УДК 517.968:519

М. М. НОРЕДДИН, канд. физ.-мат. наук (Ирак),
Н. Я. ТИХОНЕНКО, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

О сходимости метода ортогональных многочленов приближенного решения интегральных уравнений первого рода с П-ядрами

Обосновывается метод ортогональных многочленов приближенного решения интегральных уравнений I рода с П-ядрами. Доказана разрешимость соответствующих алгебраических систем и установлены оценки скорости сходимости приближенных решений к точным. Показана применимость метода ортогональных многочленов к приближенному решению интегральных уравнений второго рода с П-ядрами и высокая его эффективность при решении интегральных уравнений I рода с П-ядрами. Приведены конкретные П-ядра, наиболее часто встречающиеся в приложениях.

Обгрунтовується метод ортогональних многочленів наближеного розв'язку інтегральних рівнянь I роду з П-ядрами. Доведена розв'язність відповідних алгебраїчних систем і встановлені оцінки швидкості збіжності наближених розв'язків до точних. Показана застосовність методу ортогональних многочленів до наближеного розв'язку інтегральних рівнянь II роду з П-ядрами і висока його ефективність при розв'язанні інтегральних рівнянь I роду з П-ядрами. Наведені конкретні П-ядра, що найбільш часто зустрічаються в застосуваннях.

Настоящая статья посвящена обоснованию метода ортогональных многочленов (МОМ) приближенного решения интегральных уравнений первого рода с П-ядрами.

К нахождению решений интегральных уравнений с П-ядрами сводится широкий круг задач теории упругости и термоупругости, теплопроводности, гидро- и аэромеханики, теории дифракции и излучения [1—6].

Обоснованию различных методов приближенного решения интегральных уравнений, как регулярных, так и сингулярных, посвящен широкий круг работ (см., например, [7—12]), в которых в достаточной мере полно и подробно рассмотрены вопросы сходимости проекционных, вариационных и проекционно-итерационных методов приближенного решения регулярных и сингулярных интегральных уравнений в различных функциональных пространствах при достаточно широких предположениях относительно гладкости входных данных: коэффициентов, регулярных ядер, правых частей. Однако МОМ приближенного решения интегральных уравнений первого рода с П-ядрами, предположенный в работах Попова [5, 13] и развитый в [14—16], до настоящего времени обоснован не был.

1. Обозначим через $H_\alpha^{(r)}$, $0<\alpha\leqslant 1$, $r\geqslant 0$, пространство функций, определенных на $[a, b]$, производные порядка r которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α. Через $L_{2\rho}$ обозначим пространство функций $f(x)$, заданных на $[a, b]$, таких, что $\int\limits_0^b \rho(x)\,|f(x)|^2dx<+\infty$. Здесь

$\rho(x)$ — весовая функция. Норму и скалярное произведение в пространстве $L_{2\rho}$ введем обычным способом.

Пусть $\{\omega_k(x)\}$ — некоторая система многочленов, ортонормированных на $[a, b]$ по весу $\rho(x)$. Через S_n обозначим оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f(x) \in L_{2\rho}$ отрезок ее ряда Фурье

$$(S_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \omega_k(x),$$

где f_k — коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L_{2\rho}$, т. е. $f_k = (f, \omega_k)$.

Тогда в силу полноты системы $\{\omega_k(x)\}$ в пространстве $L_{2\rho}$ из равенства Парсеваля следуют оценки

$$\| S_n \|_{L_{2\rho} \to L_{2\rho}} = 1, \quad \| S_n \|_{H_\alpha^{(r)} \to L_{2\rho}} = 1. \tag{1}$$

При этом [17] справедлива лемма.

Лемма 1. *Если* $f(x) \in L_{2\rho}$, *то*

$$\lim_{n \to \infty} \| f(x) - (S_n f)(x) \|_{L_{2\rho}} = 0.$$

Если же $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$, то $\| f(x) - (S_n f)(x) \|_{L_{2\rho}} = 0(n^{-r-\alpha})$.

Согласно [5] функцию $\Pi(x, t)$ будем называть полиномиальным ядром (кратко: П-ядром) на сегменте $[a, b]$, если для нее справедливы следующие соотношения:

$$\int_a^b \Pi(x, t) w_+(t) \pi_k^+(t)\, dt = \sigma_k g_+(x) \pi_k^+(x), \; x \in [a, b], \tag{2}$$

$$\int_a^b \Pi(t, x) w_-(t) \pi_k^-(t)\, dt = \sigma_k g_-(x) \pi_k^+(x), \; x \in [a, b], \tag{3}$$

называемыми спектральными. Здесь $\sigma_k = \mathrm{const} \neq 0$ — спектральные постоянные, $\{\pi_k^\pm(x)\}$ — системы многочленов, ортонормированных на $[a, b]$ соответственно с весами $\rho_\pm(x) = w_\pm(x) g_\pm(x)$. При этом П-ядро называется симметричным, если $\Pi(x, t) = \Pi(t, x)$. В этом случае равенства (2), (3) совпадают, $\pi_k^+(x) = \pi_k^-(x) = \pi_k(x)$, $w_+(x) = w_-(x) = w(x)$, $g_+(x) = g_-(x) = g(x)$, $\{\pi_k(x)\}$ — система многочленов, ортонормированных на $[a, b]$ с весом $\rho(x) = w(x) g(x)$. Для простоты в дальнейшем будем предполагать $g_+(x) = g_-(x) = 1$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$K\varphi \equiv K_0\varphi + \lambda T\varphi = f, \tag{4}$$

где λ — параметр,

$$(K_0\varphi)(x) \equiv \int_a^b \Pi(x, t) \varphi(t)\, dt, \tag{5}$$

$$(T\varphi)(x) \equiv \int_a^b k(x, t) \varphi(t)\, dt. \tag{6}$$

Здесь $\Pi(x, t)$ — П-ядро, а известные функции $f(x)$ и $k(x, t)$ подчиним далее вполне определенным условиям. Число λ будем называть регулярным числом оператора K, если однородное уравнение (4) имеет лишь нулевое решение. Если же при данном λ однородное уравнение (4) имеет нетривиальные решения, то число λ будем называть характеристическим числом оператора K.

2. Пусть П-ядро симметрично, т. е. выполнены спектральные соотношения

$$\int_a^b \Pi(x, t) w(t) \pi_k(t)\, dt = \sigma_k \pi_k(x), \; x \in [a, b], \tag{7}$$

где $\sigma_k = \mathrm{const} \neq 0$, $\{\pi_k(x)\}$ — система многочленов, ортонормированных на $[a, b]$ по весу $\rho(x) = w(x)$. Предположим, что $f(x) \in L_{2\rho}$, а

$$\int_a^b\int_a^b w(x)\,w(t)\,|k(x,t)|^2 dt dx < +\infty, \tag{8}$$

и рассмотрим уравнение (4) с симметричным П-ядром $\Pi(x, t)$ в предположении, что число λ является регулярным числом оператора K. В дальнейшем будем считать, что уравнение (4) при данных предположениях для функций $f(x)$, $k(x, t)$ и параметра λ имеет единственное решение $\varphi(x)$. При этом согласно [5, 18] функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = w(x)\,\varphi_0(x), \tag{9}$$

где неизвестная функция $\varphi_0(x) \in L_{2\rho}$, а известная функция $W(x)$ определяется свойствами решения уравнения

$$K_0\varphi = f \tag{10}$$

на концах $[a, b]$. Таким образом, из представления (9) следует, что решения уравнений (4) и (10) при данных предположениях относительно функций $f(x)$ и $k(x, t)$ принадлежат пространству $L_{2\rho_1}$, $\rho_1(x) = 1/w(x)$.

На основании теоремы 2 [19, с. 419] легко доказывается такая лемма.

Лемма 2. *Если ядро $k(x,t)$ удовлетворяет условию* (8), *то оператор T, определенный равенством* (6), *действует из пространства $L_{2\rho_1}$ в пространство $L_{2\rho}$ вполне непрерывным образом.*

При основании МОМ будем придерживаться результатов работ [9, 12]. В качестве пространства X (X — пространство решений уравнений (4), (10)) возьмем пространство $L_{2\rho_1}$. Из спектральных соотношений (7) следует, что в пространстве X ортонормированной по весу $\rho_1(x)$ будет система функций $\{w(x)\,\pi_k(x)\}$. В качестве пространства Y (Y — пространство правых частей уравнений (4), (10)) возьмем пространство $L_{2\rho}$, в котором ортонормированной по весу $\rho(x)$ будет система многочленов $\{\pi_k(x)\}$. Отметим, что в случае конкретного задания П-ядра иногда в качестве пространства Y нужно брать не все пространство $L_{2\rho}$, а некоторое его подпространство, с таким расчетом, чтобы оператор $K_0 : X \to Y$ был ограниченным и имел ограниченный обратный $K_0^{-1} : Y \to X$.

Согласно представлению (9) приближенные решения уравнений (4), (10) ищем в виде

$$\varphi_n(x) = w(x) \sum_{k=0}^{n} c_k \pi_k(x), \tag{11}$$

где c_k — неизвестные постоянные, подлежащие определению. Обозначим через Q_n (соответственно P_n) оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi(x) \in X$ ($f(x) \in Y$) отрезок ее ряда Фурье по ортонормированной по весу $\rho_1(x)$ ($\rho(x)$) в пространстве X (Y) системе функций $\{w(x)\,\pi_k(x)\}$ ($\{\pi_k(x)\}$), т. е.

$$(Q_n\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k w(x)\,\pi_k(x), \tag{12}$$

$$(P_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \pi_k(x), \tag{13}$$

где φ_k (f_k) — коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ ($f(x)$) по системе функций $\{w(x)\,\pi_k(x)\}$ ($\{\pi_k(x)\}$). Тогда в качестве пространств X_n и Y_n возьмем множества агрегатов вида (12), (13) соответственно. Ясно, что $X_n \subset X_{n+1} \subset \subset X$, $Y_n \subset Y_{n+1} \subset Y$; $Q_n^2 = Q_n$, $P_n^2 = P_n$; $\|Q_n\| = 1$, $\|P_n\| = 1$; X_n, Y_n — полные пространства; $\dim X_n = \dim Y_n = n + 1$; $\varphi_n(x) \in X_n$.

Рассмотрим сначала уравнение (10). Его приближенное решение ищем в виде (11), а неизвестные постоянные c_k определяем из системы

$$(K_0\varphi_n - f, \pi_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \tag{14}$$

равносильной операторному уравнению

$$K_{0n}\varphi_n = P_n f, \tag{15}$$

где $K_{0n} = P_n K_0$. При этом система (14) в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\sigma_j c_j = f_j, \quad j = \overline{0, n}, \tag{16}$$

где

$$f_j = \int_a^b \rho(x) f(x) \pi_j(x)\, dx. \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in Y$, оператор $K_0 : X \to Y$ ограничен и имеет ограниченный обратный $K_0^{-1} : Y \to X$. Тогда система* (14) — (16) *разрешима при всех n, а приближенные решения $\varphi_n^*(x)$ уравнения* (10) *сходятся в пространстве X к его точному решению $\varphi^*(x)$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi^*(x) - \varphi_n^*(x) \|_X = 0. \tag{18}$$

Доказательство будем проводить на основании результатов гл. 1 [9]. В самом деле, условие I выполнено с постоянной $\varepsilon_1^{(n)} = 0$, так как приближенный оператор $K_{0n} = P_n K_0$. Кроме того, условие II выполнено с постоянной $\varepsilon_2^{(n)} = 0$, поскольку для любого $\varphi_n(x) \in X_n$ существует элемент $f_n(x) \in Y_n$ такой, что $\| K_0\varphi_n - f_n \|_Y = 0$. В этом легко убедиться, положив на основании спектральных соотношений (7) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \sigma_k \pi_k \times$ $\times (x) \in Y_n$.

Так как оператор K_0^{-1} ограничен, то постоянная $p = [\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)} \| I - - P_n \|] \| K_0^{-1} \|$ из гл. 1 [9] равна нулю. А это означает, что при всех n существует ограниченный оператор K_{0n}^{-1}, т. е. система (14) — (16) разрешима при всех n. Так как $\lim_{n\to\infty} \| f(x) - (P_n f)(x) \|_Y = 0$, то на основании работы [9] следует (18).

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$, оператор $K_0 : X \to Y$ ограничен и имеет ограниченный обратный $K_0^{-1} : Y \to X$. Тогда система* (14) — (16) *разрешима при всех n, а приближенные решения $\varphi_n^*(x)$ уравнения* (10) *сходятся в пространстве X к его точному решению $\varphi^*(x)$ со скоростью*

$$\| \varphi^*(x) - \varphi_n^*(x) \|_X = 0\,(n^{-r-\alpha}).$$

Доказательство этого утверждения следует из теоремы 1 и леммы 1.

Замечание 1. Из (16) следует, что система (14) — (16) имеет решение $c_j = \sigma_j^{-1} f_j$, $j = \overline{0, n}$, при всех n, так как $\sigma_j \neq 0$. Однако мы придерживаемся предложенной схемы доказательства разрешимости системы (14)—(16), поскольку эта схема может быть применена к доказательству разрешимости более сложных систем, соответствующих уравнениям второго рода с П-ядрами.

Рассмотрим теперь уравнение (4). Его приближенное решение ищем в виде (11), а неизвестные постоянные c_k определяем из системы

$$(K\varphi_n - f, \pi_j) = 0, \quad j = \overline{0, n}, \tag{19}$$

которая в развернутом виде запишется так:

$$\sigma_j c_j + \lambda \sum_{k=0}^{n} c_k d_{kj} = f_j, \quad j = \overline{0, n}, \tag{20}$$

где f_j определяются по формулам (17), а

$$d_{kj} = \int_a^b \int_a^b \rho(x)\rho(t)k(x,t)\pi_k(t)\pi_j(x)\,dt\,dx. \tag{21}$$

Теорема 3. *Пусть функция $f(x) \in L_{2\rho}$, функция $k(x,t)$ удовлетворяет условию* (8) *и число λ является регулярным числом оператора K, оператор $K_0: X \to Y$ ограничен и имеет ограниченный обратный $K_0^{-1}: Y \to X$. Тогда система* (20) *разрешима при достаточно больших n, а приближенные решения $\varphi_n^*(x)$ уравнения* (4) *сходятся в пространстве X к его точному решению $\varphi^*(x)$, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi^*(x) - \varphi_n^*(x) \|_X = 0.$$

Доказательство. Согласно [12] из теоремы 1 следует, что к оператору K_0 применим проекционный метод $\Pi\{Q_n, P_n\}$ по системе проекторов Q_n и P_n. Тогда на основании леммы 2 и теоремы 1.1 гл. XI [12] следует, что к оператору $K = K_0 + \lambda T$ также применим проекционный метод $\Pi\{Q_n, P_n\}$ по системе проекторов Q_n и P_n. Отсюда и следует утверждение теоремы 3.

Следствие 1. *Если $k(x,t)$, $f(x) \in H_\alpha^{(r)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$, по переменной x, то в условиях теоремы 3 справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$\| \varphi^*(x) - \varphi_n^*(x) \|_X = 0\,(n^{-r-\alpha}).$$

Замечание 2. Применимость МОМ в случае уравнений второго рода сильно ограничена. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$K\varphi \equiv \varphi + K_0\varphi + \lambda T\varphi = f, \tag{22}$$

где операторы K_0 и T имеют соответственно вид (5) и (6). Считаем, что $\Pi(x, t)$ — симметричное П-ядро, $f(x) \in L_{2\rho}$, а ядро $k(x, t)$ удовлетворяет условию (8) и λ является регулярным числом оператора K. Приближенное решение уравнения (22) ищем в виде (11), а неизвестные постоянные c_k определяем из системы уравнений

$$\sigma_j c_j + \sum_{j=0}^{n} c_k (a_{kj} + \lambda d_{kj}) = f_j, \quad j = \overline{0, n},$$

где f_j, d_{kj} определяются соответственно по формулам (17), (21),

$$a_{kj} = \int_a^b w^2(x)\pi_k(x)\pi_j(x)\,dx. \tag{23}$$

Поскольку функция $w(x)$ определяется свойствами решений на концах сегмента $[a, b]$ уравнения (22), то может оказаться, что функция $w^2(x)$ будет неинтегрируемой, т. е. интегралы (23) будут расходящимися. Из этого следует, что МОМ в этом случае к нахождению приближенных решений уравнения (22) не применим. Он будет применим лишь в том случае, когда функция $w^2(x)$ является интегрируемой. При этом будут справедливы утверждения, аналогичные теореме 3, следствию 1.

3. Пусть П-ядро $\Pi(x, t)$ не является симметричным. Рассмотрим уравнение (4) в предположении, что функция $f(x) \in L_{2\rho}$, $\rho(x) = w_-(x)$, функция $k(x, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \int_a^b w_-(x)\,w_+(t)\,|k(x,t)|^2\,dt\,dx \tag{24}$$

и число λ является регулярным числом оператора K.

Обоснование МОМ в случае несимметричных П-ядер производится по той же схеме, что и в случае симметричных П-ядер. Решения уравнений

(4) и (10) ищутся в виде $\varphi(x) = w_+(x)\varphi_0(x)$, где функция $w_+(x)$ определяется свойствами решения уравнения (10) на концах сегмента $[a, b]$. Положим $X = L_{2\rho_1}$, $\rho_1(x) = 1/w_+(x)$, $Y = L_{2\rho}$, $\rho(x) = w_-(x)$.

Лемма 3. *Если ядра $k(x, t)$ удовлетворяет условию* (24), *то оператор T, определенный равенством* (6), *действует из пространства $L_{2\rho_1}$ в пространство $L_{2\rho}$ вполне непрерывным образом.*

Операторы Q_n и P_n определим следующим образом:

$$(Q_n\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k w_+(x)\,\pi_k^+(x), \tag{25}$$

$$(P_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \pi_k^-(x). \tag{26}$$

Тогда в качестве пространств X_n и Y_n возьмем множества агрегатов вида (25) и (26) соответственно. Приближенные решения уравнений (10) и (4) ищем в виде

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k w_+(x)\,\pi_k^+(x),$$

а неизвестные постоянные c определяем из систем (16) и (20), где

$$f_j = \int_a^b w_-(x) f(x)\,\pi_j^-(x)\,dx, \tag{27}$$

$$d_{kj} = \int_a^b\int_a^b w_-(x)\,w_+(t)\,k(x, t)\,\pi_k^+(t)\,\pi_j^-(x)\,dt dx. \tag{28}$$

Тогда по разрешимости систем (16), (20) и сходимости приближенных решений уравнений (10) и (4) к их точным решениям имеют место утверждения, аналогичные теоремам 1—3 и следствию 1. Кроме того, в случае уравнений второго рода с несимметричными П-ядрами справедливы заключения замечания 2.

Замечание 3. При численной реализации МОМ необходимо вычислять квадратуры ((17), (21), (27), (28)), которые, как правило, вычисляются приближенно с помощью квадратурных формул, имеющих определенную погрешность на заданном классе функций. Поэтому известные элементы соответствующих алгебраических систем для определения неизвестных постоянных c_k будут заданы приближенно. В силу результатов [9] можно показать, что МОМ является устойчивым относительно малых возмущений. А поэтому алгебраические системы, полученные на основании приближенного вычисления квадратур (17), (21), (27), (28), будут разрешимы при достаточно больших n, и построенные таким образом приближенные решения уравнений (10), (4) будут сходиться к их точным решениям.

4. Известны [5] спектральные соотношения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|t-x|}\,\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \mu_n T_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)}{(t-x)\sqrt{1-t^2}}\,dt = U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{30}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{U_{n-1}(t)\sqrt{1-t^2}}{t-x}\,dt = -T_n(x), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

где $T_n(x)$, $U_n(x)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода, $\mu_0 =$

$= \ln 2$, $\mu_n = 1/n$, $n \geqslant 1$. Из (29) следует, что П-ядро $\Pi(x, t) = \ln \dfrac{1}{|t-x|}$ является симметричным, а из соотношений (30), (31) вытекает что П-ядро $\Pi(x, t) = 1/(t-x)$ является не симметричным.

Рассмотрим интегральные уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t)}{t-x}\, dt + \lambda \int_{-1}^{1} k(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x), \tag{32}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|t-x|}\, \varphi(t)\, dt + \lambda \int_{-1}^{1} k(x, t)\, \varphi(t)\, dt = f(x). \tag{33}$$

Предполагаем, что функции $f(x)$, $k(x, t) \in H_{\alpha}^{(r)}$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $r \geqslant 0$, по переменной x и число λ является регулярным числом ядра $k(x, t)$. Согласно [1, 5, 18] решения уравнений (32), (33) имеют вид $\varphi(x) = \varphi_0(x)/\sqrt{1-x^2}$, где функция $\varphi_0(x)$ удовлетворяет условию Гельдера на сегменте $[-1, 1]$. Отсюда в силу изложенного в пп. 2, 3 легко обосновать МОМ приближенного решения уравнений (32), (33) [20].

1. *Каландия А. И.* Математические методы двумерной упругости.— М. : Наука, 1977.— 303 с.
2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышын А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках.— Киев : Наук. думка, 1976.— 444 с.
3. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т.* Метод сингулярных уравнений в двумерных задачах дифракции.— Киев : Наук. думка, 1984.— 334 с.
4. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М. : Наука, 1977.— 311 с.
5. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов и разрезов, тонких включений и подкреплений.— М. : Наука, 1982.— 342 с.
6. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.— Киев : Наук. думка, 1981. — 324 с.
7. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. — М. : Наука, 1985. — 256 с.
8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.— Киев : Наук. думка, 1986. — 544 с.
9. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации линейных задач.— Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1980.— 232 с.
10. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1968.— 288 с.
11. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1980. - 262 с.
12. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 493 с.
13. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. — 1969.— 33, вып. 3.— С. 518 –531.
14. *Александров В. М.* О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики // Там же.— 1967.— **31**, вып. 6.— С. 1117—1131.
15. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О двух эффективных методах решения линейных задач механики сплошных сред // Там же.— 1977.— **41**, вып. 4.— С. 688—698.
16. *Моисеев Н. Г.* Краевые задачи плоской теории упругости при наличии дефектов внутри области: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Одесса, 1985.— 16 с.
17. *Даугавет И.* Введение в теорию приближения функций.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1977.— 184 с.
18. *Светной А. П., Тихоненко Н. Я.* К выделению особенностей решений задачи Римана // Изв. вузов. Математика. — 1981.— № 6.— С. 78—82.
19. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 741 с.
20. *Нореддин М. М., Тихоненко Н. Я.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений первого рода методом ортогональных многочленов // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 124—127.

Получено 09.04.90