу $SH(K, \rho]$. Поэтому отображение $\mathfrak{B}_\lambda$, ставящее в соответствие мере τ ее канонический потенциал v_τ^λ, определено на всем классе $\mathfrak{T}(K, \rho)$ и переводит его в класс $SH(K, \rho]$.

Исследуем теперь действие отображения $\mathfrak{B}_\lambda$ на меры $\nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, a, A)$. Из определения числа p ясно, что $\varkappa_p^+ \leqslant \rho \leqslant \varkappa_{p+1}^+$. При $\varkappa_p^+ < \rho < \varkappa_{p+1}^+$ из доказательства теоремы 1 статьи [8] видно, что $\mathfrak{B}_\lambda \nu \subset SH(K, \rho, A_1, A_1)$, где $A_1 = c(\rho, p)(a + A)$, при всех $\lambda > 0$, и более того, это верно также и при $\lambda = 0$. Таким образом, при $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$ $\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{T}(K, \rho, a, A)) \subset SH(K, \rho, A_1, A_1)$, $\forall \lambda \geqslant 0$. Пусть теперь $\rho = \varkappa_{p+1}^+$. В этом случае величина

$$\gamma_\nu^\lambda \overset{\text{def}}{=} \int\limits_\lambda^\infty t^{\varkappa_{p+1}^-} d\tilde{\nu}(t)$$

конечна для любого $\lambda > 0$ и из доказательства упомянутой выше теоремы 1 следует также, что $\mathfrak{B}_\lambda \nu \in SH(K, \rho, D_\lambda, D_\lambda)$ при $D_\lambda = c(p)(a + A + \gamma_\nu^\lambda)$, $\lambda > 0$. Если же $\gamma_\nu^0 < \infty$, то это же соотношение выполняется и при $\lambda = 0$.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда

$$\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+, \quad \nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, a, A, \delta).$$

Так же, как и в предыдущих случаях, устанавливается, что

$$\mathfrak{B}_\lambda \nu \in SH(K, \rho, A_2, A_2), \quad A_2 = c(p)(A + a + \delta), \quad \lambda > 0.$$

В то же время, поскольку в рассматриваемом случае интеграл $\int\limits_{\overline{K} \setminus \{0\}} W_p(x, y)\, d\nu(y)$ существует, вообще говоря, лишь в смысле главного значения, то отображение $\mathfrak{B}_0$ не рассматриваем. Введем в рассмотрение отображение $\mathfrak{L}_\lambda$, определенное на классе $\mathfrak{T}(K, \varkappa_p^+, a, A, \delta)$ уже при произвольном $\lambda \geqslant 0$ посредством равенства

$$\mathfrak{L}_\lambda \nu = \int\limits_{\overline{K}_\lambda \setminus \{0\}} W_{q-1}(x, y)\, d\nu(y).$$

Фигурирующий здесь интеграл является абсолютно сходящимся для почти всех $x \in K$. С помощью оценок ядра W_{q-1}, содержащихся в [6, 8], несложно показать, что

$$(\mathfrak{L}_\lambda \nu)(x) \leqslant c_1(p)(a + A)\,|x|^{\varkappa_p^+}, \quad \forall x \in (K)_{\lambda,\infty} \tag{18}$$

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathfrak{L}_\lambda \nu)(Rx)\, \varphi(x)\, dS_1 \leqslant c_2(p)(a + A)\, R^{\varkappa_p^+}, \quad \forall R > 1. \tag{19}$$

Далее, при $|x| \leqslant \lambda$ имеем

$$(\mathfrak{L}_\lambda \nu)(x) = \int\limits_{\overline{K}_{|x|} \setminus \{0\}} W_{q-1}(x, y)\, d\nu(y) + \int\limits_{(\overline{K})_{|x|,\lambda}} W_p(x, y)\, d\nu(y) -$$

$$- 0_n |x|^{\varkappa_p^+} \sum_{q \leqslant j \leqslant p} \frac{\varphi_j(x)}{\alpha_j} \int\limits_{(\overline{K})_{|x|,\lambda}} |y|^{\varkappa_p^-} \frac{\varphi_j(y)}{\varphi(y)}\, d\nu(y) \leqslant c_1(p)(a + A + \delta)|x|^{\varkappa_p^+}. \tag{20}$$

Отсюда стандартным образом выводится оценка

$$\int\limits_{\Gamma} (\mathfrak{L}_\lambda \nu)(Rx)\, \varphi(x)\, dS_1 \leqslant c_2(p)(a + A + \delta) R^{\varkappa_p^+} \quad \forall R \geqslant \lambda. \tag{21}$$

Из неравенств (18)—(21) следует, что $\mathfrak{L}_\lambda \nu \in SH(K, \rho, A_1, A_1)$ с $A_1 = c(p)(a + A + \delta)$.

Введенные выше отображения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_\lambda$ в некотором смысле являются взаимно обратными. В силу известных свойств канонического потенциала [6, 8] выполняются следующие соотношения:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_\lambda \tau)(E) = \tau(E \setminus \overline{K}_\lambda), \quad \forall E \subset \overline{K} \setminus \{0\}, \quad \lambda > 0, \quad \tau \in \mathfrak{T}(K, \rho);$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}_0 \nu = \nu, \quad \forall \nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, a, A), \quad \rho \notin \{\varkappa_j^+\}_{j=1}^\infty;$$

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda)\nu = \nu, \quad \forall \nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, a, A, \delta), \quad \lambda > 0, \quad \rho \in \{\varkappa_j^+\}. \tag{22}$$

С другой стороны, согласно установленному в [6, 8] интегральному представлению для любой функции $u \in SH(K, \rho]$ имеем

$$u = \mathfrak{B}_\lambda \mathfrak{A} u + P_\lambda + H_\lambda, \tag{23}$$

где $P_\lambda(x) = \sum\limits_{j: \varkappa_j^+ \leqslant \rho} d_j(\lambda)|x|^{\varkappa_j^+} \varphi_j(x)$, а функция H_λ субгармонична в K, гармонична в $K_{\lambda,\infty}$, равна нулю на $(\partial K)_{\lambda,\infty}$ (т. е. $\operatorname{supp} H_\lambda \subset \overline{K}_\lambda$), и оценивается в $(K)_{\lambda,\infty}$ следующим образом:

$$|H_\lambda(x)| \leqslant c(\lambda)|x|^{\varkappa^-}.$$

Представление (23) в случае функций $u \in SH(K, \rho, a, A)$ может быть уточнено. Для этого понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функция $h \in SH(K, \rho, a, A)$ непрерывна в $\overline{K}$, гармонична в K и равна нулю на ∂K. Тогда $h \equiv 0$, если*

$$\rho \notin \{\varkappa_j^+\}_{j=1}^\infty, \quad h(x) = \sum_{q \leqslant j \leqslant p} d_j |x|^{\varkappa_j^+} \varphi_j(x),$$

если $$\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+.$$

Доказательство. Применяя формулу Грина в области K_r к функциям $h(x)$ и $|x|^{\varkappa_j^+} \varphi_j(x)$, получаем

$$r \int\limits_{\dot{\Gamma}_r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi_j dS_r - \varkappa_j^+ \int\limits_{\dot{\Gamma}_r} h\varphi_j dS_r = 0. \tag{24}$$

Аналогично, применяя формулу Грина в области $(K)_{r,R}$, $0 < r < R$, к функциям $h(x)$ и $|x|^{\varkappa_j^-} \varphi_j(x)$, получаем

$$r^{\varkappa_j^- - 1}\left(r \int\limits_{\dot{\Gamma}_r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi_j dS_r - \varkappa_j^- \int\limits_{\dot{\Gamma}_r} h\varphi_j dS_r\right) =$$

$$= R^{\varkappa_j^- - 1}\left(R \int\limits_{\dot{\Gamma}_R} \frac{\partial h}{\partial R} \varphi_j dS_R - \varkappa_j^- \int\limits_{\dot{\Gamma}_R} h\varphi_j dS_R\right).$$

Отсюда и из соотношения (24) с $r = r$ и $r = R$ следует

$$r^{\varkappa_j^- - 1}\int\limits_{\Gamma_r} h\varphi_j dS_r = R^{\varkappa_j^- - 1}\int\limits_{\Gamma_R} h\varphi_j dS_R. \tag{25}$$

Учитывая теперь, что $h \in SH(K, \rho, a, A)$, заключаем

$$\Big| r^{\varkappa_j^- - 1}\int\limits_{\Gamma_r} h\varphi_j dS_r \Big| \leqslant CR^{\rho - \varkappa_j^+}.$$

Следовательно, если j таково, что $\varkappa_j^+ > \rho$, то

$$\int\limits_{\Gamma_r} h\varphi_j dS_r = 0, \quad \forall r > 0.$$

Аналогично получаем, что при тех j, для которых $\varkappa_j^+ < \rho$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma_R} h\varphi_j dS_R = 0, \quad \forall R > 0.$$

Поскольку система $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ является полной на Γ_r и Γ_R, то из этих соотношений вытекает, что $h(x) \equiv 0$ в случае $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$ и $h(x) = \sum\limits_{q \leqslant j \leqslant p} d_j(|x|)\varphi_j(x)$ при $\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+$. При этом в последнем равенстве для $h(x)$, как следует из (25), коэффициенты $d_j(|x|)$ имеют вид $d_j(|x|) = d_j|x|^{\varkappa_j^+}$. Лемма доказана.

Из доказанной леммы 1 вытекает следующее представление функций из $SH(K, \rho, a, A)$.

Лемма 2. *Если $u \in SH(K, \rho, a, A)$, то $u = \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}u$ при $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, а при $\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+$*

$$u = (\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda)\mathfrak{A}u + P_\lambda, \tag{26}$$

где $P_\lambda = \sum\limits_{q \leqslant i \leqslant p} d_i(\lambda)|x|^{\varkappa_i^+}\varphi_i(x), \quad \lambda > 0.$

Доказательство. Ввиду свойств отображений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_\lambda$ при $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$ функция $h \overset{\text{def}}{=} u - \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}u$ гармонична в K, равна нулю на $\partial K \setminus \{0\}$ и удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_{\Gamma_1} |h(Rx)|\varphi(x)\,dS_1 \leqslant c_1R^\rho.$$

Отсюда следует $|h(x)| \leqslant c_2|x|^\rho$ и, значит, $h \in SH(K, \rho, c_1, c_2)$, причем $h(x) \to 0$ при $x \to 0$. Из леммы 1 следует тогда, что $h \equiv 0$. Аналогично получается, что $u - (\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda)\mathfrak{A}u = P_\lambda$ при $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$. Лемма доказана.

Равенства (22) и (26) в некоторых случаях удобно записывать иначе. Для этого при произвольных $\lambda > 0$ и $d \in \mathbb{R}^{p-q+1}$ обозначим через $\mathfrak{F}_{\lambda,d}$ отображение из $\mathfrak{T}(K, \varkappa_p^+, a, A, \delta)$ в $SH(K, \rho, c, c)$, задаваемое равенством

$$(\mathfrak{F}_{\lambda,d}\nu)(x) = (\mathfrak{B}_\lambda + \mathfrak{L}_\lambda)(x) + \sum\limits_{q \leqslant i \leqslant p} d_j|x|^{\varkappa_j^+}\varphi_j(x).$$

Тогда указанные равенства перепишутся следующим образом:

$$\forall\lambda > 0, \quad \forall d \in \mathbb{R}^{p-q+1}\colon \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\lambda,d}\nu) = \nu, \quad \forall\nu \in \mathfrak{T}(K, \varkappa_p^+, a, A, \delta);$$

$$\forall\lambda > 0 \quad \exists d = d(\lambda) \in \mathbb{R}^{p-q+1}\colon \mathfrak{F}_{\lambda,d}\mathfrak{A}u = u.$$

3. Связь между предельными множествами функций и мер. Центральный факт теории Азарина предельных множеств состоит в том, что предельное множество меры, ассоциированной по Рису субгармонической функции конечного порядка в $\mathbb{R}^n$, совпадает с множеством рисовских мер функций из предельного множества исходной функции, а предельное множество канонического потенциала положительной меры конечного порядка $\rho \notin \mathbb{N}$ в $\mathbb{R}^n$ совпадает с множеством потенциалов мер из предельного множества рассматриваемой меры. Случай $\rho \in \mathbb{N}$ исследован М. Л. Содиным [15].

Установим подобные утверждения для функций в конусе.

Предложение 3. *Пусть* $u \in SH(K, \rho]$. *Тогда* $\mathfrak{A}v \in \mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u)$, $\forall v \in \in \mathrm{Fr}\, u$.

Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 из [5] и мы его опускаем.

Предложение 4. *Пусть* $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$, *причем либо* $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$, *либо* $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$ *и*

$$\int^{\infty} t^{\rho-n+2}\, d\widetilde{\tau}(t) < \infty. \tag{27}$$

Тогда $\mathfrak{B}_0 \nu \in \mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda \tau)$, $\forall \nu \in \mathrm{Fr}\, \tau$, $\forall \lambda > 0$.

Доказательство. Будем действовать подобно тому, как в [5, ч. 3] доказывалась лемма 1. Пусть $\nu = \lim\limits_{t_j \to \infty} \tau^{[t_j]}$. При $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$ в силу указанных в п. 1 свойств $\mathrm{Fr}\, \tau$ существует такое c, что $\mathfrak{B}_0 \nu \in SH(K, \rho, c, c)$. Если же $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$, то из (27) следует (см. свойство 8 множества $\mathrm{Fr}\, \tau$), что $\nu = 0$ и, значит, $\mathfrak{B}_0 \nu \equiv 0$. Таким образом, для доказательства рассматриваемого утверждения теперь достаточно установить, что

$$D' - \lim_{t_j \to \infty} T_{t_j}(\mathfrak{B}_\lambda \tau) = \mathfrak{B}_0 \nu, \quad \forall \lambda > 0.$$

Пусть $\psi \in D(K)$. Выберем числа s и N так, чтобы $0 < s < N$ и $\mathrm{supp}\, \psi \subset \subset (K)_{2s, N/2}$, $|\nu|(\overline{\Gamma}_N) = 0$. Тогда

$$\Big| \int_K \psi T_{t_j}(\mathfrak{B}_\lambda \tau)\, d\omega - \int_K \psi \mathfrak{B}_0 \nu\, d\omega \Big| \leqslant t_j^{-\rho} \int_K |\psi(x)| \Big| \int_{(\overline{K})_{\lambda, st_j}} W_p(t_j x, y)\, d\tau(y) \Big| d\omega(x) +$$

$$+ \int_K |\psi(x)| \Big| \int_{(\overline{K})_{0,s}} W_p(x, y)\, d\nu(y) \Big| d\omega(x) + t_j^{-\rho} \int_K |\psi(x)| \Big| \int_{(\overline{K})_{Nt_j, \infty}} \times$$

$$\times W_p(t_j x, y)\, d\tau(y) \Big| d\omega(x) + \int_K |\psi(x)| \Big| \int_{(\overline{K})_{N, \infty}} W_p(x, y)\, d\nu(y) \Big| d\omega(x) +$$

$$+ \Big| \int_K \psi(x) \Big[t_j^{-\rho} \int_{(\overline{K})_{st_j, Nt_j}} W_p(t_j x, y)\, d\tau(y) - \int_{(\overline{K})_{s,N}} W_p(x, y)\, d\nu(y) \Big] d\omega(x) \Big| =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Используя оценки ядра W_p [6], получаем

$$I_1 \leqslant c_1 s^{\rho - \varkappa_p^+}, \quad \forall t_j > \lambda/s,$$

$$I_2 \leqslant c_2 \|\psi\|_\infty (s^{\varkappa_1^+ + \rho + n - 2} + s^{\rho - \varkappa^+}).$$

Далее, при $\rho < \varkappa_{p+1}^+$ имеем

$$I_3 \leqslant c_3 \|\psi\|_\infty N^{\rho - \varkappa_{p+1}^+}, \quad \forall t_j > 1,$$

$$I_4 \leqslant c_4 \|\psi\|_\infty N^{\rho - \varkappa_{p+1}^+}.$$

Если же $\rho = \varkappa^{+}_{p+1}$, то

$$I_3 \leqslant c_3 \|\psi\|_\infty \int\limits_N^\infty t^{\varkappa^-_p+1}\, d\widetilde{\tau}(t), \quad \forall t_j > 1; \quad I_4 = 0.$$

Таким образом, для фиксированной функции ψ по произвольно данному $\varepsilon > 0$ можно подобрать s и N такие, что $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon$.

Рассмотрим теперь величину I_5. Имеем

$$I_5 = \Big|\int\limits_K \psi(x)\Big[\int\limits_{\overline{(K)}_{s,N}} W_p(x, y)\, d\tau^{[t_j]}(y) - \int\limits_{\overline{(K)}_{s,N}} W_p(x, y)\, d\nu(y)\Big] d\omega(x)\Big| =$$

$$= \Big|\int\limits_{\overline{(K)}_{s,N}} \Phi(y)\,[d\tau^{[t_j]}(y) - d\nu(y)]\Big|,$$

где $\Phi(y) = \int\limits_K \psi(x)\, W_p(x, y)\, d\omega(x) \in C((\overline{K})_{s,N})$. Поскольку мера ν является слабым пределом мер $\tau^{[t_j]}$, а $|\nu|(\overline{\Gamma}_N) = 0$, то согласно предложению 2 $\lim I_5 = 0$. Следовательно, $D' - \lim(\mathfrak{B}_\lambda \tau) = \mathfrak{B}_0 \nu$. Предложение 4 доказано.

Рассмотрим случай, когда $\varkappa^+_{q-1} < \varkappa^+_q = \ldots = \varkappa^+_p = \rho < \varkappa^+_{p+1}$ и при этом $\int\limits_1^\infty t^{-\rho-n+2}\, d\widetilde{\tau}(t) = \infty$. В этом случае при $R > \lambda > 0$ и l таком, что $\varkappa^+_l = \rho$, выполняется неравенство

$$\sup_{R>\lambda} |\delta^\lambda_\tau(l, R)| < \infty, \tag{28}$$

где

$$\delta^\lambda_\tau(l, R) = \int\limits_{(\overline{K})_{\lambda,R}} \frac{\varphi_l(x)}{\varphi(x)}\, |x|^{\varkappa^-_l}\, d\tau(x).$$

Ввиду (28) из каждой последовательности векторов $\left(\frac{\theta_n}{\alpha_q}\,\delta^\lambda_\tau(q, t_j), \ldots, \frac{\theta_n}{\alpha_p}\,\delta^\lambda_\tau(p, t_j)\right)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Множество всех таких пределов обозначим через $\mathrm{Fr}\{\delta^\lambda_\tau\}$.

Предложение 5. *Пусть* $\varkappa^+_{q-1} < \varkappa^+_q = \ldots = \varkappa^+_p = \rho < \varkappa^+_{p+1}$ *и мера* $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$ *такова, что* $\int^\infty t^{-\rho-n+2}\, d\widetilde{\tau}(t) = \infty$. *Тогда для любой меры* $\nu \in \mathrm{Fr}\,\tau$ *найдется* $d \in \mathrm{Fr}\{\delta^1_\tau\}$ *такое, что*

$$\mathfrak{J}_{1,d+c}\nu \in \mathrm{Fr}\Big[\mathfrak{B}_\lambda\tau + |x|^\rho \sum_{q\leqslant j\leqslant p} c_j\varphi_j(x)\Big], \quad \forall c \in \mathbb{R}^{l-q+1}, \quad \lambda > 0.$$

Доказательство*. Пусть

$$\nu = \lim_{t_j\to\infty} \tau^{[t_j]}. \tag{29}$$

Тогда при некоторых a, A и $\delta = \inf\limits_{\lambda>0} \delta^\lambda_\tau$ мера $\nu \in \mathfrak{T}(K, \rho, A, \delta)$ и, следовательно, при всех $d \in \mathbb{R}^{p-q+1}$ и некотором $D = D(\tau, d)$ функция $\mathfrak{J}_{1,d}\nu \in SH(K, \rho, a, D, D)$. Выбирая при необходимости из последовательности t_j подпоследовательность, положим

$$d_l = \lim_{j\to\infty} \frac{\theta_n}{\alpha_l}\,\delta^\lambda_\tau(l, t_j).$$

* Это доказательство близко к доказательству леммы 2 из [5, ч. 3].

Далее, как и при доказательстве предложения 4, возьмем какую-либо функцию $\psi \in D(K)$ и такие числа s и N, $\operatorname{supp}\psi \subset (K)_{2s, N/2}$, $|\nu|(\bar{\Gamma}_N) = 0$. Тогда

$$\Big|\int\limits_K \psi\Big[T_{t_j}\ \mathfrak{B}_\lambda\tau + |x|^\rho \sum_{q\leqslant l\leqslant p} c_j\varphi_j(x)\Big]\, d\omega - \int\limits_K \psi\mathfrak{L}_{1,d+c}\, \nu d\omega\Big| \leqslant$$

$$\leqslant t_j^{-\rho}\int\limits_K |\psi(x)|\Big|\int\limits_{(\bar{K})_{\lambda, st_j}} W_{q-1}(t_jx, y)\, d\tau(y)\Big|\, d\omega(x) +$$

$$+ \int\limits_K |\psi(x)|\Big|\int\limits_{(\bar{K})_{0,s}} W_{q-1}(x, y)\, d\nu(y)\Big|\, d\omega(x) +$$

$$+ t_j^{-\rho}\int\limits_K |\psi(x)|\Big|\int\limits_{(\bar{K})Nt_j, \infty} W_p(t_jx, y)\, d\tau(y)\Big|\, d\omega(x) +$$

$$+ \int\limits_K |\psi(x)|\Big|\int\limits_{\overline{(K)}_{N,\infty}} W_p(x, y)\, d\nu(y)\Big|\, d\omega(x) +$$

$$+ \Big|\int\limits_K \psi(x)|x|^\rho \sum_{q\leqslant l\leqslant p}\Big[\int\limits_{\overline{(K)}_{\lambda, t_j}} \frac{\theta_n}{\alpha_l}|y|^{\varkappa_l^-}\frac{\varphi_l(y)}{\varphi(y)}\, d\tau(y) - d_l\Big]\varphi_l(x)\, d\omega(x) +$$

$$+ \Big|\int\limits_K \psi(x)\Big[t_j^{-\rho}\int\limits_{(\bar{K})_{st_j, t_j}} W_{q-1}(t_jx, y)\, d\tau(y) - \int\limits_{(\bar{K})_{s,1}} W_{q-1}(x, y)\, d\nu(y)\Big]\, d\omega(x) +$$

$$+ \Big|\int\limits_K \psi(x)\Big[t_j^{-\rho}\int\limits_{\overline{(K)}_{t_j, Nt_j}} W_p(t_jx, y)\, d\tau(y) - \int\limits_{\overline{(K)}_{1,N}} W_p(x, y)\, d\nu(y)\Big]\, d\omega(x) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i\leqslant 7} I_i.$$

Так же, как и в предложении 4, устанавливаются неравенства

$$I_1 \leqslant c_1\|\psi\|_\infty s^{\rho-\varkappa_{q-1}^+}, \quad \forall t_j > \lambda/s,$$

$$I_2 \leqslant c_2\|\psi\|_\infty (s^{\varkappa^+ + \rho + n - 2} + s^{\rho-\varkappa_{q-1}^+}),$$

$$I_3 \leqslant c_3\|\psi\|_\infty N^{\rho-\varkappa_p^+ + 1}, \quad \forall t_j > 1,$$

$$I_4 \leqslant c_4\|\psi\|_\infty N^{\rho-\varkappa_p^+ + 1},$$

и значит, при любом $\varepsilon > 0$ числа s и N дополнительно могут быть выбраны так, что $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 < \varepsilon$.

Далее, в силу выбора d_l имеем $\lim\limits_{j\to\infty} I_5 = 0$. Записав I_6 и I_7 в виде

$$I_6 = \Big|\int\limits_{(K)_{s,1}} \Phi_1(y)\,[d\tau^{[t_j]}(y) - d\nu(y)],$$

$$I_7 = \Big|\int\limits_{\overline{(K)}_{1,N}} \Phi_2(y)\,[d\tau^{[t_j]}(y) - d\nu(y)],$$

где

$$\Phi_1(y) = \int\limits_K \psi(x)\, W_{q-1}(x, y)\, d\omega(x) \in C((\bar{K})_{s,1}),$$

$$\Phi_2(y) = \int\limits_K \psi(x)\, W_p(x, y)\, d\omega(x) \in C((\bar{K})_{1,N}).$$

Ввиду (29) имеем $\lim_{j\to\infty} I_6 = 0$, $\lim_{j\to\infty} I_7 = 0$. Следовательно,

$$\lim_{t_j\to\infty}\int_K \Big\{\Big|T_{t_j}\mathfrak{B}_\lambda\tau + |x|^\rho \sum_{q\leqslant l\leqslant p} c_j\varphi_j(x) - \mathfrak{J}_{1,d+c}\nu\Big\} d\omega(x) = 0,$$

и тем самым предложение 5 доказано.

Из предложений 3–5 вытекают следующие ниже теоремы 1—3, содержащие искомые соотношения между предельными множествами функций и мер в конусе.

Теорема 1. *Пусть функция* $u \in SH(K, \rho]$. *Тогда*

$$\mathfrak{A}(\mathrm{Fr}\, u) = \mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u). \tag{30}$$

Доказательство. Из предложения 3 следует включение $\mathfrak{A}(\mathrm{Fr}\,u) \subset \mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u)$. Докажем обратное включение. Если $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$, то согласно предложению 4 и установленным в п. 2 соотношениям между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}_0$ имеем $\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u) = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_0(\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u))) \subset \mathfrak{A}(\mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A}u)) = \mathfrak{A}\,\mathrm{Fr}\,u$.

Если $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$ и $\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}_u(t) < \infty$, то (см. свойство 8 множества $\mathrm{Fr}\,u$) $\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u) = \{0\} \subset \mathfrak{A}(\mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{A}u))) = \mathfrak{A}(\mathrm{Fr}\,u)$.

Если $\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+$ и $\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}_u(t) = \infty$, то ввиду представления (23)

$$u(x) = (\mathfrak{B}_\lambda\mathfrak{A}u)(x) + |x|^\rho \sum_{q\leqslant l\leqslant p} c_l(\lambda)\varphi_l(x) + H_\lambda(x),$$

и согласно предложению 5

$$\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u) = \mathfrak{A}(\mathfrak{J}_{1,d+c(\lambda)}(\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}u))) \subset \mathfrak{A}(\mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda(\mathfrak{A}u) + |x|^\rho \sum_{q\leqslant l\leqslant p} c_l(\lambda)\varphi_l(x)) = \mathfrak{A}(\mathrm{Fr}\,u).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$ *и* $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$ *либо* $\rho = \varkappa_j^+$ *и* $\int^\infty t^{-\rho-n+2} \times d\tilde{\tau}(t) < \infty$. *Тогда*

$$\mathfrak{B}_0(\mathrm{Fr}\,\tau) = \mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda\tau), \quad \forall\lambda > 0.$$

Доказательство. Включение $\mathfrak{B}_0(\mathrm{Fr}\,\tau) \subset \mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda\tau)$ содержится в предложении 4. Докажем обратное включение. Пусть $\rho \notin \{\varkappa_j^+\}$. В этом случае согласно предложению 3

$$\mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda\tau) = \mathfrak{B}_0(\mathfrak{A}(\mathrm{Fr}(\mathfrak{B}_\lambda\tau))) \subset \mathfrak{B}_0(\mathrm{Fr}(\mathfrak{A}(\mathfrak{B}_\lambda\tau))) = \mathfrak{B}_0(\mathrm{Fr}\,\tau).$$

В случае $\rho \in \{\varkappa_j^+\}$, $\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}(t) < \infty$, искомое равенство фактически получено при доказательстве предложения 3, поскольку в качестве последовательности t_j там можно взять любую последовательность. Теорема доказана.

Для формулировки теоремы 3, относящейся к случаю $\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+$, $\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}(t) = \infty$, обозначим дополнительно через $\mathrm{Fr}_\nu\{\delta_\tau^\lambda\}$ множество всех частичных пределов таких последовательностей векторов $\left\{\frac{\theta_n}{\alpha_q}\delta_\tau^\lambda(q, t_j), \ldots, \frac{\theta_n}{\alpha_p}\delta_\tau^\lambda(p, t_j)\right\}$, что $\tau^{[t_j]} \xrightarrow[t_j\to\infty]{} \nu \in \mathrm{Fr}\,\tau$, $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Пусть мера* $\tau \in \mathfrak{T}(K, \rho)$, $\varkappa_{q-1}^+ < \varkappa_q^+ = \ldots = \varkappa_p^+ = \rho < \varkappa_{p+1}^+$ и $\int^\infty t^{-\rho-n+2} d\tilde{\tau}(t) = \infty$. *Тогда*

$$\bigcup_{\nu \in \mathrm{Fr}\,\tau} \bigcup_{d \in \mathrm{Fr}_{\nu}\{\delta_{\tau}^{1}\}} \mathfrak{J}_{1,d}\nu = \mathrm{Fr}\,(\mathfrak{B}_{\lambda}\tau), \quad \forall \lambda > 0.$$

Доказательство. Согласно предложению 5

$$\bigcup_{\nu \in \mathrm{Fr}\,\tau} \bigcup_{d \in \mathrm{Fr}_{\nu}\{\delta_{\tau}^{1}\}} \mathfrak{J}_{1,d}\nu \subset \mathrm{Fr}\,(\mathfrak{B}_{\lambda}\tau).$$

Обратно, пусть $v \in \mathrm{Fr}\,(\mathfrak{B}_{\lambda}\tau)$. Тогда, как отмечалось в п. 2, существует такой вектор $d(v) \in \mathbb{R}^{p-q+1}$, что $v = \mathfrak{J}_{1,d(v)}\mathfrak{A}v$. В силу предложения 3 $\mathfrak{A}v \in \mathrm{Fr}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_{\lambda}\tau) = \mathrm{Fr}\,\tau$. Таким образом, $v = \mathfrak{J}_{1,d(v)}\nu$ для некоторой меры $\nu \in \mathrm{Fr}\,\tau$. Как следует из доказательства предложения 5, для любой функции $\psi \in D(K)$

$$\lim_{t_j \to \infty} \int_K \psi(x)\,|x|^{\rho} \sum_{l \in T_{\tau}} |\delta_{\tau}^{\lambda}(l, t_j) - d_l(v)|\, q_l(x)\, d\omega = 0,$$

где последовательность $\{t_j\}$ такова, что $T_{t_j}(\mathfrak{B}_{\lambda}\tau) \to v$ (и, в частности, $\tau^{[t_j]} \to \nu$). Это означает, что $d(v) \in \mathrm{Fr}_{\nu}\{\delta_{\tau}^{\lambda}\}$. Теорема доказана.

В заключение отметим, что функции u из $SH(K, \rho)$ вполне регулярного роста в K, рассматривавшиеся авторами в [4, 5], в терминах предельных множеств описываются выполнением такого условия: множество $\mathrm{Fr}\,u$ состоит из одного единственного элемента, каковым является индикатор L рассматриваемой функции: $L(x) = L_u^*(x) = \overline{\lim\limits_{x' \to x}}\, \overline{\lim\limits_{t \to \infty}}\, t^{-\rho} u(tx)$. При этом $\mathrm{Fr}\,\tau_u = \tau_L$.

1. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций // Докл. АН СССР.— 1976.— **229**, № 6.— С. 1289—1291.
2. *Азарин В. С.* Об асимптотике поведения субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб.— 1979.— **108**, № 2.— С. 147—167.
3. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных классов функций, аналитических в полуплоскости.— Харьков, 1981.— 52 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4167—81.
4. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе // Докл. АН СССР.— 1987.— **297**, № 2.— С. 298—302.
5. *Рашковский А. Ю., Ронкин Л. И.* Субгармонические функции конечного порядка в конусе. I // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1990.— **54**.— С. 74—89.
6. *Рашковский А. Ю.* Интегральное представление субгармонических функций конечного порядка в конусе // Сиб. мат. журн.— 1989.— **30**, № 3.— С. 109—123.
7. *Рашковский А. Ю.* Рост и убывание субгармонических функций в конусе // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 9.— С. 1252—1258.
8. *Ронкин Л. И.* Оценки субгармонических функций и ассоциированных с ними мер в конусе // Теория операторов и субгармонические функции.— Киев : Наук. думка, 1990.— С. 27—42.
9. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М. : Гостехиздат, 1956.— 632 с.
10. *Азарин В. С.* О субгармонических функциях вполне регулярного роста в многомерном пространстве // Докл. АН СССР.— 1962.— **146**, № 4.— С. 743—746.
11. *Азарин В. С.* О субгармонических во всех пространствах функциях вполне регулярного роста // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва.— 1961.— **28**, вып. 4.— С. 128—148.
12. *Лелон П., Грумен Л.* Целые функции многих комплексных переменных.— М. : Мир, 1989.— 350 с.
13. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом.— М. : Наука, 1986.— 240 с.
14. *Ронкин Л. И.* Регулярность роста и D'-асимптотика голоморфных функций в $\mathbb{C}_+$ // Изв. вузов. Математика.— 1990.— № 2.— С. 16—28.
15. *Содин М. Л.* Замечания о предельных множествах субгармонических функций натурального порядка в плоскости // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1983.— **40**.— С. 125—129.

Получено 11.06.90