УДК 517.5

Н. Л. ПАЧУЛИА, канд. физ.-мат. наук (Абхаз. ун-т)

Равномерные оценки интегральных сильных средних уклонений непрерывных функций целыми функциями

Получены оценки (λ, φ)-интегральных сильных средних уклонений непрерывных на всей оси функций целыми функциями конечной степени.

Здобуті оцінки (λ, φ)-інтегральних сильних середніх відхилень неперервних на всій осі функцій цілими функціями скінченного степеня.

В настоящей статье получены равномерные оценки величин

$$l_\mu^\varphi(f; x) = l_\mu^\varphi(f; x, \lambda, \delta) = \int_\mu^\infty \lambda(\sigma)\,\varphi(\delta(\sigma)\,|\Lambda(f; x, \sigma)|)\,d\sigma,$$

где $f \in C_0(R)$, $C_0(R)$ — множество непрерывных на $R = (-\infty, \infty)$ ограниченных функций, λ, δ, φ — неотрицательные функции, определенные на $[0, \infty)$, $\mu \geqslant 0$; причем функция λ может зависеть еще от некоторого параметра $t \in E \subset R$,

$$\Lambda(f; x, \sigma) = f(x) - U_\sigma(f; x),$$

$$U_\sigma(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_R f(x+t)\,t^{-2}(\cos\sigma t - \cos(\sigma+1))\,dt.$$

Пусть f — непрерывная на сегменте $[\pi, \pi]$ 2π-периодическая функция, т. е. $f \in C[-\pi, \pi]$, $S_n(f; x)$ – частная сумма порядка n ее ряда Фурье, $E_n(f)$ — наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n.

Величины $l_\mu^\varphi(f, x)$ являются интегральными аналогами (λ, φ)-сильных средних уклонений ряда Фурье, т. е. являются аналогами величин

$$H_n^\varphi(f; x) = \sum_{k=n}^\infty \lambda_k \varphi(\delta_k\,|f(x) - S_k(f; x)|),$$

где $(\delta_k)_{k\in N}$, $(\lambda_k)_{k\in N}$ — неотрицательные последовательности чисел.

Среди результатов, касающихся оценок величин $H_n^\varphi(f; x)$, в случае $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, наиболее общий результат получил Л. Д. Гоголадзе [1] (см. также [2]): пусть $\lambda \in G_r$, G_r — множество последовательностей $(\lambda_k)_{k\in N}$ таких, что при некотором $r>1$, $\forall n \in N$

$$\left\{\sum_{k=n}^{2n} \lambda_k^r\right\}^{1/r} \leqslant A n^{1/r-1} \sum_{k=\frac{1}{2}n}^{n} \lambda_k.$$

Если $f \in C[-\pi, \pi]$, то $\forall p>0$, $\forall n \in N$

$$\| H^p_{2(n-1)}(f; x)\|_C \leqslant A_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k E^p_k(f), \tag{1}$$

где A, A_1 — величины, не зависящие от n.

Величины $H^{\varphi}_n(f; x)$ для произвольной функции φ оценены в [3] (см. также [4]). Доказано следующее утверждение: пусть $\lambda \in G_r$, $r>1$, последовательность чисел $(\delta_k)_{k\in N}$ убывает, $\varphi \in \Phi$, Φ — множество непрерывных неубывающих на $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(0)>0$ при $u>0$, $\ln\varphi(u)=O(u)$, $u \to +\infty$; причем для любой функции φ существует число $a=a_{\varphi}$, для которого $\varphi(2u)\leqslant a\varphi(u)$, $\forall u \in [0, 1]$. Если $f \in C[-\pi, \pi]$, то для любого $n=0, 1, \ldots$

$$\| H^{\varphi}_{2n}(f; x)\|_C \leqslant A \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \varphi(\delta_k E_k(f)). \tag{1'}$$

Здесь и в дальнейшем $A, A_q, \ldots$ обозначают положительные постоянные.

Оператор $U_\sigma(f; x)$ обладает многими свойствами, аналогичными свойствам оператора $S_n(f; x)$ [5, с. 340]. В частности, нетрудно заметить, что в случае $f \in C[-\pi, \pi]$ и $\sigma = n \in N$ справедливо равенство $U_\sigma(f; x) = S_n(f; x)$. Действительно, используя равенства [6, с. 41]

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_R f(x, t)\, t^{-2}\sin t \sin nt dt + \frac{1}{2} A_n(f; x)$$

и [6, с. 42]

$$\frac{1}{2}A_n(f; x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt dt = \frac{1}{\pi}\int_R f(x+t)\, t^{-2}(1-\cos t)\cos nt dt,$$

получаем

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi}\int_R f(x+t)\, t^{-2}(\cos nt - \cos(n+1)t)\, dt.$$

Возникает вопрос: сохраняет ли оператор $U_\sigma(f; x)$ на всей оси свойство оператора $S_n(f; x)$ которое выражается неравенством (1′), если рассматривать не периодические функции класса C_0? В настоящей статье дан положительный ответ на поставленный вопрос.

Для формулировок основных результатов введем также обозначения. Пусть $\mathscr{E}_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не выше $\sigma>0$, $\mathscr{F}^2_\sigma$ — множество функций $f \in \mathscr{E}_\sigma$, для которых $f(x)/1+|x|$ суммируема с квадратом на R,

$$e_\sigma(f) = \inf_{g\in\mathscr{F}^2_\sigma} \| f(x) - g(x)\|_{C_0},$$

$$I^{\varphi}_{\mu}(f; x, \delta) = \frac{1}{\mu}\int_{\mu}^{2\mu} \varphi(\delta(\sigma)\,|\,\Delta(f; x, \sigma)\,|)\, d\sigma.$$

Обозначим через Δ_r, $r>1$, множество неотрицательных на $[0, \infty)$ функций λ таких, что $\forall\mu\geqslant 1$

$$\left\{\int_{\mu}^{2\mu} \lambda^r(\sigma)\, d\sigma\right\}^{1/r} \leqslant A\mu^{1/r-1}\int_{\frac{1}{2}\mu}^{\mu} \lambda(\sigma)\, d\sigma. \tag{2}$$

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть* δ — *непрерывная и не возрастающая функция на* $[0, \infty)$, $f \in C_0$; *причем* $\lim\limits_{\mu\to+\infty} e_\mu(f)\,\delta(\mu) = 0$. *Тогда если* $\varphi \in \Phi$, $\mu > 0$, *то*

$$\| I_\mu^\varphi(f; x, \delta) \|_{C_0} \leqslant A_0 \varphi(e_\mu(f)\,\delta(\mu)). \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть* δ — *непрерывная и невозрастающая функция на* $[0, \infty)$, $f \in C_0$; *причем* $\lim\limits_{\mu\to+\infty} e_\mu(f)\,\delta(\mu) = 0$. *Тогда если* $\lambda \in \Lambda_r$, $r > 1$, *и* $\varphi \in \Phi$, *то* $\forall \mu \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \int\limits_{2\mu}^{\infty} \lambda(\sigma)\,\varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|)\,d\sigma \right\|_{C_0} \leqslant A \int\limits_{\mu}^{\infty} \lambda(\sigma)\,\varphi(\delta(\sigma)\,e_\sigma(f))\,d\sigma. \qquad (4)$$

Для доказательства теорем убедимся в справедливости следующего факта.

Лемма. *Пусть функция* $f \in C_0$, $\mu \geqslant 1$, ν_j, $j = \overline{1, q}$, — *целые числа из сегмента* $[\mu, 2\mu]$, *расположенные по порядку возрастания их индексов. Кроме того,* $\nu_0 = \mu$ *и* $\nu_{q+1} = 2\mu$. *Если* $\sigma_j = [\nu_j, \nu_{j+1}]$, $j \in \{0, 1, \ldots, q\} = B_0$, *то* $\forall B \subset B_0$, $\forall p > 0$

$$M_{B,\mu}^p(f; x) = \left\{ \frac{1}{b} \sum_{j\in B} |\Delta(f; x, \sigma_j)|^p \right\}^{1/p} \leqslant A e_\mu(f) \ln \frac{\mu e}{b}, \qquad (5)$$

где b *означает количество элементов множества* B.

Доказательство. Величина $M_{B,\mu}^p\ (f;\ x)$ не убывает относительно параметра p. Поэтому достаточно доказать неравенство (5) для случая $p \geqslant 2$.

Пусть функция $g \in \mathcal{F}_\mu^2$, для нее $e_\mu(f) = \| f(x) - g(x) \|_{C_0}$. Так как $g \in \mathcal{F}_\mu^2$ влечет [5, с. 264] $U_\mu(g; x) = g(x)$, то, введя обозначение $h(x) = f(x) - g(x)$, можем записать, что

$$\Delta(f; x, \sigma) = h(x) - U_\sigma(h; x).$$

Отсюда в силу неравенства Минковского будем иметь

$$M_{B,\mu}^p(f; x) \leqslant A e_\mu(f) + \left\{ \frac{1}{b} \sum_{j\in B} |U_{\sigma_j}(f, x)|^p \right\}^{1/p} = A e_\mu(f) + M_{B,\mu}^{p,1}(f; x).$$

Таким образом, чтобы убедиться в справедливости соотношения (5), достаточно доказать неравенство

$$M_{B,\mu}^{p,1}(f; x) \leqslant A e_\mu(f) \ln \frac{\mu e}{b}. \qquad (6)$$

Очевидно,

$$U_\sigma(h; x, \sigma) = Z_\sigma(h; x) + Q_\sigma(h; x),$$

где

$$Z_\sigma(h; x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant 1} h(x+t)\, t^{-2} \sin\frac{t}{2} \sin\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) t\,dt,$$

$$Q_\sigma(h; x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\geqslant 1} h(x+t)\, t^{-2} \sin\frac{t}{2} \sin\left(\sigma + \frac{1}{2}\right) t\,dt,$$

причем

$$|Q_\sigma(h; x)| \leqslant A e_\mu(f), \quad \sigma \geqslant \mu. \qquad (7)$$

Используя неравенство Минковского, в силу (7) получаем

$$M_{B,\mu}^p(h; x) \leqslant \left\{ \frac{1}{b} \sum_{j\in B} |Z_{\sigma_j}(h; x)|^p \right\}^{1/p} + A e_\mu(f) \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{1}{b} \sum_{j\in B} \left| \frac{2}{\pi} \int\limits_{|t|\leqslant \mu^{-1}} h(x+t)\, t^{-2} \sin\frac{t}{2} \sin\left(\sigma_j + \frac{1}{2}\right) t\,dt \right|^p \right\}^{1/p} +$$

$$+\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{b}} h(x+t)\,t^{-2}\sin\frac{t}{2}\sin\left(\sigma_j+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right|^p\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\left|\frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1} h(x+t)\,t^{-2}\sin\frac{t}{2}\sin\left(\sigma_j+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right|^p\right\}^{1/p}+Ae_\mu(f)=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{3}V_\mu^\gamma(f;x)+Ae_\mu(f).$$

В силу соотношений

$$\|h\|_{C_0}\leqslant e_\mu(f), \tag{8}$$

$$|\sin t|\leqslant|t|,\quad \forall t\in R, \tag{9}$$

будем иметь

$$V_\mu^1(f;x)\leqslant A\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\sigma_j^p\right\}^{1/p}\frac{2}{\mu}e_\mu(f)\leqslant A_1e_\mu(f),$$

$$V_\mu^2(f;x)\leqslant\int\limits_{\frac{1}{\mu}\leqslant|t|\leqslant\frac{1}{b}}|h(x+t)\,t^{-1}|\,dt\leqslant Ae_\mu(f)\ln\frac{\mu}{b}\,.$$

На основании неравенства Минковского имеем

$$V_\mu^3(f;x)\leqslant\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\left|\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1} h(x+t)\,t^{-2}\sin\frac{t}{2}\sin\left(\tau_j+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right|^p\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\left|\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1} h(x+t)\,t^{-2}\left(\sin\left(\sigma_j+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(\tau_j+\frac{1}{2}\right)t\right)dt\right|^p\right\}^{1/p}=$$

$$=V_\mu^{3,1}(f;x)+V_\mu^{3,2}(f;x),$$

где $\tau_j=\nu_j$, $j=\overline{1,q}$, $\tau_0=\nu_1$, $\tau_{q+1}=\nu_q$.
В силу соотношений (8) и (9) будем иметь

$$V_\mu^{3,2}(f;x)\leqslant\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\left(\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1}|h(x+t)\,t^{-2}(\sigma_j-\nu_j)\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{dt}\Big)^p\right\}^{1/p}\leqslant Ae_\mu(f).$$

Полагая

$$F_1(t)=\begin{cases}h(x+t)\,(2t^2)^{-1}\sin t, & |t|\in\left[\frac{1}{b},1\right],\\[2mm] 0, & |t|\in[-\pi,\pi]\diagdown\left[\frac{1}{b},1\right];\end{cases}$$

$$F_2(t)=\begin{cases}h(x+t)\,t^{-2}\sin^2\frac{t}{2}, & |t|\in\left[\frac{1}{b},1\right],\\[2mm] 0, & |t|\in[-\pi,\pi]\diagdown\left[\frac{1}{b},1\right]\end{cases}$$

и продолжая вне сегмента $[-\pi,\pi]$ 2π-периодически, замечаем, что интегралы в $V_\mu^{3,1}(f;x)$ представляют комбинацию синус и косинус коэффициентов Фурье функций F_1 и F_2. Поэтому, применяя сначала неравенство Минковского, а затем неравенство Хаусдорфа — Юнга для каждой функции F_i, $i=1,2$, получаем

$$V_\mu^{3,1}(f;x)\leqslant b^{-1/p}\left\{\left[\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1}|h(x+t)\,(2t^2)^{-1}\sin t|^{p_1}dt\right]^{1/p_1}+\right.$$

$$+\left[\int\limits_{\frac{1}{b}\leqslant|t|\leqslant 1}|h(x+t)\,t^{-2}\sin^2\frac{t}{2}\Big|^{p_1}dt\right]^{1/p_1}\Bigg\},\quad p_1=\frac{p}{p-1}.$$

Отсюда в силу соотношений (8) и (9) будем иметь

$$V_\mu^{3,1}(f;x)\leqslant Ab^{-1/p}e_\mu(f)\left\{1+\left(\int\limits_{1/b}^{1}t^{-p_1}dt\right)^{1/p_1}\right\}\leqslant A_1e_\mu(f).$$

Итак, неравенство (5) доказано.

Отметим, что в условиях леммы, если функция δ убывает на $[0,\infty)$, то

$$M_{B,\mu}^p(f;x,\delta)\leqslant\left\{\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|^p\right\}^{1/p}\leqslant A\delta(\mu)\,e_\mu(f)\ln\frac{\mu e}{b}.\quad(10)$$

Доказательство теоремы 1. Если $e_\mu(f)=\|f(x)-g(x)\|_{C_0}=0$, то $f=g\in\mathcal{P}_\mu^2$. Таким образом [5, с. 264], $\forall\sigma\geqslant\mu$, $f(x)=U_\sigma(f;x)$. Очевидно, в этом случае неравенство (3) справедливо.

Пусть теперь $e_\mu(f)>0$. Обозначим через ν_j, $j=\overline{1,q}$, все целые числа из $[\mu,2\mu]$, расположенные по порядку возрастания их индексов, причем $\nu_0=\mu$ и $\nu_{q+1}=2\mu$. Тогда

$$I_\mu^\varphi(f;x)=\frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{q}\int\limits_{\nu_j}^{\nu_{j+1}}\varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f;x,\sigma)|)\,d\sigma.$$

Применяя теорему о среднем к каждому интегралу, в силу непрерывности подынтегральной функции в $I_\mu^\varphi(f;x)$ получаем

$$I_\mu^\varphi(f;x)\leqslant\frac{1}{\mu}\sum_{j=0}^{q}\varphi(\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|).$$

Пусть $\gamma\in N$, $d(\gamma)$ — число индексов $j\in B_0=\{0,1,\ldots,q\}$, для которых

$$\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|\geqslant\gamma\cdot e_\mu(f)\,\delta(\mu),$$

и пусть

$$\beta_\gamma=\begin{cases}1, & d(\gamma)\geqslant 1,\\ 0, & d(\gamma)<1;\end{cases}$$

$$B_\gamma=\{j\in B_0:(\gamma-1)\,e_\mu(f)\,\delta(\mu)\leqslant\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|\leqslant\gamma e_\mu(f)\,\delta(\mu)\}.$$

Тогда будем иметь

$$I_\mu^\varphi(f;x)\leqslant\frac{1}{\mu}\sum_{j\in B}\varphi(\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|)=\frac{1}{\mu}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\beta_\gamma\sum_{j\in B_\gamma}\varphi(\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\mu}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\beta_\gamma\varphi(\gamma e_\mu(f)\,\delta(\mu))\,d(\gamma-1).$$

Пусть $d(\gamma-1)\geqslant 1$. Тогда, считая множество B в выражении $M_{B,\mu}^p(f;x,\delta)$ множеством тех индексов j величин σ_j, для которых неравенство (11) выполняется, в силу (10) при $p=1$ получаем

$$(\gamma-1)\,e_\mu(f)\,\delta(\mu)\leqslant\frac{1}{b}\sum_{j\in B}\delta(\sigma_j)\,|\Delta(f;x,\sigma_j)|\leqslant A_0\delta(\mu)\,e_\mu(f)\ln\frac{e\mu}{b}.$$

Отсюда

$$b=d(\gamma-1)\leqslant A\exp(-\gamma/2A_0).$$

Таким образом,

$$I_\mu^\varphi(f;x)\leqslant A_1\sum_{\gamma=1}^{\infty}\varphi(\gamma e_\mu(f)\,\delta(\mu))\exp(-\gamma/2A_0).$$

В работе [7] доказано, что если $\varphi \in \Phi$, то существует число β_0 такое, что $\forall u \in [0, 1/2\beta_0 A_0]$ справедливо соотношение

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\nu u) \exp(-\nu/A_0) \leqslant A_\varphi \varphi(u). \tag{12}$$

Так как $\lim\limits_{\mu \to +\infty} e_\mu(f)\,\delta(\mu) = 0$, то существует число μ_0 такое, что при $\mu \geqslant \mu_0$ справедливо соотношение $e_\mu(f)\,\delta(\mu) \leqslant 1/2\beta_0 A_0$. Тогда в силу соотношения (12), считая $u = e_\mu(f)\,\delta(\mu)$, получаем (3). Если же $\mu \in [1, \mu_0]$, то неравенство (3) получается подбором коэффициента A. Теорема 1 доказана.

Нетрудно показать, что теорема 1 сохраняет силу и в случае $\mu \in [0, 1)$. Действительно, на основании неравенства [5, с. 340]

$$|\Delta(f; x, \delta)| \leqslant A e_\sigma(f) \ln(\sigma + 1)$$

получим

$$I_\mu^\varphi(f; x) \leqslant \varphi(A\delta(\mu)\, e_\mu(f) \ln(2\mu + 1)) \leqslant A_1 \varphi(\delta(\mu)\, e_\mu(f)). \tag{13}$$

Доказательство теоремы 2. Используя неравенство Гельдера, в силу того, что $\lambda \in \Lambda_r$, при $\mu \geqslant 1$ имеем

$$\int_\mu^{2\mu} \lambda(\sigma)\, \varphi(|\Delta(f; x, \sigma)|)\, \delta(\sigma))\, d\sigma \leqslant \left\{\int_\mu^{2\mu} \lambda^r(\sigma) d\sigma\right\}^{1/r} \left\{\int_\mu^{2\mu} \varphi^{r_1}(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|) d\sigma\right\}^{1/r_1} \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{2}\mu}^{\mu} \lambda(\sigma)\, d\sigma \left\{\frac{1}{\mu} \int_\mu^{2\mu} \varphi^{r_1}(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|)\, d\sigma\right\}^{1/r_1}, \quad r_1 = \frac{r}{r-1}.$$

Очевидно, $\varphi \in \Phi$ влечет $\varphi^{r_1} \in \Phi$. Поэтому в силу убывания функции $\delta(\mu)\, e_\mu(f)$ с использованием теоремы 1 получим

$$\int_\mu^{2\mu} \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \delta)|)\, d\sigma \leqslant A\varphi(\delta(\mu)\, e_\mu(f)) \int_{\frac{1}{2}\mu}^{\mu} \lambda(\sigma)\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant A \int_{\frac{1}{2}\mu}^{\mu} \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\, e_\sigma(f))\, d\sigma.$$

Отсюда следует

$$I_{2\mu}^\varphi(f; x) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^j\mu}^{2^{j+1}\mu} \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|)\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant A \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}\mu}^{2^j\mu} \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\, e_\sigma(f))\, d\sigma = A \int_\mu^\infty \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\, e_\sigma(f))\, d\sigma.$$

Теорема 2 доказана.

Из неравенств (12)—(13) получим

$$\int_0^\infty \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|)\, d\sigma \leqslant A \int_0^\infty \lambda(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\, e_\sigma(f))\, d\sigma. \tag{14}$$

Функция λ может зависеть от некоторого параметра $\nu \in E \subset R$. Обозначим через $\Lambda_r(E)$ множество функций $\lambda_\nu(\sigma)$, для которых неравенство (2) выполняется для любого $\nu \in E$.

Если $\lambda \in \Lambda_r(E)$, то неравенство (14) имеет вид

$$\int_0^\infty \lambda_\nu(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\,|\Delta(f; x, \sigma)|)\, d\sigma \leqslant A \int_0^\infty \lambda_\nu(\sigma)\, \varphi(\delta(\sigma)\, e_\sigma(f))\, d\sigma. \tag{15}$$

Приведем частный случай неравенства (15). Пусть функция

$$\lambda_\nu(t) = \begin{cases} \alpha\nu^{-\alpha}(\nu - t)^{\alpha-1}, & \alpha \geqslant 1, \quad t \in [0, \nu], \\ 0, & t \geqslant \nu, \end{cases}$$

при $\nu \to +\infty$ определяет (C, α)-метод суммирования несобственных интегралов. Функция $\lambda_\nu(t)$ не возрастает, тогда $\lambda \in G_r(0, \infty)$. Значит, неравенство (15) при $\delta(u) = 1$ примет вид

$$\alpha\nu^{-\alpha}\int_0^\nu (\nu - t)^{\alpha-1}\varphi(|f(x) - U_\sigma(f; x)|)\, d\sigma \leqslant A\alpha\nu^{-\alpha}\int_0^\nu (\nu - t)^{\alpha-1}\varphi(e_\sigma(f))\, d\sigma. \quad (16)$$

Если $f \in C_0$ является равномерно непрерывной на R, то [5, с. 272] $\lim\limits_{\sigma\to\infty} e_\sigma(f) = 0$. Следовательно, используя неравенство (16) в случае $\varphi(u)=u$, получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} \| f(x) - \alpha\nu^{-\alpha}\int_0^\nu (\nu - \sigma)^{\alpha-1} U_\sigma(f; x)\, d\sigma \|_{C_0} = 0.$$

Таким образом, интегральные (C, α)-средние величин $U_\sigma(f; x)$ равномерно сходятся к $f(x)$.

1. *Гоголадзе Л. Д.* О сильной суммируемости простых и кратных рядов Фурье // Некоторые вопросы теории функций.— Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та.— 1981.— **2**.— С. 5—50.
2. *Пачулиа Н. Л., Степанец А. И.* Сильная суммируемость рядов Фурье на классах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Мат. заметки.— 1988.— **44**, № 4.— С. 506—516.
3. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР.— 1989.— **134**, № 2.—С. 249—252.
4. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье в пространстве $C_\beta^\psi C$ // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 3.— С. 354—360.
5. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М. : Физматгиз, 1960.— 624 с.
6. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций.— Киев: Наук. думка, 1987.— 268 с.
7. *Totik V.* Notes on Fourier series; Strong approximation // J. Approxim. Theory.— 1985.— 43.— P. 105—111.

Получено 11.03.90